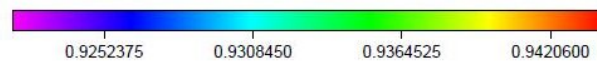
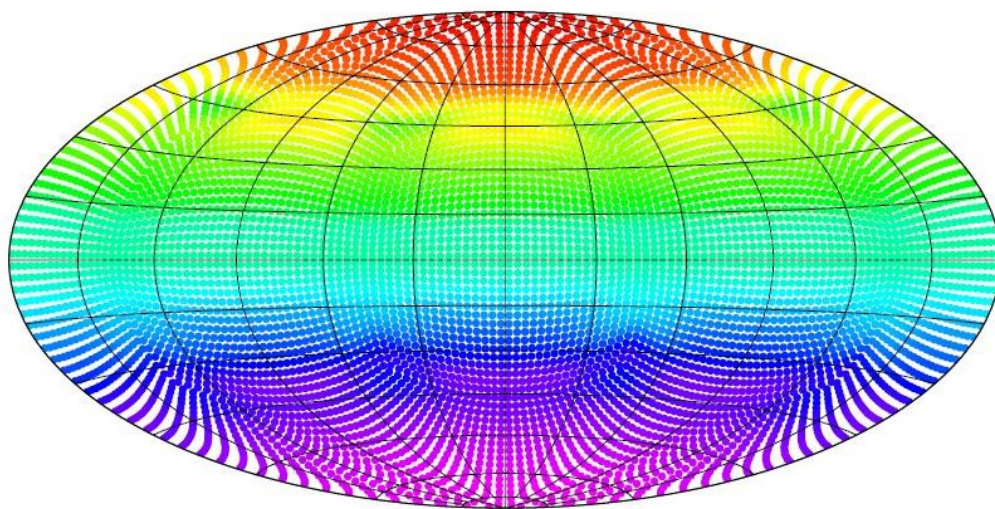


Évolution thermique du manteau de Mars et influence sur son champ magnétique

Manuela Raimbault *

8 février 2012



Dates du stage : du 2 mai 2011 au 31 juillet 2011

Raison sociale de l'entreprise : CNRS

Adresse : 2, rue de la Houssinière - 44 332 NANTES

Accompagnateur ECN : Josep Pinyol Vidal

*Stage de recherche effectué au Laboratoire de Planétologie de Nantes, sous la direction de Gaël Choblet.

Remerciements

Je souhaite remercier Gaël CHOBLET, grâce à qui j'ai pu réaliser mon stage au Laboratoire de Planétologie et de Géodynamique de Nantes ; ainsi que Hagay AMIT avec lequel nous avons discuté de la prise en compte du noyau de Mars dans les modèles que nous avons utilisés.

Merci également à Éric BEUCLER, qui s'est proposé de donner une formation à LaTeX et qui s'est montré très disponible par la suite pour toutes les questions. Je n'oublie pas les stagiaires que j'ai été amenée à côtoyer au cours de ces quelques mois, qui m'ont parfois aidé et dont j'ai apprécié la bonne humeur.

Merci à tous pour la bonne ambiance qui règne dans ce labo !

Table des matières

1	Introduction théorique	4
1.1	Objectif du stage	4
1.2	Champ magnétique	4
1.3	Évolution thermique	4
1.3.1	Convection thermique	4
1.4	Convection thermique	5
1.4.1	Écoulement d'un fluide visqueux	5
1.4.2	Conservation de la masse	6
1.4.3	Transport de la chaleur	6
1.5	Nombres caractéristiques	6
1.5.1	Nombre de Rayleigh Ra	6
1.5.2	Nombre de Prandtl Pr	6
1.5.3	Nombre de Nusselt Nu	7
2	Flux critique à la CMB permettant une dynamo	8
3	Modèle 1D	11
3.1	Pression en fonction de la profondeur	11
3.2	Représentation des solidus par des polynômes	11
3.3	Chauffage radiogénique	12
3.4	Modèle d'évolution du manteau	13
3.4.1	Évolution temporelle de la température	15
3.4.2	Évolution temporelle de la température en tenant compte du noyau .	19
4	Perspectives	25
A	Codes MatLab	27

1 Introduction théorique

1.1 Objectif du stage

Ce stage s'inscrit dans le cadre de l'explication de la disparition du champ magnétique de Mars. En étudiant l'évolution thermique de Mars, on essaie de comprendre comment elle peut influencer son champ magnétique.

Je me suis principalement inspirée des modèles de (Morschhauser, 2010) et de (Fraeman, 2009). Dans un premier temps, j'ai produit un modèle simplifié via Matlab, ne tenant compte que du manteau de Mars et du chauffage radiogénique, c'est-à-dire dû à la décroissance radioactive. J'ai ensuite introduit le noyau. Je suis alors passée à un code ForTran, développé par Gaël Choblet.

1.2 Champ magnétique

Un champ magnétique dans une planète peut exister lorsqu'il y a une dynamo dans le noyau. Ce sont les mouvements de convection à l'intérieur du noyau, fait d'un alliage de fer et de nickel liquide en fusion, qui créent un phénomène d'induction. L'énergie cinétique produite par la rotation de la planète (force de Coriolis) est convertie en énergie électrique qui engendre alors un champ magnétique. Les variations de champ magnétique provoquent elles-mêmes des courants électriques et empêchent alors par induction électromagnétique que le champ magnétique disparaisse.

Sur Mars, les traces d'aimantation ont montré que le champ magnétique a duré suffisamment longtemps pour avoir subi une inversion de polarité.

1.3 Évolution thermique

L'étude de la dynamique interne d'une planète nécessite la connaissance des lois physiques qui entrent en jeu. En effet, lors de l'accrétion en particulier, la planète a emmagasiné une grande quantité de chaleur qu'elle doit ensuite restituer. Elle dispose de deux modes d'évacuation de cette chaleur : la conduction et la convection thermiques.

À l'intérieur d'une planète et sous l'effet des hautes températures, on peut considérer le manteau comme un fluide dont le principal mode de propagation de la chaleur est la convection thermique, cela sur des échelles de temps géologiques. C'est sur ce phénomène que je me suis penchée durant mon stage. Bien que la rhéologie du fluide est certainement non-newtonienne dans le manteau martien, je me limiterai au cas particulier du fluide newtonien à l'instar de la majorité des travaux de convection mantellique. La convection peut alors être décrite par les trois équations de conservation de mécanique des fluides : la conservation de la masse, la conservation du moment et la conservation de l'énergie.

1.3.1 Convection thermique

Lorsqu'une couche de fluide est chauffée par le bas et refroidie par le haut, le fluide à la limite supérieure sera froid et dense, tandis qu'en profondeur, il sera plus chaud et léger. Cette situation gravitationnellement instable poussera le fluide froid et dense à descendre et le chaud à monter. La force motrice est la force d'Archimède. Si le fluide est chauffé par l'intérieur, ce qui est le cas dans une planète, le phénomène est le même à ceci près qu'il ne se forme pas de panache chaud ascendant, comme le montre la figure 1.

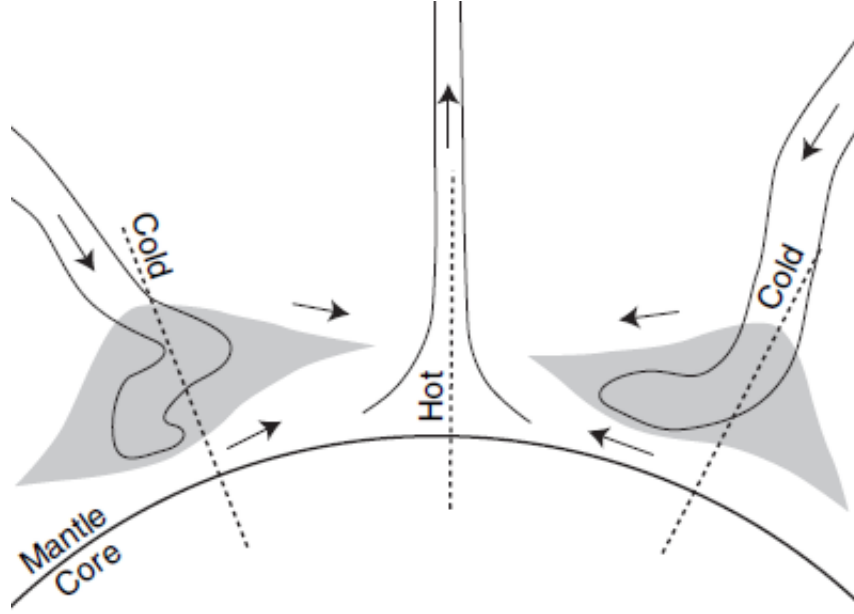


FIGURE 1 – Modèle de convection thermique en deux dimensions pour un fluide chauffé par l’intérieur et refroidi par le haut, d’après Jaupart et al 2007. Le fluide est divisé en deux cellules. Une couche froide se forme au-dessus de chaque cellule et quand deux couches froides de cellules adjacentes se rencontrent, elles se séparent de la surface pour former un plan froid descendant. Dans cette configuration, il ne se forme pas de panache chaud ascendant.

1.4 Convection thermique

Dans le code 3D sphérique établi par Gaël Choblet, les trois équations suivantes sont résolues :

- écoulement d’un fluide visqueux ;
- conservation de la masse ;
- transport de la chaleur.

1.4.1 Écoulement d’un fluide visqueux

Dans le cas général d’un fluide newtonien de viscosité constante, de masse volumique ρ et soumis à un champ de force de volume $\vec{F} = \rho \vec{f}$, les équations de l’écoulement s’écrivent

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\mu \Delta \vec{V} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})}_{\text{contraintes de frottement visqueux}} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} \quad (1)$$

où $\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$ est la dérivée convective du champ de vitesse.

Pour un fluide incompressible, hypothèse justifiée dans l’approximation de Boussinesq, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ et on obtient les équations de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \mu \Delta \vec{V} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} \quad (2)$$

De plus, le nombre de Prandtl tendant vers l’infini (on le verra plus loin), l’accélération du fluide est négligeable devant les contraintes visqueuses, d’où

$$\mu \Delta \vec{V} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} = 0 \quad (3)$$

1.4.2 Conservation de la masse

La masse doit être conservée lors de l'écoulement ; cette conservation s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (4)$$

ou encore

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (5)$$

et en supposant le fluide incompressible, on obtient l'équation simplifiée

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0. \quad (6)$$

1.4.3 Transport de la chaleur

L'équation de la chaleur exprime la conservation de l'énergie en faisant le bilan des variations locales de densité volumique d'énergie :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{k \Delta T}_{\text{transport par conduction}} - \rho C_p \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T}_{\text{transport par convection}} + \underbrace{\rho H}_{\text{production interne de chaleur}} \quad (7)$$

Ainsi, le système numérique à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \mu \Delta \vec{V} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T - \rho C_p \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T + \rho H \end{cases} \quad (8)$$

1.5 Nombres caractéristiques

1.5.1 Nombre de Rayleigh Ra

C'est le rapport entre les forces motrices du fluide et celles de frottement. On définit un nombre de Rayleigh critique Ra_c en-dessous duquel les instabilités induites par perturbations thermiques s'amortissent. Dans notre cas, nous considérons un chauffage par le bas, le nombre de Rayleigh s'exprime donc

$$Ra = \frac{\rho_0 g \alpha_v \delta T b^3}{\mu \kappa} \quad (9)$$

où ρ_0 est la densité moyenne, α_v le coefficient d'expansion thermique à volume constant, b la hauteur de la couche, μ la viscosité cinématique et $\kappa = \frac{k}{\rho C_p}$ la diffusivité thermique, avec k la conductivité thermique du fluide et C_p sa capacité calorifique. Sur Terre, $Ra = 3,8 \cdot 10^5$.

1.5.2 Nombre de Prandtl Pr

Le nombre de Prandtl est le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement (viscosité cinématique ν) et la diffusivité thermique. Autrement dit, un fluide dont le nombre

de Prandtl est petit diffuse la chaleur plus rapidement qu'il ne diffuse le moment cinématique. Il s'exprime par

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (10)$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique.

Sur Terre, $Pr = 3,5 \cdot 10^{24}$. Dans les milieux planétaires, on considère un Pr infini, la viscosité dynamique étant négligeable devant la diffusivité thermique.

1.5.3 Nombre de Nusselt Nu

Le nombre de Nusselt représente le rapport entre le transfert thermique total et celui par conduction

$$Nu = \frac{q_{convec}}{q_{cond}} = \frac{q_{convec}}{k \frac{T_1 - T_0}{b}} \quad (11)$$

où k est la conductivité thermique.

Partant de 1 pour un milieu parfaitement conducteur, Nu augmente progressivement lorsque la convection devient plus vigoureuse ; il mesure ainsi l'efficacité relative de la convection dans le refroidissement du milieu.

2 Flux critique à la CMB permettant une dynamo

Comme l'explique J. Aubert (Aubert, 2009), pour qu'il y ait convection dans le noyau, il faut que la puissance fournie soit supérieure à la puissance adiabatique.

En effet, lorsque le noyau convecte, il évacue de la chaleur. Si le noyau refroidit, ce flux de chaleur qui provient du noyau diminue, jusqu'à atteindre une limite où la dynamo ne peut plus fonctionner et le champ magnétique disparaît. La condition nécessaire pour qu'un noyau métallique liquide convecte, permettant la présence d'une dynamo, est que le flux de chaleur soit supérieur à celui transporté par conduction de façon adiabatique :

$$F_c > F_{cond,ad} = \frac{k_c \alpha_c g_c T_c}{C_c} \quad (12)$$

où F_c , k_c , α_c , g_c , C_c et T_c sont respectivement le flux de chaleur, la conductivité thermique, l'expansivité, la gravité du noyau, la capacité calorifique et la température du noyau. Dans le cas de Mars, plus le noyau sera considéré comme petit, plus la pression à l'interface noyau-manteau sera élevée et l'accélération de gravité plus faible que celle à la surface (égale à $3,72 \text{ m.s}^{-2}$).

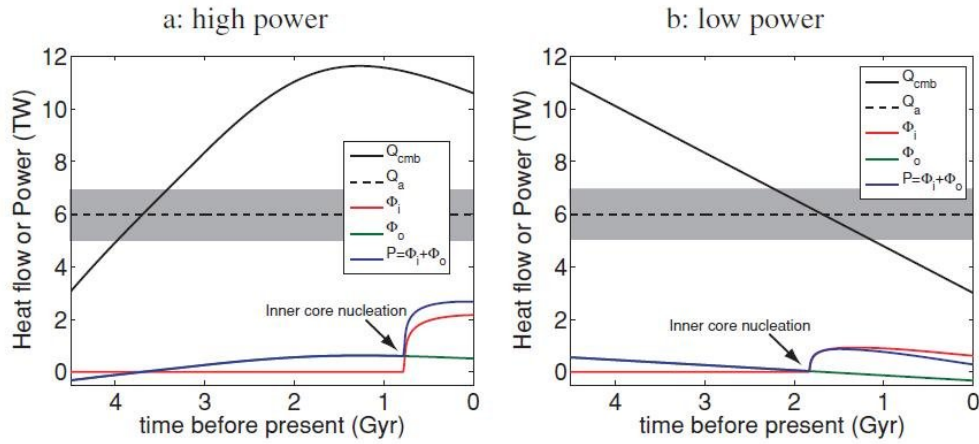


FIGURE 2 – Il y a dynamo lorsque $Q_{CMB} > Q_a \iff P > 0$.

Les figures 3 et 4 ont été obtenues avec un code similaire au code 1D, en tenant compte, en plus, de la fusion partielle. En effet, une partie des éléments radioactifs du manteau fond et vient enrichir la croûte, appauvrissant ainsi le manteau, qui produit donc moins de chaleur. Dans mon code 1D, j'ai donc négligé cet effet en supposant ou bien que la fusion partielle est négligeable, ou bien que le manteau est de nouveau enrichi lors de la plongée de la croûte dans les zones de subduction. Le flux doit être contenu dans la partie grisée sur le graphe 1 des figures 3 et 4. Il dépend de la conductivité thermique k_c , prise entre 28 et $90 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$ et de la température à la CMB suivant l'équation

$$Q_{ad} = k_c \nabla T_{ad} \quad (13)$$

où

$$\nabla T_{ad} = \frac{\alpha_c g_{CMB} T_{CMB}}{C_c}. \quad (14)$$

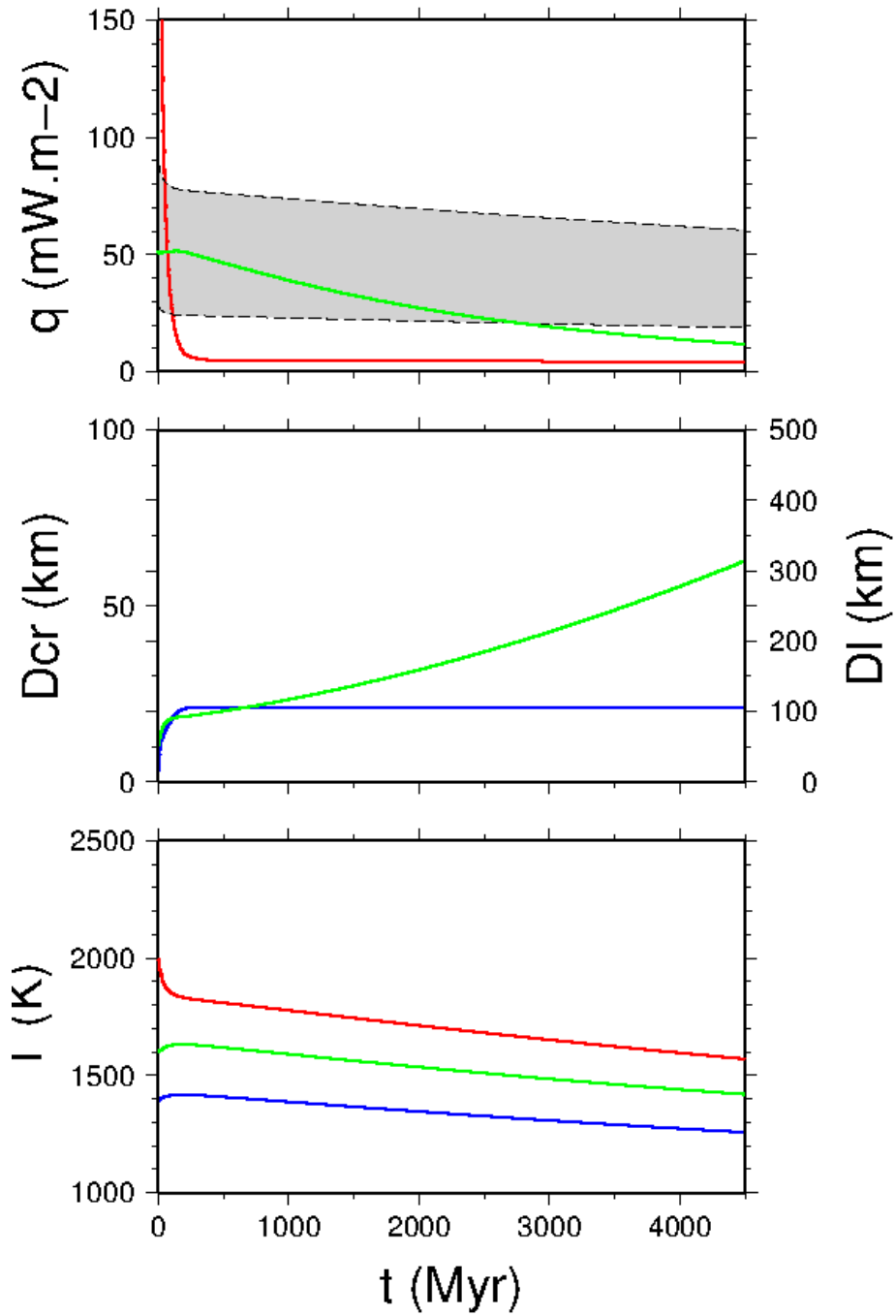


FIGURE 3 – (haut) Flux. en vert : F_m , en rouge : F_c , pointillés : valeurs extrêmes pour le flux adiabatique sortant du noyau, de manière à ce qu'il y ait dynamo. (milieu) épaisseurs. en bleu : croûte, en vert : couvercle conducteur. (bas) températures. en rouge : à la CMB, en vert : dans le manteau, en bleu : à la base du couvercle conducteur.

La figure 3 correspond au jeu de paramètres $T_{u0} = 1600K$, $T_{cm0} = 2000K$ et $\mu_0 = 10^{18}Pa.s$, La figure 4 correspond au jeu de paramètres $T_{u0} = 1900K$, $T_{cm0} = 2200K$ et $\mu_0 = 10^{21}Pa.s$.

Pour que F_c soit élevé, il faut que le noyau soit très chaud (T_{cm0} très élevé), mais même dans ce cas le plus favorable, ce flux diminue très vite et la dynamo ne dépasse jamais 300 Ma.

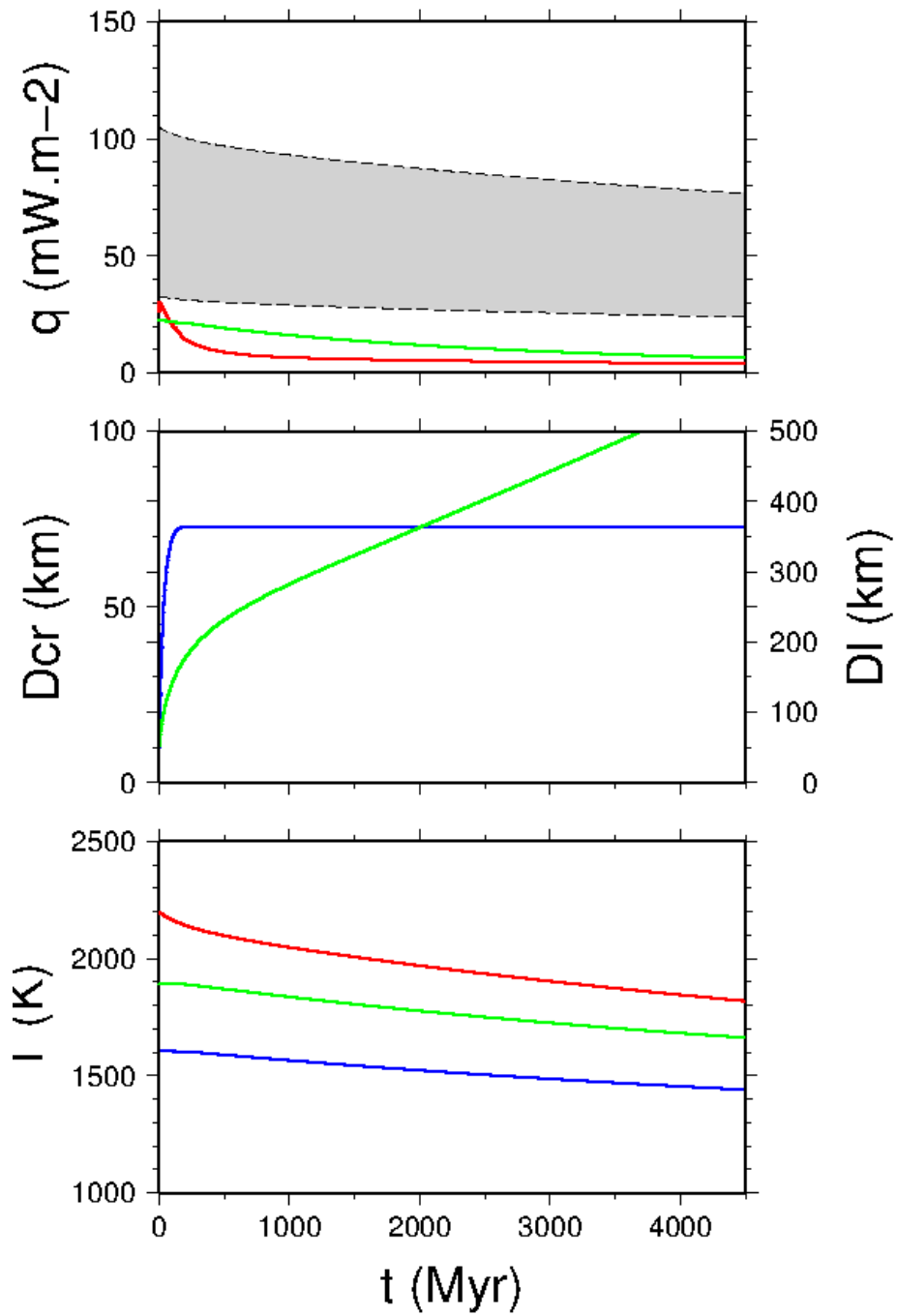


FIGURE 4 – (haut) flux ; en vert : F_m , en rouge : F_c , pointillés : valeurs extrêmes pour le flux adiabatique sortant du noyau, de manière à ce qu'il y ait dynamo. (milieu) épaisseurs. en bleu : croûte, en vert : couvercle conducteur. (bas) températures. en rouge : à la CMB, en vert : dans le manteau, en bleu : à la base du couvercle conducteur.

3 Modèle 1D

Dans mon modèle 1D, c'est la relation Nusselt-Rayleigh (éq. 19) qui paramétrise l'écoulement convectif. La conservation de l'énergie que je prends en compte est un équilibre global et ne fait donc pas intervenir d'équation locale.

Afin de quantifier l'influence des éléments radioactifs dans l'évolution thermique du manteau, il est nécessaire de définir le solidus et de connaître l'évolution de la pression en fonction de la profondeur.

3.1 Pression en fonction de la profondeur

En utilisant l'équation de l'hydrostatique $P = P_0 + \rho gz$, on connaît la profondeur lorsqu'on connaît la pression, et inversement.

Sur le graphe suivant, on distingue trois zones assez linéaires, qui traduisent la structure interne de Mars (la transition entre la croûte et le manteau n'est pas claire car la différence de densité est faible :

- entre 0 et 40 km : croûte ;
- entre 40 et 1800 km : manteau ;
- entre 1800 et 3390 km : noyau.

Il faut cependant garder à l'esprit que la structure interne est encore mal contrainte, surtout en ce qui concerne la taille du noyau. La variation du coefficient directeur est liée à la densité, différente dans chaque couche. La pression à la CMB (Core-Mantle Boundary) est d'environ 24 GPa.

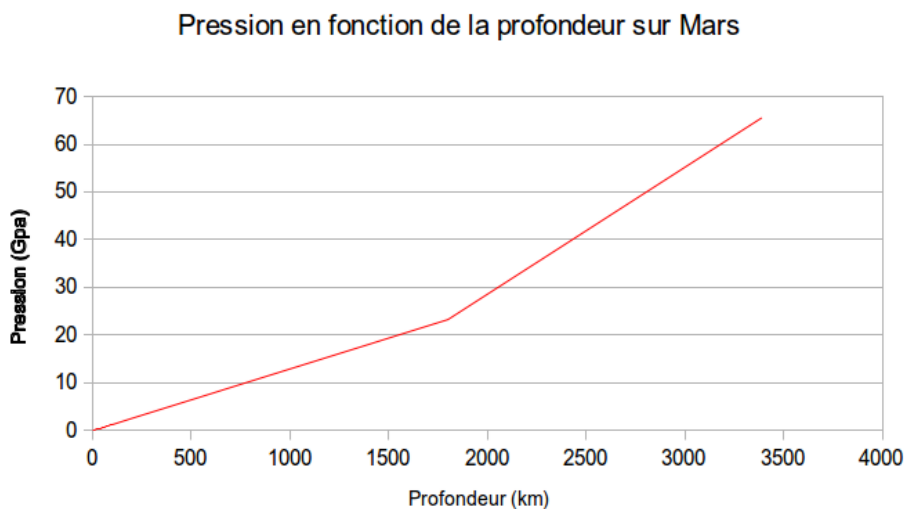


FIGURE 5 – Évolution de la pression en fonction de la profondeur.

3.2 Représentation des solidus par des polynômes

Le solidus est la température limite sous laquelle il ne subsiste que du solide. L'épaisseur de la croûte dépend donc de cette limite. Le solidus dépend de la pression. Dans le tableau 1, j'ai répertorié différents modèles de solidus, approchés par des polynômes.

TABLE 1 – Polynômes permettant de définir le solidus

Hirschmann	$T(^{\circ}C) = -5.104P^2 + 132.899P + 1120.661$
Herzberg	$T(^{\circ}C) = 1086 - 5.7P + 390\ln P$
Zhang	$T(^{\circ}C) = 1409 + 134.2P - 6.581P^2 + 0.1054P^3$
Katz	$T(^{\circ}C) = -5.1 \times P^2 + 132.9P + 1085.7$

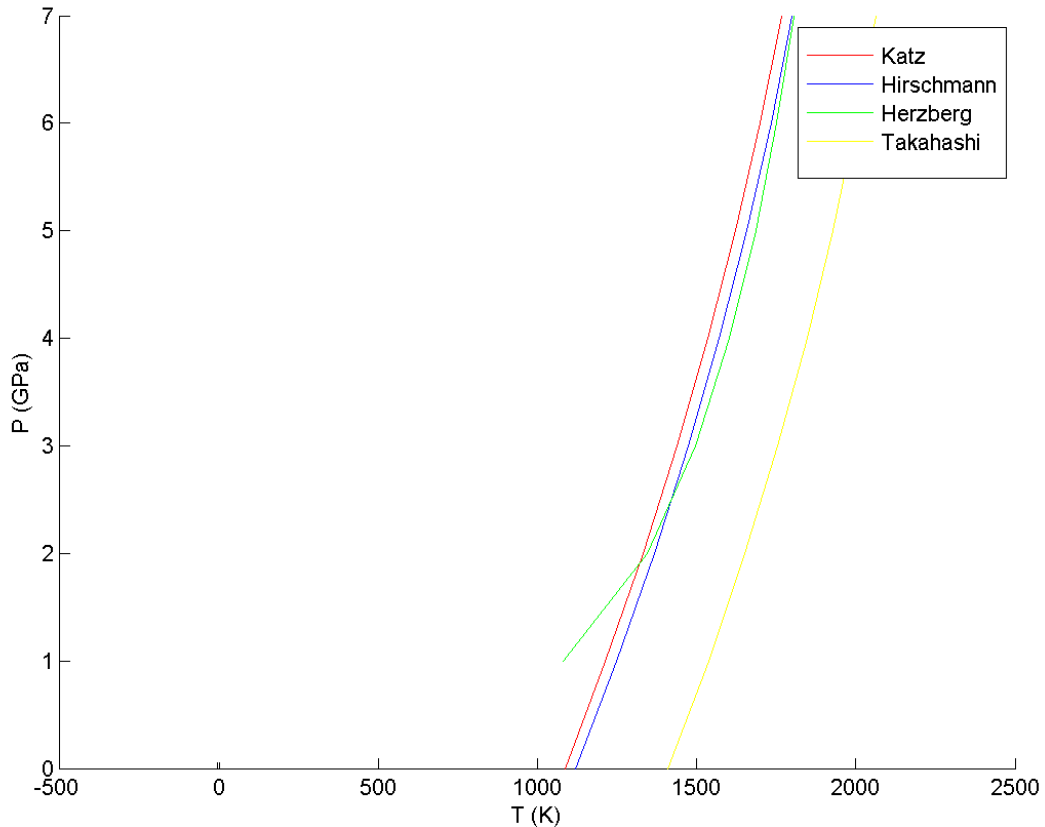


FIGURE 6 – Solidus obtenus suivant les différents modèles

3.3 Chauffage radiogénique

Dans le manteau, la décroissance des éléments radioactifs, principalement l'uranium, le thorium et le potassium, est une source de chaleur. Il est donc nécessaire de connaître sa contribution pour estimer le chauffage global. En me basant sur la démarche adoptée par Jaupart (Jaupart, 2009), pour la Terre, j'ai établi un tableau similaire pour Mars (Tab. 2). Pour cela, j'ai fait intervenir deux modèles :

- le modèle de Dreibus et Wanke, 1987 ; Treiman et al., 1986 ; McDonough et Sun, 1989 :
production de chaleur à un taux comparable au taux de production de chaleur chondritique ;
- le modèle de Lodders et Fegley, 1997 :

production double en mélangeant plusieurs classes de chondrites (ordinaires, aqueuses et enstatites, dans les proportions requises par les isotopes de l'oxygène, de manière à conserver la même masse totale).

Dans la littérature, on trouve différentes valeurs de concentration des trois éléments radioactifs jouant un rôle majeur dans le refroidissement du manteau. Ces valeurs sont listées dans le tableau 2. Pour chacun des trois éléments, j'ai choisi une valeur moyenne :

- 1.10^{-2} ppm pour l'uranium ;
- 5.10^{-2} ppm pour le thorium ;
- 4.10^2 ppm pour le potassium.

3.4 Modèle d'évolution du manteau

TABLE 2 – Abondance des différents isotopes

Méthode	Auteurs	U (ppm)	Th (ppm)	K (ppm)
Météorites SNC	Dreibus et Wanke (1985)	16	56	315
	Anderson (1972)	17	77	573
	Morgan et Anders (1979)	35	125	218
	Ringwood (1981)	17	60	218
	Lodders (avec des basaltes)	0.11	/	0.14
	Lodders (avec des wehrlites)	0.05	0.15	0.09
	Treimann et al (1996)	<0.3	<0.3	0.3 - 0.7
Sondes	Surkov et al avec Phobos 2 (1994)	0.7	2.3	0.4
	Clark et al avec Viking 1 et 2 (1982)	/	/	<0.4
	Surkov et al avec Mars 5 (1989)	0.6	2.1	0.3

Le tableau 3 présente les quantités de chaleur produites par chaque élément. Les tableaux 2 et 3 permettent d'établir le tableau 4, qui fournit la figure 7, obtenue avec un code Matlab qui figure en annexe 1.

TABLE 3 – Constantes de production de chaleur

Isotope par élément	Abondance naturelle	Demie-vie	Énergie par atome ($\times 10^{-12}$ J)	Production de chaleur par unité de masse d'isotope par élément ($W.kg^{-1}$)
^{238}U	99,27	$4,46.10^9$	7,41	$9,17.10^{-5}$
^{235}U	0,72	$7,04.10^8$	7,24	$5,75.10^{-4}$
U				$9,52.10^{-5}$
^{232}Th	100,0	$1,40.10^{10}$	6,24	$2,56.10^{-5}$
Th				$2,56.10^{-5}$
^{40}K	0,0117	$1,26.10^9$	0,114	$2,97.10^{-5}$
K				$3,48.10^{-9}$

La figure 7 représente la contribution de chaque élément radioactif au refroidissement du manteau, en considérant une évolution exponentielle de la décroissance radioactive, ainsi que le refroidissement total au cours du temps

$$Q_m(t) = \sum_{i=1}^4 H_i(0)e^{-\lambda_i t}. \quad (15)$$

TABLE 4 – Évolution de la production de chaleur des différents isotopes au cours du temps

Masse de Mars (kg) = $5,18 \cdot 10^{23}$	^{238}U	^{235}U	Th	K
Concentration actuelle (ppm)	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^2$
Concentration à 4,55 Ga bp (ppm)	$2,01 \cdot 10^{-2}$	$8,40 \cdot 10^{-1}$	$6,25 \cdot 10^{-2}$	$4,76 \cdot 10^3$
Masse initiale de l'élément (kg)	$1,04 \cdot 10^{16}$	$4,35 \cdot 10^{17}$	$3,24 \cdot 10^{16}$	$2,46 \cdot 10^{21}$
Abondance naturelle de l'isotope (%)	$9,93 \cdot 10^1$	$7,20 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^2$	$1,17 \cdot 10^{-2}$
Masse initiale de l'isotope (%)	$1,03 \cdot 10^{16}$	$3,13 \cdot 10^{15}$	$3,24 \cdot 10^{16}$	$2,88 \cdot 10^{17}$
Demie-vie (années)	$4,46 \cdot 10^9$	$7,04 \cdot 10^8$	$1,40 \cdot 10^{10}$	$1,26 \cdot 10^9$
Constante radioactive	$1,55 \cdot 10^{-10}$	$9,85 \cdot 10^{-10}$	$4,95 \cdot 10^{-11}$	$5,50 \cdot 10^{-10}$
Production de chaleur par unité de masse d'élément ($\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$)	$9,17 \cdot 10^{-5}$	$5,75 \cdot 10^{-4}$	$2,56 \cdot 10^{-5}$	$2,97 \cdot 10^{-5}$

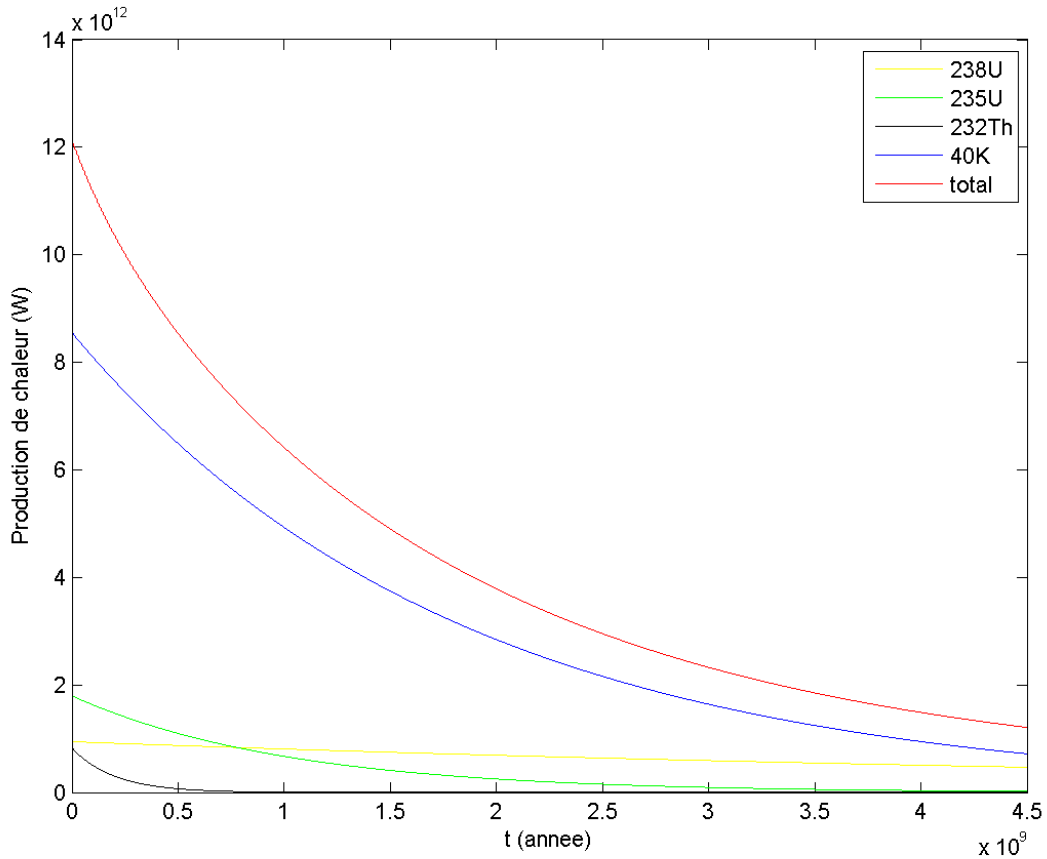


FIGURE 7 – Évolution temporelle de la température

L'évolution du manteau peut être décrite par

$$\frac{4}{3}\pi(R_m^3 - R_c^3)(Q_m - \rho_m c_m \eta_m \frac{dT_u}{dt}) - \rho_m f_m L_m = 4\pi(R_m^2 F_m - R_c^2 F_c), \quad (16)$$

où Q_m est la production de chaleur radioactive calculée précédemment, le terme $\rho_m c_m \eta_m \frac{dT_u}{dt}$

représente l'évolution temporelle (le refroidissement moyen) et le terme $\rho_m f_m L_m$ est la source de chaleur latente. Dans un premier temps, je ne prendrai en compte que l'influence du manteau, négligeant donc :

- la chaleur latente de fusion L_m ;
- la fusion partielle du manteau qui provoque un appauvrissement en éléments radioactifs et un enrichissement de la croûte (pour calculer Q_m , on ne considère qu'une décroissance simple des éléments radioactifs), on suppose donc que la croûte, enrichie, réalimente le manteau lors de la subduction ;
- le flux sortant du noyau F_c ;
- la croûte, que l'on inclut dans le manteau.

L'équation (16) devient donc

$$\frac{4}{3}\pi(R_m^3 - R_c^3)(Q_m - \rho_m c_m \eta_m \frac{dT_u}{dt}) = 4\pi R_m^2 F_m. \quad (17)$$

On peut alors calculer l'inconnue $\frac{dT_u}{dt}$, tous les autres termes étant connus.

En effet,

$$F_m = k_m \frac{T_u - T_s}{R_p - R_c} Nu \quad (18)$$

où le nombre de Nusselt dépend de la température et du nombre de Rayleigh selon l'équation

$$Nu = 0,53\theta^{-4/3} Ra_i^{1/3}. \quad (19)$$

C'est cette relation entre le Nusselt et le Rayleigh qui paramétrise l'écoulement convectif.

Afin de modéliser l'évolution thermique, j'ai écrit un programme Matlab qui procède par itération sur le principe de la méthode d'Euler. On obtient donc la température T_u à un instant $t + 1$ connaissant celle à l'instant t en calculant

$$T_u(k + 1) = T_u(k) + \frac{H(k)}{V_m \rho_m c_m} dt. \quad (20)$$

3.4.1 Évolution temporelle de la température en tenant compte du chauffage radiogénique et du flux de chaleur à travers le manteau

F_m ne varie quasiment pas suivant la valeur initiale de la température T_{u0} (pour des valeurs comprises entre 1600 et 1900 K).

TABLE 5 – Définition des variables utilisées dans le programme

R_p	Rayon de la planète Mars
R_c	Rayon du noyau
E	Énergie d'activation
R	Constante des gaz parfaits
α_m	Coefficient d'expansion thermique
κ_m	Diffusivité thermique du manteau
g	Gravité à la surface
k_m	Conductivité thermique du manteau
T_s	Température à la surface
ρ_m	Densité du manteau
c_m	Capacité calorifique du manteau
V_m	Volume du manteau
Nu	Nombre de Nusselt
μ	Viscosité cinématique
F_m	Flux de chaleur à travers le manteau
H	Production de chaleur totale
Ra_i	Nombre de Rayleigh
T_u	Température à la base de la couche limite froide
A	Facteur préexponentiel calculé de sorte que $\mu(T_{u0}) = \mu_0$

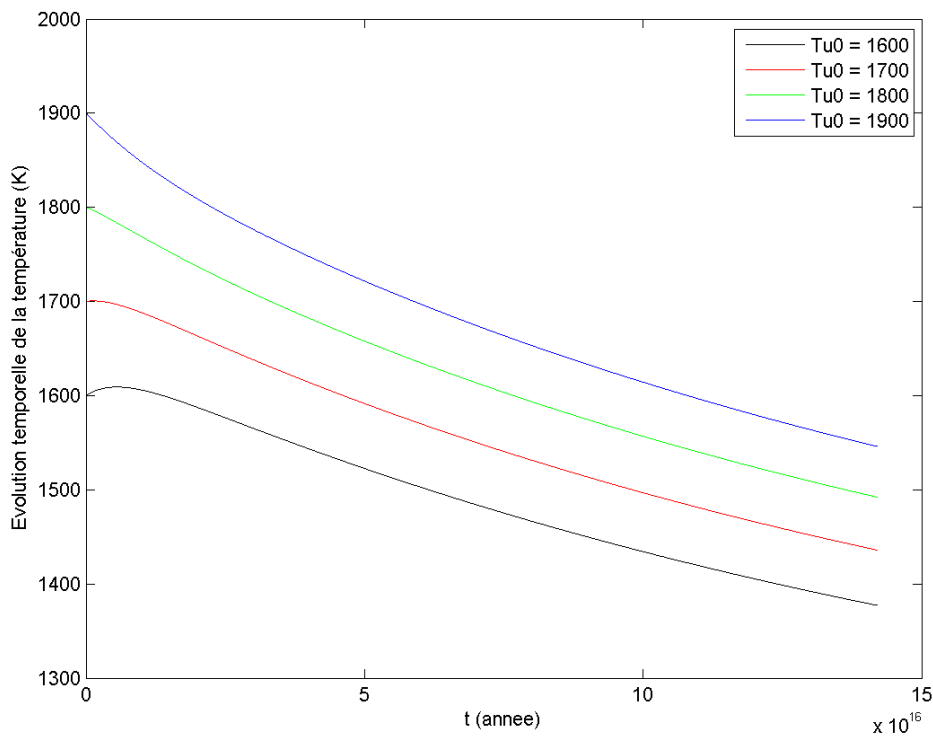


FIGURE 8 – Évolution de la température T_u avec différentes valeurs initiales et une viscosité de $10^{18} Pa.s$.

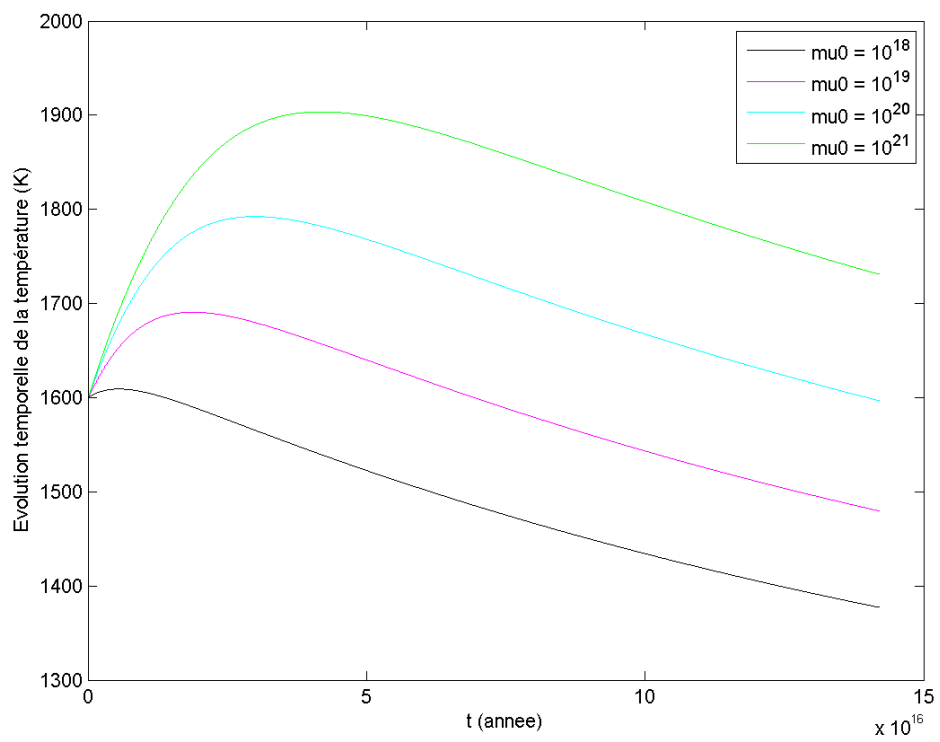


FIGURE 9 – Évolution de la température T_u avec différentes valeurs initiales de la viscosité, pour $T_{u0} = 1600K$.

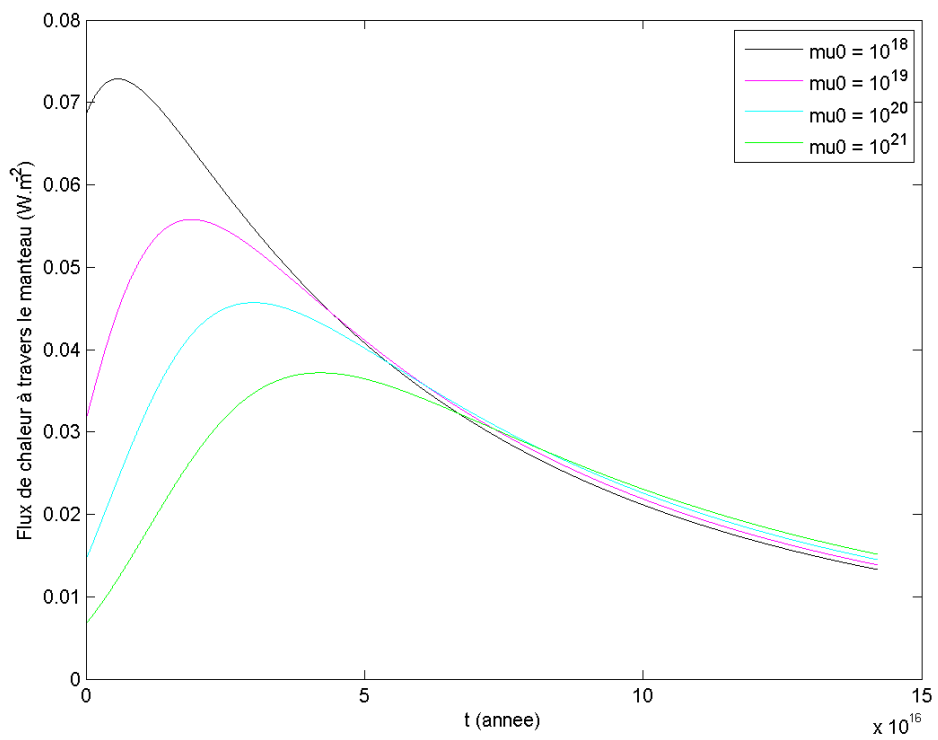


FIGURE 10 – Évolution du flux à travers le manteau pour différentes valeurs initiales de la viscosité et $T_{u0} = 1600K$.

3.4.2 Évolution temporelle de la température en tenant compte du chauffage radiogénique, du flux de chaleur à travers le manteau et à travers le noyau

TABLE 6 – Définition des variables utilisées dans le programme

Ra_{icl}	Nombre de Rayleigh au niveau de la couche limite chaude
R_l	Rayon à la base de la couche limite froide
F_c	Flux de chaleur à travers le noyau
δ_u	Épaisseur de la couche limite froide
δ_c	Épaisseur de la couche limite chaude
T_b	Température au sommet de la couche limite chaude
T_{cm}	Température à la CMB
ρ_c	Densité du noyau
c_c	Capacité calorifique du noyau
η_c	Coefficient prenant en compte le chauffage adiabatique
μ_{moyen}	Viscosité pour une température moyenne dans la couche limite chaude

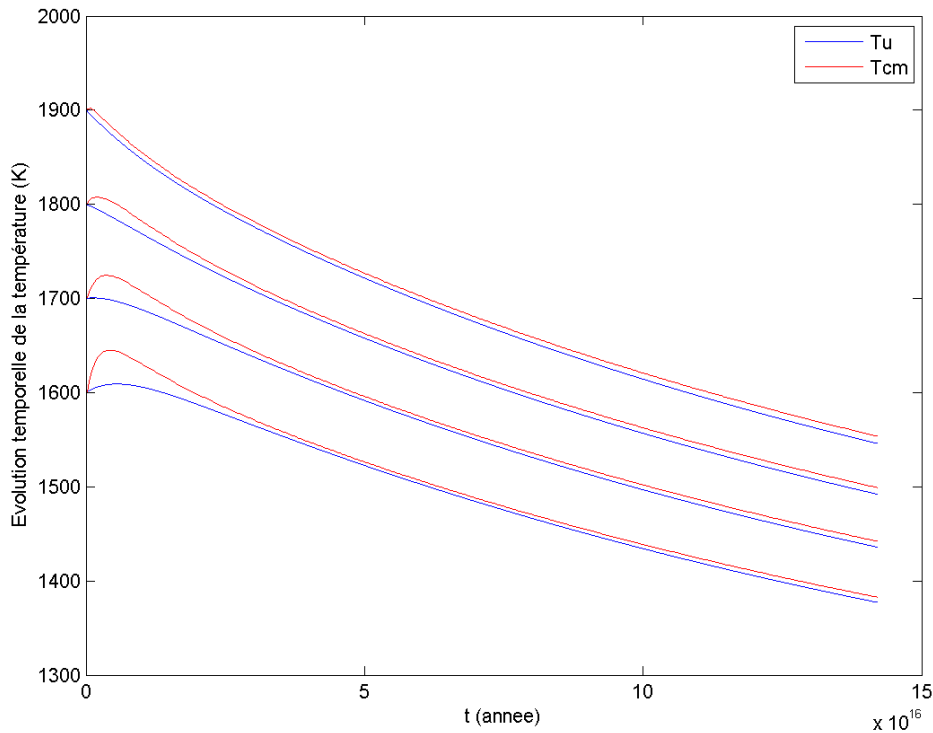


FIGURE 11 – Évolution de la température T_u avec et sans noyau, pour différentes valeurs initiales de T_u : $T_{u0} = 1600K, 1700K, 1800K, 1900K$ et à viscosité fixe : $\mu(0) = 10^{18} Pa.s$.

La figure 14 donne l'évolution des températures T_u et T_{cm} dans le cas où $T_{u0} = 1600K$, $T_{cm0} = 2000K$ et $\mu_0 = 10^{18} Pa.s$. La figure 15 reprend ce cas et le compare aux autres valeurs de μ_0 .

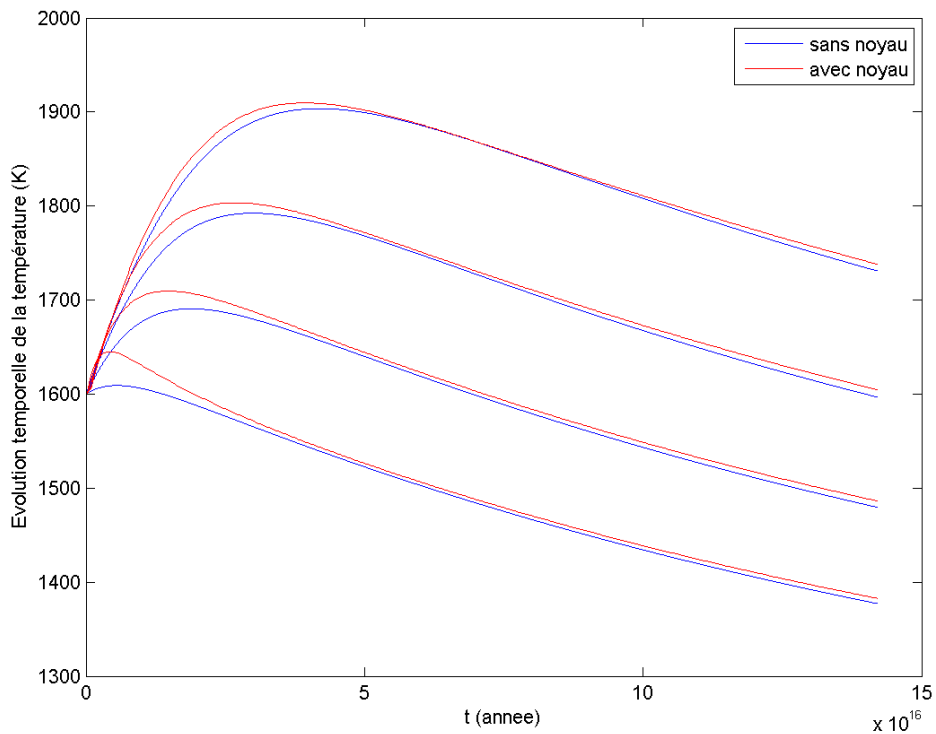


FIGURE 12 – Évolution des températures T_u et T_{cm} pour différentes valeurs initiales de T_u : $T_{u0} = 1600K, 1700K, 1800K, 1900K$ et à viscosité fixe : $\mu(0) = 10^{18} Pa.s$

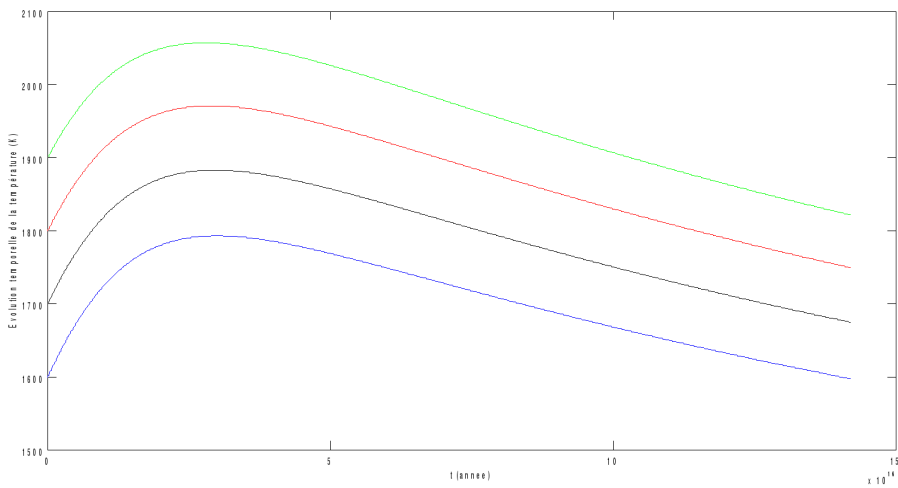


FIGURE 13 – Évolution de la température T_u en fonction de $T_{u0} = 1600K, 1700K, 1800K, 1900K$ et à viscosité fixe : $\mu(0) = 10^{20} Pa.s$

Pour une température initiale T_{u0} fixée (sur la figure 16 à 1700K), lorsque la viscosité augmente, la phase pendant laquelle la température croît dure plus longtemps.

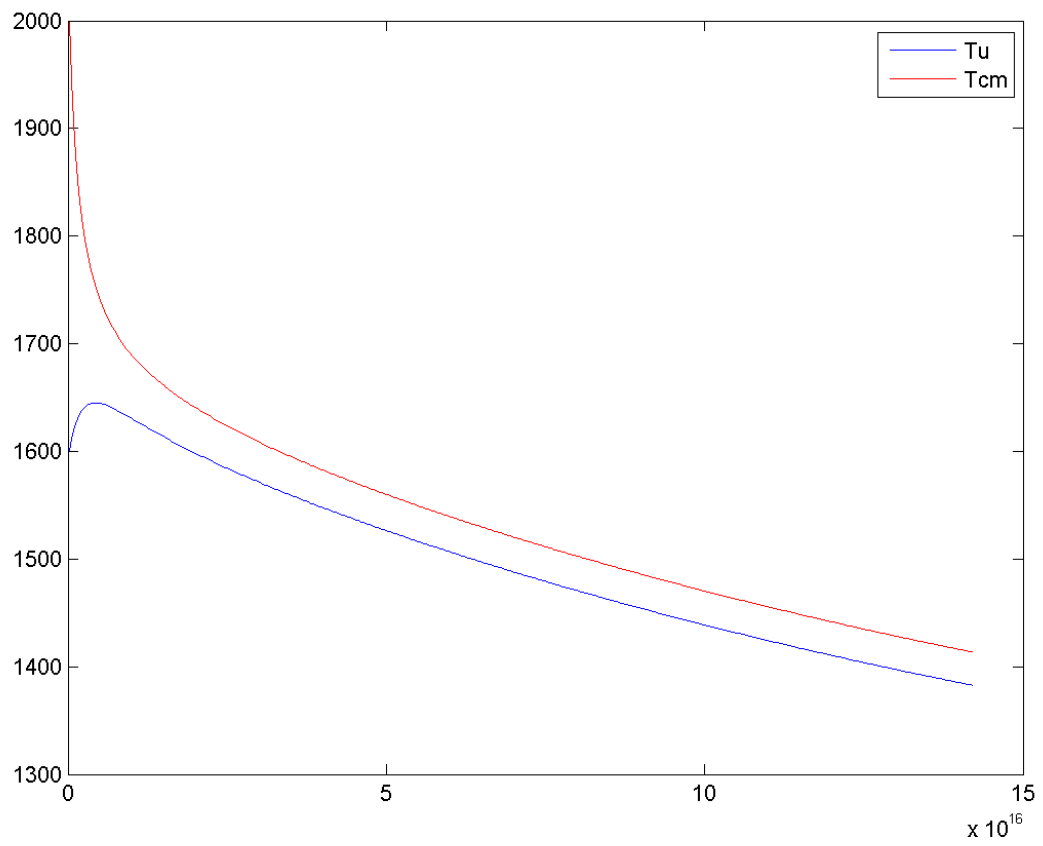


FIGURE 14 – Évolution des températures T_u et T_{cm} à viscosité fixe : $\mu(0) = 10^{18} Pa.s$

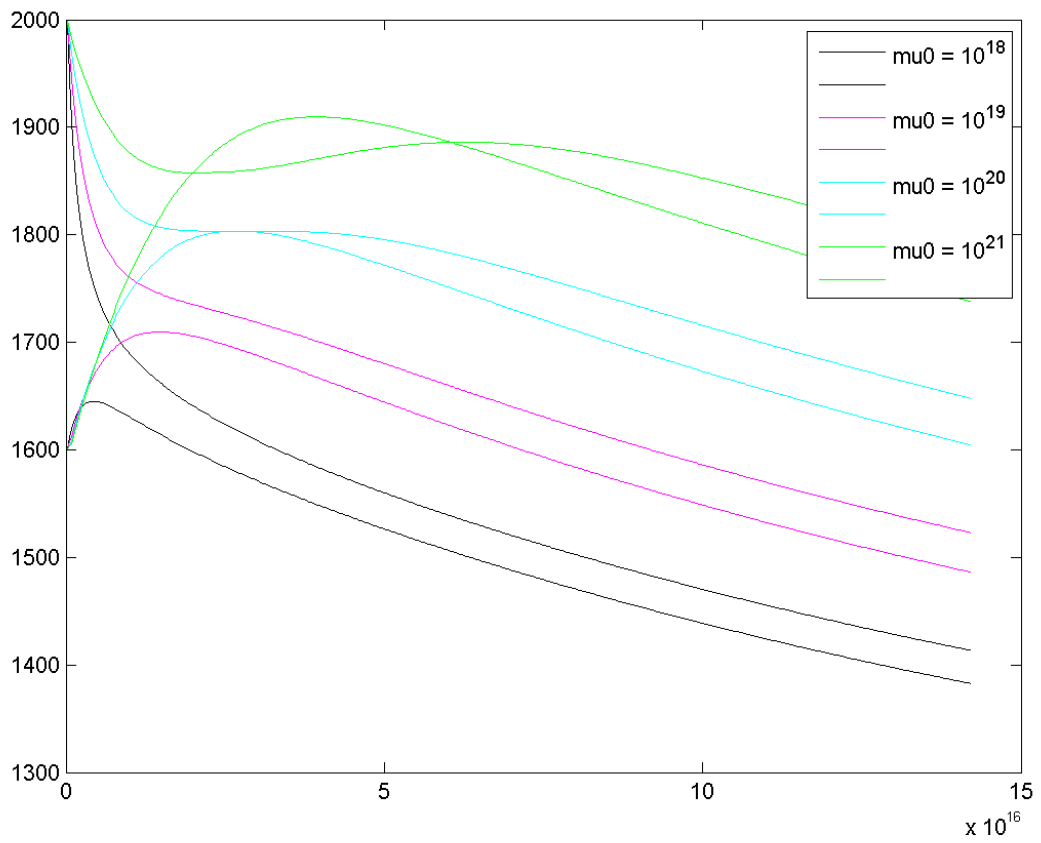


FIGURE 15 – Évolution des températures T_u et T_{cm} pour différentes valeurs de la viscosité : $\mu(0) = 10^{18}$ Pa.s, 10^{19} Pa.s, 10^{20} Pa.s, 10^{21} Pa.s avec $T_{u0} = 1600$ K et $T_{cm0} = 2000$ K.

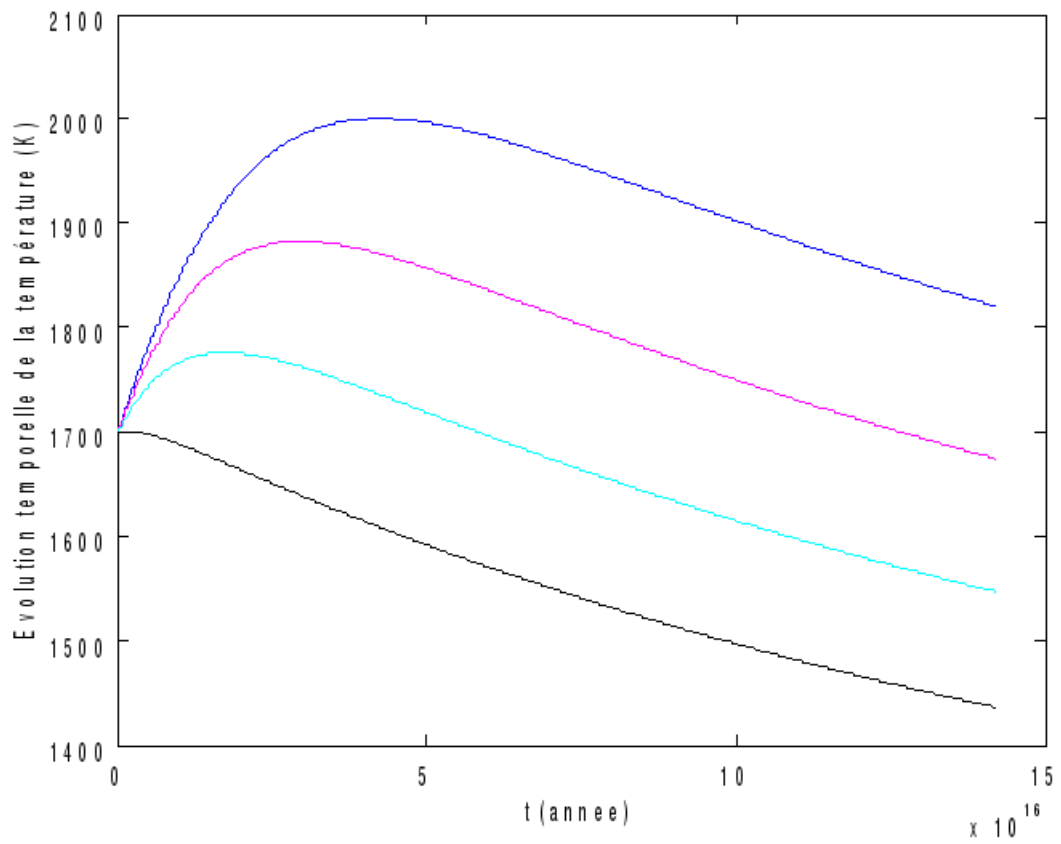


FIGURE 16 – Évolution de la températures T_u pour différentes valeurs de la viscosité : $\mu(0) = 10^{18}$ Pa.s, 10^{19} Pa.s, 10^{20} Pa.s, 10^{21} Pa.s avec $T_{u0} = 1700K$.

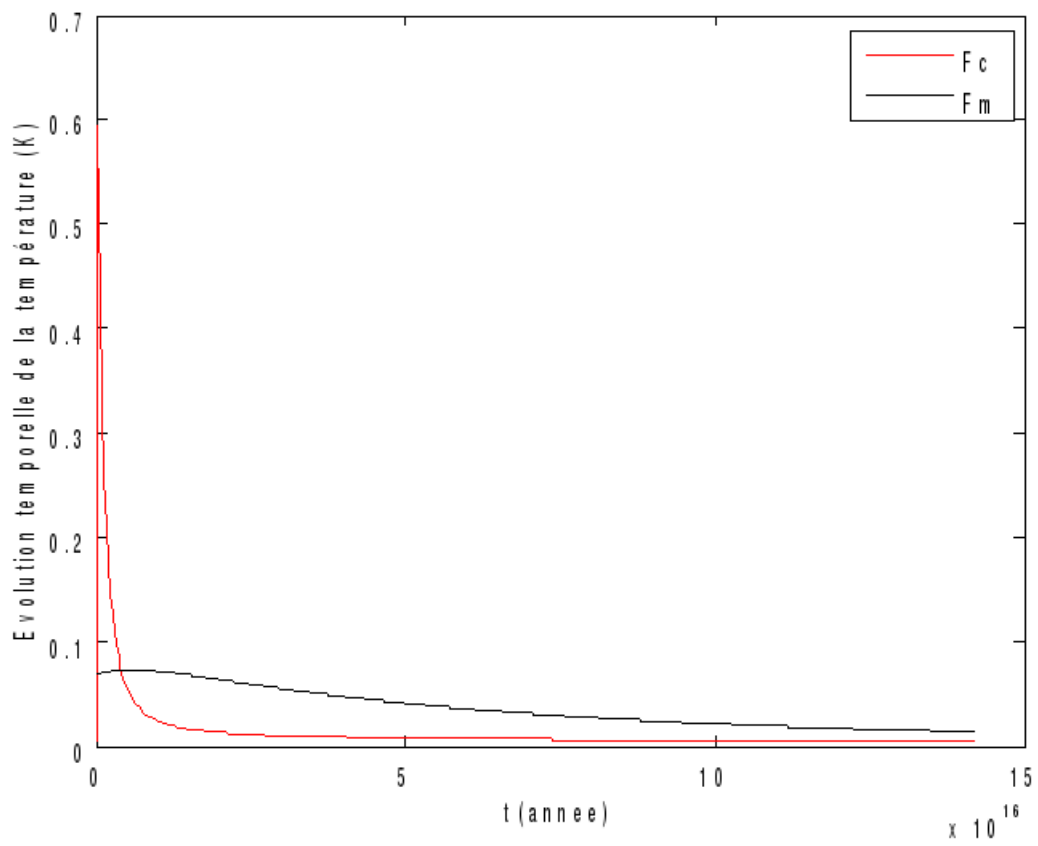


FIGURE 17 – Comparaison des flux sortant du manteau F_m et du noyau F_c

4 Perspectives

Modèle 3D

L'étude de la convection à l'intérieur des planètes implique d'utiliser des modèles adaptés à la géométrie sphérique. Une nouvelle technique, appelée « cubed sphere » a été développée par Ronchi et al (Madelaine 2009) ; elle consiste en la projection d'un cube sur la sphère circonscrite, menant à une décomposition en six régions identiques. Dans le code utilisé, chaque région est ensuite décomposée en un maillage de $32 \times 32 \times 32$ (compte tenu de la durée du stage), mais en pratique, un maillage de $64 \times 64 \times 64$ serait plus adapté.

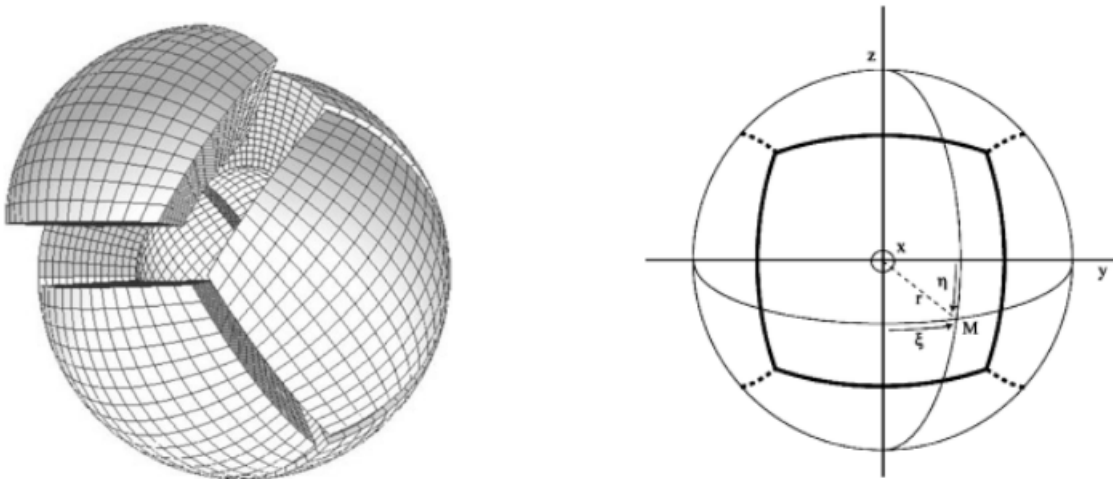


FIGURE 18 – Modélisation de la sphère par approche de la sphère cubique (Ronchi, 1996 ; Choblet, 2005).

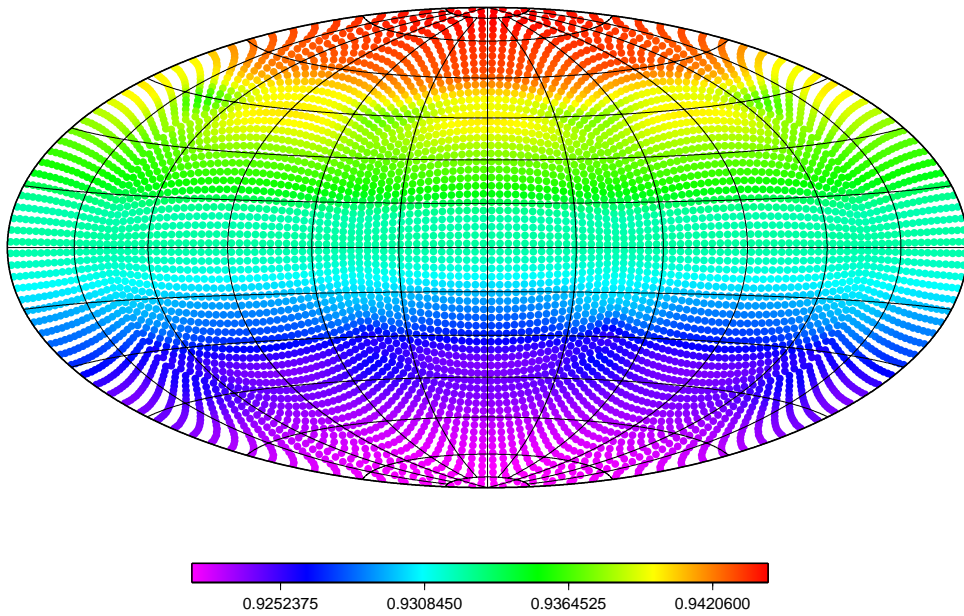


FIGURE 19 – Visualisation graphique obtenue avec gmt.

A Codes MatLab

```
p = 0:1:7;
Katz = -5.1.*p.*p + 132.9.*p + 1085.7;
hold on
plot(Katz,p,'r')
Hirschmann = -5.104.*p.*p + 132.899.*p + 1120.661;
hold on
plot(Hirschmann,p,'b')
Herzberg = 1086 - 5.7*p + 390*log(p);
hold on
plot(Herzberg,p,'g')
Takahashi = 1409 + 134.2.*p - 6.581.*p.*p + 0.1054.*p.*p.*p;
hold on
plot(Takahashi,p,'y')
legend('Katz','Hirschmann ','Herzberg','Takahashi');
xlabel('T (K)');
ylabel('P (GPa)');
```

FIGURE 20 – Code MatLab fournissant les courbes de solidus.

```

function [ ] = noyau( Tu0,Tcm0,mu0 )

% données
Rp = 3390000;
Rc = 1550000;
E = 300000;
R = 8.134;
alpha_m = 2*10^-5;
kappa_m = 1*10^-6;
g = 3.7;
km = 4;
Ts = 220;
rho_m = 3500;
cm = 1142;
Vm = 1.48*10^20;

% pas de temps
sec_par_an = 365.25*3600*24;
tf = 4500000000*sec_par_an;
dt = 10000000*sec_par_an;
nbpoints= tf/dt;

% initialisations
Nu = zeros(1,nbpoints+1); mu = zeros(1,nbpoints+1); Fm =
zeros(1,nbpoints+1); theta = zeros(1,nbpoints+1);
H = zeros(1,nbpoints+1); Rai = zeros(1,nbpoints+1); Tu =
zeros(1,nbpoints+1); t = zeros(1,nbpoints+1);
%Tu0 = 1600;
Tu(1) = Tu0;
%mu(1) = 10^21;
mu(1) = mu0;
Rai(1) = 1.26*10^10; theta(1) = 19.45;
Nu(1) = 23.57; Fm(1) = 0.07; H(1) = 1.2127*10^13; t(1) = 0;
A = mu(1)/(exp(E/(Tu0*R)));

% production de chaleur H
Masse_initiale_238U = 1.03*10^16; Masse_initiale_235U = 3.13*10^15;
Masse_initiale_232Th = 3.24*10^16; Masse_initiale_40K = 2.88*10^17;
M1 = Masse_initiale_238U; M2 = Masse_initiale_235U;
M3 = Masse_initiale_232Th; M4 = Masse_initiale_40K;
lambda1 = 1.554*10^-10; lambda2 = 9.846*10^-10; lambda3 = 4.95*10^-9;
lambda4 = 5.501*10^-10;

% initialisations
Rai_cl = zeros(1,nbpoints+1); Rl = zeros(1,nbpoints+1); Fc =
zeros(1,nbpoints+1);
delta_u = zeros(1,nbpoints+1); delta_c = zeros(1,nbpoints+1);
Tb = zeros(1,nbpoints+1); Tcm = zeros(1,nbpoints+1); t =
zeros(1,nbpoints+1);
%Tcm0 = 2200;
Tcm(1) = Tcm0;
delta_u(1) = 3.07*10^5;
delta_c(1) = 2.06*10^5;
Rl(1) = 3.083*10^6;
Tb(1) = 1780;
Rai_cl(1) = 26.5;
Fc(1) = 0.00426;
rho_c = 7200;
c_c = 840;
eta_c = 1.1;

% calculs
for k=1:nbpoints
t(k+1) = t(k) + dt;
m1(k+1) = M1*exp(-lambda1*t(k+1)/sec_par_an); m2(k+1) = M2*exp(-
lambda2*t(k+1)/sec_par_an);
m3(k+1) = M3*exp(-lambda3*t(k+1)/sec_par_an); m4(k+1) = M4*exp(-
lambda4*t(k+1)/sec_par_an);
h = [9.17*10^-5, 5.75*10^-4, 2.56*10^-5, 2.97*10^-5];

```

```

% Masses initiales des isotopes radioactifs (concentration (ppm) * 10^-6 * Masse
Mars * abondance naturelle)
Masse_initiale_238U = 1.03*10^16;
Masse_initiale_235U = 3.13*10^15;
Masse_initiale_232Th = 3.24*10^16;
Masse_initiale_40K = 2.88*10^17;
M1 = Masse_initiale_238U;
M2 = Masse_initiale_235U;
M3 = Masse_initiale_232Th;
M4 = Masse_initiale_40K;
% constantes radioactives ( ln2 / demie-vie)
lambda1 = 1.554*10^-10;
lambda2 = 9.846*10^-10;
lambda3 = 4.95*10^-9;
lambda4 = 5.501*10^-10;
sec_par_an = 365.25*3600*24;
t = 0:10000*sec_par_an:4500000000*sec_par_an;
% diminution de la masse des isotopes au cours du temps due à la désintégration
radioactive
m1 = M1*exp(-lambda1*t/sec_par_an);
m2 = M2*exp(-lambda2*t/sec_par_an);
m3 = M3*exp(-lambda3*t/sec_par_an);
m4 = M4*exp(-lambda4*t/sec_par_an);
% production de chaleur par unité de masse de chaque isotope
h = [9.17*10^-5, 5.75*10^-4, 2.56*10^-5, 2.97*10^-5];
% production de chaleur de chaque isotope
H1 = m1*h(1);
H2 = m2*h(2);
H3 = m3*h(3);
H4 = m4*h(4);
% production de chaleur totale
H = H1+H2+H3+H4;
plot (t/sec_par_an,H1,'y')
hold on
plot (t/sec_par_an,H2,'g')
hold on
plot (t/sec_par_an,H3,'k')
hold on
plot (t/sec_par_an,H4,'b')
hold on
plot (t/sec_par_an,H,'r')
hold on
legend('238U', '235U', '232Th', '40K', 'total');
xlabel('t (annee)');
ylabel('Production de chaleur (W)');

```

FIGURE 21 – Code MatLab donnant la décroissance de la production de chaleur par les éléments radioactifs.

```

H1(k+1) = m1(k+1) *h(1); H2(k+1) = m2(k+1) *h(2); H3(k+1) = m3(k+1) *h(3);
H4(k+1) = m4(k+1) *h(4); H(k+1) = H1(k+1) +H2(k+1) +H3(k+1) +H4(k+1) ;
% calcul de la température Tu par la méthode d'Euler
Tu(k+1) = Tu(k) + dt*(H(k)-4*pi*(Rp^2*Fm(k)-Rc^2*Fc(k)))/(Vm*rho_m*cm);
mu(k+1) = A*exp(E/(R*Tu(k)));
Rai(k+1) = (alpha_m*rho_m*g*(Tu(k)-Ts)*(Rp^3-Rc^3))/(kappa_m*mu(k));
theta(k+1) = E*(Tu(k)-Ts)/(R*Tu(k)^2);
Nu(k+1) = 0.53*theta(k)^(-4/3)*Rai(k)^(1/3);
Fm(k+1) = km*Nu(k)*(Tu(k)-Ts)/(Rp-Rc);
% prise en compte du noyau
Tcm(k+1) = Tcm(k) - dt*3*Fc(k)/(Rc*rho_c*c_c*eta_c);
delta_u(k+1) = km*(Tu(k+1)-Ts)/Fm(k+1);
Rl(k+1) = Rp-delta_u(k+1);
Tb(k+1) = Tu(k+1) + alpha_m*g*Tu(k+1)*(Rl(k+1)-Rc-delta_u(k+1)-
delta_c(k+1))/cm;
Rai_cl(k+1) = 0.28*(alpha_m*rho_m*g*(Rp-Rc)^3*(Tu(k+1)-Ts+Tcm(k+1)-
Tb(k+1))/(kappa_m*mu(k+1)))^0.21;
mu_moyen(k+1) = A*exp(E/(R*((Tcm(k+1)+Tb(k+1))/2)));
delta_c(k+1) = ((kappa_m*mu_moyen(k+1)*Rai_cl(k+1))/
(alpha_m*rho_m*g*(Tcm(k+1)-Tb(k+1))))^(1/3);
Fc(k+1) = km*(Tcm(k+1)-Tu(k+1))/delta_c(k+1);
end

%subplot(221)
plot(t/sec_par_an,Tu)
hold on
plot(t/sec_par_an,Tcm,'b')
hold on
legend('Tu')
xlabel('t (annee)');
title(['Temperature (K)'])

subplot(222)
plot(t/sec_par_an,Fm)
hold on
plot(t/sec_par_an,Fc,'r')
xlabel('t (annee)');
title(['Flux de chaleur (W.m^-2)'])
legend('Fm','Fc')

subplot(223)
plot(t/sec_par_an,delta_u)
hold on
xlabel('t (annee)');
title(['Epaisseur de la couche limite chaude (m)'])

end

```

FIGURE 22 – Code MatLab fournissant l'évolution temporelle de la température, en ne tenant compte que du chauffage radiogénique.

```

function [ ] = noyau( Tu0,Tcm0,mu0 )

% données
Rp = 3390000;
Rc = 1550000;
E = 300000;
R = 8.134;
alpha_m = 2*10^-5;
kappa_m = 1*10^-6;
g = 3.7;
km = 4;
Ts = 220;
rho_m = 3500;
cm = 1142;
Vm = 1.48*10^20;

% pas de temps
sec_par_an = 365.25*3600*24;
tf = 4500000000*sec_par_an;
dt = 10000000*sec_par_an;
nbpnts= tf/dt;

% initialisations
Nu = zeros(1,nbpnts+1); mu = zeros(1,nbpnts+1); Fm =
zeros(1,nbpnts+1); theta = zeros(1,nbpnts+1);
H = zeros(1,nbpnts+1); Rai = zeros(1,nbpnts+1); Tu =
zeros(1,nbpnts+1); t = zeros(1,nbpnts+1);
%Tu0 = 1600;
Tu(1) = Tu0;
%mu(1) = 10^21;
mu(1) = mu0;
Rai(1) = 1.26*10^10; theta(1) = 19.45;
Nu(1) = 23.57; Fm(1) = 0.07; H(1) = 1.2127*10^13; t(1) = 0;
A = mu(1)/(exp(E/(Tu0*R)));

% production de chaleur H
Masse_initiale_238U = 1.03*10^16; Masse_initiale_235U = 3.13*10^15;
Masse_initiale_232Th = 3.24*10^16; Masse_initiale_40K = 2.88*10^17;
M1 = Masse_initiale_238U; M2 = Masse_initiale_235U;
M3 = Masse_initiale_232Th; M4 = Masse_initiale_40K;
lambda1 = 1.554*10^-10; lambda2 = 9.846*10^-10; lambda3 = 4.95*10^-9;
lambda4 = 5.501*10^-10;

% initialisations
Rai_cl = zeros(1,nbpnts+1); Rl = zeros(1,nbpnts+1); Fc =
zeros(1,nbpnts+1);
delta_u = zeros(1,nbpnts+1); delta_c = zeros(1,nbpnts+1);
Tb = zeros(1,nbpnts+1); Tcm = zeros(1,nbpnts+1); t =
zeros(1,nbpnts+1);
%Tcm0 = 2200;
Tcm(1) = Tcm0;
delta_u(1) = 3.07*10^5;
delta_c(1) = 2.06*10^5;
Rl(1) = 3.083*10^6;
Tb(1) = 1780;
Rai_cl(1) = 26.5;
Fc(1) = 0.00426;
rho_c = 7200;
c_c = 840;
eta_c = 1.1;

% calculs
for k=1:nbpnts
t(k+1) = t(k) + dt;
m1(k+1) = M1*exp(-lambda1*t(k+1)/sec_par_an); m2(k+1) = M2*exp(-
lambda2*t(k+1)/sec_par_an);
m3(k+1) = M3*exp(-lambda3*t(k+1)/sec_par_an); m4(k+1) = M4*exp(-
lambda4*t(k+1)/sec_par_an);
h = [9.17*10^-5, 5.75*10^-4, 2.56*10^-5, 2.97*10^-5];

```

FIGURE 23 – Code MatLab fournissant l'évolution temporelle de la température, en tenant compte du chauffage radiogénique et du noyau.