Suites numériques

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Rappels

1. notation

- E^F : ensemble des applications de F dans E
  l.c.i dans E $\Rightarrow$ l.c.i dans E^F
  $\operatorname{card}(E^F) = (\operatorname{card} E)^{\operatorname{card} F}$
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$ / des suites d'éléments de $\mathbb{K}$

  $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $u : \begin{vmatrix} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \\ n \longmapsto u(n) \end{vmatrix}$

2. opérations

$(u,v) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$

- $+$ $u+v : \begin{vmatrix} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \\ n \longmapsto u(n)+v(n) \end{vmatrix}$ (opération)
- $\cdot$ $\lambda u : \begin{vmatrix} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \\ n \longmapsto \lambda u(n) \end{vmatrix}$ (multiplication externe)
- $\times$ $u.v : \begin{vmatrix} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \\ n \longmapsto u(n)v(n) \end{vmatrix}$ (multiplication interne)

3. structures

- suite nulle : neutre pour $+$
  suite constante de valeur 1 : neutre pour $\times$
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une algèbre commutative :
  1) $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev
  2) $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ anneau commutatif
  3) élément neutre
  4) $\begin{vmatrix} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u,v) \longmapsto u.v \end{vmatrix}$ bilinéaire*

* $(\alpha u + \beta u').v = \alpha(u.v) + \beta(u'.v)$

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, u inversible $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$
u diviseur de zéro $\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N} / u_n = 0$

4. suites bornées

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, u bornée si $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

5. convergence

propriétés :
* unicité de la limite
* propriétés algébriques (sommes, produits)
* ensemble des suites convergentes ss-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
* $\begin{vmatrix} \text{ensemble des suites convergentes} \longrightarrow \mathbb{K} \\ u \longmapsto \lim u \end{vmatrix}$ morphisme d'algèbres
* u convergente $\Rightarrow$ u bornée

II Suites extraites

$(u,v) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$, v suite extraite de u $\Leftrightarrow$ $\exists\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st^t $\nearrow$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$

(φ est une suite extractrice)

rem : $v = u \circ \varphi$ $\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ suite extraite $v_n = u_{2n}$

Pp 1) φ extractrice $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$

réc :
- $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$
- supposons $\varphi(n) \geq n$ pour $n \in \mathbb{N}$,
  $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ car $\varphi \nearrow$ st^t et $\varphi(n) \geq n$
  donc $\varphi(n+1) > n$ $\Leftrightarrow$ $\varphi(n+1) \geq n+1$

Pp 2) $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{K}$, Si u converge vers ℓ, alors toute suite extraite converge vers ℓ

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$
$v = u \circ \varphi$ avec φ extractrice
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \varphi(n) \geq \varphi(n_0) \geq n_0$

$\Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |v_n - \ell| < \varepsilon$

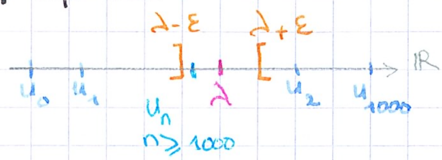
corollaire : (contraposition)
$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, s'il existe v, w extraites de u qui convergent, avec $\lim v \neq \lim w$
alors u diverge

Pp 3) $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\begin{cases} v \text{ extraite de } u \text{ d'extractrice } \varphi & : v = u_\varphi = u \circ \varphi \\ w \text{ .... } v \text{ .... } \psi & : w = v_\psi = v \circ \psi \end{cases}$
w extraite de u d'extractrice $\varphi \circ \psi$: $w = (u \circ \varphi) \circ \psi = u \circ (\varphi \circ \psi) = v \circ \psi$

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{K}$
λ valeur d'adhérence de u $\Leftrightarrow$ il existe une suite extraite de u qui converge vers λ

Pp 1) si u converge vers ℓ, alors ℓ est l'unique valeur d'adhérence
⚠ pas de réciproque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = [1 + (-1)^n] n \rightarrow 0, 0, 4, 0, 8, 12, 0, 16, 0 \ldots$

Pp équivalente

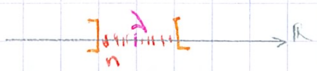


λ valeur d'adhérence de u
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / m \geq n$ et $|u_m - \lambda| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ on suppose λ valeur d'adhérence de u
soit φ extractrice / $u \circ \varphi$ converge vers λ :
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \lambda| < \varepsilon$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $m = \max\{\varphi(n), \varphi(n_0)\} \in \mathbb{N}$
$m \geq \varphi(n) \geq n$
$\begin{cases} \text{si } m = \varphi(n_0), & |u_m - \lambda| < \varepsilon \\ \text{si } m = \varphi(n) \geq \varphi(n_0), & |u_m - \lambda| < \varepsilon \\ (n \geq n_0) & \end{cases}$ car $n_0 \geq n_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n_0)} - \lambda| < \varepsilon$; $n \geq n_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \lambda| < \varepsilon$

$\Leftarrow$ on suppose : $\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / m \geq n$ et $|u_m - \lambda| < \varepsilon$
$\varepsilon = 1, n = 0$, $\exists m \in \mathbb{N} / m \geq 0$ et $|u_m - \lambda| < 1$
on pose $\varphi(0) = m$ donc $|u_{\varphi(0)} - \lambda| < 1$
$\varepsilon = \frac{1}{2}, n = \varphi(0) + 1$, $\exists m \in \mathbb{N} / m \geq \varphi(0) + 1$ et $|u_m - \lambda| < \frac{1}{2}$
on pose $\varphi(1) = m$ donc $|u_{\varphi(1)} - \lambda| < \frac{1}{2}$
$\varepsilon = \frac{1}{4}, n = \varphi(1) + 1$ ......
on a donc $\begin{cases} \varphi(k+1) > \varphi(k) \\ |u_{\varphi(k)} - \lambda| < \frac{1}{2^k} \end{cases}$

Pp équivalente λ valeur d'adhérence de u $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} / |u_n - \lambda| < \varepsilon\}$ est infini



$\Rightarrow$ on suppose λ valeur d'adhérence
φ extractrice : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \lambda| < \varepsilon$
alors $\{\varphi(n) / n \geq n_0\}$ est $\begin{cases} \text{infini} \\ \text{inclus dans } \{n \in \mathbb{N} / |u_n - \lambda| < \varepsilon\} \end{cases}$
donc $\{n \in \mathbb{N} / |u_n - \lambda| < \varepsilon\}$ est infini

$\Leftarrow$ on suppose : $\forall \varepsilon > 0$, $\{m \in \mathbb{N} / |u_m - \lambda| < \varepsilon\}$ est infini
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\{m \in \mathbb{N} / |u_m - \lambda| < \varepsilon\} \cap \{m \in \mathbb{N} / m \geq n\}$ est infini
soit m_0 dans cet ensemble,
alors $\begin{cases} m_0 \geq n \\ |u_{m_0} - \lambda| < \varepsilon \end{cases}$

III Suites réelles

1. suites monotones

th de la limite monotone (toute suite ↗ et majorée converge ....)

2. suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Pp 1) I un intervalle, si $\begin{cases} f(I) \subset I \\ u_0 \in I \end{cases}$ alors $\begin{cases} u \text{ est bien définie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I \end{cases}$

Pp 2) .... et si f ↗ sur I alors u est monotone
$\begin{cases} \nearrow \text{ si } f(u_0) - u_0 \geq 0 \\ \searrow \text{ si } f(u_0) - u_0 \leq 0 \end{cases}$ car $u_1 - u_0 \geq 0$

Pp 3) .... et si f ↘ sur I alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et

$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de monotonie opposée

Pp 2) 1er cas : $f(u_0) \geq u_0$, $f \nearrow$
donc $u_1 \geq u_0 \Rightarrow f(u_1) \geq f(u_0) \Leftrightarrow u_2 \geq u_1 \rightarrow f(u_2) \geq f(u_1)$

Pp 3) • $f(I) \subset I$,
$(f\circ f)(I) = f(f(I)) \subset f(I) \subset I$ donc $\begin{cases} I \text{ est stable par } f\circ f \\ f\circ f \nearrow \end{cases}$

$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = (f\circ f)(u_{2n})$

$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ suite récurrente de 1er terme u_0 définie par $f\circ f$ donc monotone

de même, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ suite récurrente de 1er terme u_1 monotone

• si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n}$ donc $f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n})$

$\Leftrightarrow u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$ donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \searrow$

Pp 4) si $\begin{cases} I \text{ intervalle fermé} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n \in I \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \end{cases}$ alors $\ell \in I$

soit I un intervalle fermé

$[a,b]$	$a \leq u_n \leq b$ passage à la limite :	$a \leq \ell \leq b$
$[a,a]$	$u_n = a$	$\ell = a$
$\emptyset$	impossible	
$\mathbb{R}$	$u_n \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$
$[a,+\infty[$	$u_n \geq a$	$\ell \geq a$
$]-\infty,a]$	$u_n \leq a$	$\ell \leq a$

Pp 5) si $\begin{cases} f(I) \subset I \\ u_0 \in I \\ \ell \in I \\ f \text{ continue en } \ell \\ u \text{ converge vers } \ell \end{cases}$ alors $f(\ell) = \ell$ (point fixe de f)

$u_{n+1} = f(u_n)$, $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f(u_n) = f(\ell) = \lim\limits_{+\infty} u_{n+1} = \ell$

Appl.

TD 1, exo 5 si $\begin{cases} I \text{ intervalle fermé} \\ f(I) \subset I \\ f \text{ continue sur } I \\ u_0 \in I \\ u \text{ converge vers } \ell \end{cases}$ alors ℓ est solution sur I de $f(\ell) = \ell$

rem : plan d'étude : — variations de f si $f \searrow$: signe de $(f\circ f)(x) - x$
— signe de $f(x) - x$ (limites éventuelles)
— intervalles stables

3. autres récurrences

linéaire (d'ordre 2) : $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ $(b \neq 0)$
affine (d'ordre 2) : $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n + v_n$

IV Suites de Cauchy réelles

$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, u suite de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(p \geq n_0$ et $q \geq n_0) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

Pps équivalentes $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \,/\, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(p > n_1$ et $q > n_1) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$
.... n_2 .... $(p \geq n_2$ et $q \geq n_2) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$
.... n_3 .... $(p > n_3$ et $q > n_3) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$
.... n_0 .... $q \geq p \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

Pp 1) Toute suite de Cauchy réelle est **bornée**

$\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(p \geq n_0$ et $q \geq n_0) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq 1$ $\quad (n_0 \geq n_0$ et $q \geq n_0)$

$\forall q \in \mathbb{N}$, $q \geq n_0 \Rightarrow |u_{n_0} - u_q| \leq 1$

* car $\big||u_{n_0}| - |u_q|\big| \leq |u_{n_0} - u_q| \leq 1$ $\quad \Rightarrow |u_q| \leq |u_{n_0}| + 1$ *

soit $K = \max\{|u_0|, \dots, |u_{n_0-1}|, |u_{n_0}| + 1\}$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} n < n_0, & |u_n| \leq K \\ n \geq n_0, & |u_n| \leq |u_{n_0}| + 1 \leq K \end{cases}$ $\quad$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq K$

Pp 2) L'ensemble des suites de Cauchy réelles est une ss-algèbre de l'algèbre des suites bornées

- la suite cste (1) est de Cauchy
- soient u, v de Cauchy, α, β réels

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(p \geq n_0$ et $q \geq n_0) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

$\quad \dots \dots n_1 \dots \dots \quad (p \geq n_1$ et $q \geq n_1) \Rightarrow |v_p - v_q| < \varepsilon$

soit $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ $\quad (p \geq n_2$ et $q \geq n_2) \Rightarrow |\alpha u_p + \beta v_p - \alpha u_q - \beta v_q| \leq |\alpha||u_p - u_q| + |\beta||v_p - v_q|$

$\leq |\alpha| \varepsilon + |\beta| \varepsilon$

donc $(\alpha u + \beta v)$ est de Cauchy $\quad \leq (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon$

- u, v de Cauchy $\Rightarrow u, v$ bornées : $\exists (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq K_1$, $|v_n| \leq K_2$

* ceux définis avant

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists (n_0, n_1, n_2^{*}) \in \mathbb{N}^3$, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$(p \geq n_2$ et $q \geq n_2) \Rightarrow |u_p v_p - u_q v_q| = |u_p v_p - u_q v_p + u_q v_p - u_q v_q| \leq |v_p||u_p - u_q| + |u_q||v_p - v_q|$

$\leq K_2 \varepsilon + K_1 \varepsilon \leq (K_1 + K_2) \varepsilon$

donc (uv) est de Cauchy

Pp 3) Toute suite réelle convergente est de Cauchy

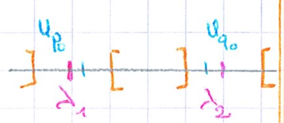
$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $\lim u = \ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p \geq n_0 \Rightarrow |u_p - \ell| < \varepsilon$

$q \geq n_0 \Rightarrow |u_q - \ell| < \varepsilon$

donc $|u_p - u_q| = |u_p - \ell - (u_q - \ell)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Pp 4) Toute suite de Cauchy a au plus 1 valeur d'adhérence



$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de Cauchy, λ_1 et λ_2 valeurs d'adhérence de u :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(p \geq n_0$ et $q \geq n_0) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

$\exists p_0 \in \mathbb{N} \,/\, p_0 \geq n_0$ et $|u_{p_0} - \lambda_1| < \varepsilon$

$\exists q_0 \in \mathbb{N} \,/\, q_0 \geq n_0$ et $|u_{q_0} - \lambda_2| < \varepsilon$

$\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_1 - u_{p_0} + u_{p_0} - u_{q_0} + u_{q_0} - \lambda_2$

$|\lambda_1 - \lambda_2| \leq |\lambda_1 - u_{p_0}| + |u_{p_0} - u_{q_0}| + |\lambda_2 - u_{q_0}| \leq 3\varepsilon$ $\quad$ donc $\lambda_1 = \lambda_2$

Pp 5) Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge (vers cette valeur d'adhérence)

$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(p \geq n_0$ et $q \geq n_0) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

λ valeur d'adhérence : $\exists p_0 \in \mathbb{N} \,/\, p_0 \geq n_0$ et $|u_{p_0} - \lambda| < \varepsilon$

donc $\forall q \in \mathbb{N}$, $q \geq p_0 \geq n_0 \Rightarrow |u_q - \lambda| = |u_q - u_{p_0} + u_{p_0} - \lambda| \leq |u_q - u_{p_0}| + |u_{p_0} - \lambda| \leq 2\varepsilon$

$q \geq n_0$ et $p_0 \geq n_0$

V Propriétés fondamentales

1. Toute partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ a une borne sup (appartenant ou non à la partie)
2. conséq. : Toute suite croissante majorée converge

$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \nearrow$ majorée, $\exists K \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq K$

$\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = A$ partie non vide $(u_0 \in A)$ de $\mathbb{R}$

$\mu = \sup A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in A \,/\, \mu - \varepsilon < x \leq \mu$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \mu - \varepsilon < u_{n_0} \leq \mu$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow \mu - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq \mu \Rightarrow |u_n - \mu| < \varepsilon$

Toute suite monotone de $\overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$

3. suites adjacentes

$(u,v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$, si $\begin{cases} u \nearrow \\ v \searrow \\ v-u \text{ converge vers } 0 \end{cases}$ alors u, v $\begin{cases} \text{sont adjacentes} \\ \text{convergent vers la même limite } \ell \end{cases}$

de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$ donc u_n est une valeur approchée de ℓ à $v_n - u_n$ près
$\frac{u_n + v_n}{2}$ .... $\frac{v_n - u_n}{2}$ ....

$3 < \pi < 4$ $\quad u_0 = 3$
$3,1 < \pi < 3,2$ $\quad u_1 = 3,1$
$3,14 < \pi < 3,15$ $\quad u_2 = 3,14$

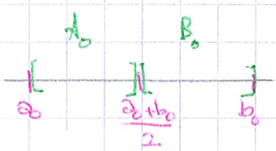
4. théorème des segments emboités

$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de segments emboités ($I_{n+1} \subset I_n$) dont le diamètre tend vers 0, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton

$I_n = [u_n, v_n]$, $I_{n+1} \subset I_n \Rightarrow u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \Rightarrow u \nearrow, v \searrow$
$\lim (v-u) = 0$
donc u et v sont adjacentes et convergent vers ℓ
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell \in I_n$ donc $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$
soit $\ell' \neq \ell$
$\ell' \notin I_{n_0}$ donc $\ell' \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ d'où $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$

5. théorème de Bolzano Weierstrass (réel)

Toute suite réelle bornée a au moins 1 valeur d'adhérence



u suite réelle bornée : $\exists (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}$, $a_0 \leq u_n \leq b_0$
soient $A_0 = \left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$, $B_0 = \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$

$\alpha_0 = \{n / n \in \mathbb{N}, u_n \in A_0\}$ et $\beta_0 = \{n / n \in \mathbb{N}, u_n \in B_0\}$ $\quad \alpha_0 \cup \beta_0 = \mathbb{N}$
α_0 ou β_0 est infini, si α_0 est infini, on pose $\begin{cases} a_1 = a_0 \\ b_1 = \frac{a_0+b_0}{2} \end{cases}$

alors $\{n / n \in \mathbb{N}, u_n \in [a_1, b_1]\}$ est infini
on pose $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(1) = \inf\{n / n > 0 \text{ et } u_n \in [a_1, b_1]\} \end{cases}$
$A_1 = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $B_1 = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$

$\alpha_1 = \{n / n \in \mathbb{N}, n > \varphi(1), u_n \in A_1\}$ et $\beta_1 = \{n / n \in \mathbb{N}, n > \varphi(1), u_n \in B_1\}$
α_1 ou β_1 est infini car $\alpha_1 \cup \beta_1 = \varphi(1)$
si α_1 est infini on pose $\begin{cases} a_2 = a_1 \\ b_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \end{cases}$
alors $\{n / n \in \mathbb{N}, n > \varphi(1), u_n \in [a_2, b_2]\}$ est infini
on pose $\varphi(2) = \inf\{n \in \mathbb{N}, n > \varphi(1), u_n \in [a_2, b_2]\}$
donc $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ sont emboités donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$

or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ donc $\lim_{+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$

6. théorème

Toute suite de Cauchy réelle converge

u de Cauchy réelle $\Rightarrow u$ bornée $\Rightarrow u$ a au moins 1 valeur d'adhérence
$\Rightarrow u$ a au plus 1 valeur d'adhérence
donc u a 1 unique valeur d'adhérence et converge vers celle-ci

VI. Applications des suites de Cauchy

1. caractérisation séquentielle des limites

f définie sur $[a, b[$
f admet la limite ℓ en b $\Leftrightarrow$ pour toute suite u d'éléments de $[a, b[$
si $\lim_{+\infty} u_n = b$ alors $\lim_{+\infty} f(u_n) = \ell$

2. Théorèmes

1 $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, f a une limite finie en b $(b \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ pour toute suite u d'éléments de $[a,b[$ / $\lim u = b$, (car u converge) la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

2 $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, f a une limite finie en b $(b\in\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 /$
$\forall (x,x') \in [a,b[^2, (|x-b| < \alpha \text{ et } |x'-b| < \alpha) \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ si f a une limite finie en b
$\lim_{x\to b} f(x) = \ell$ $\quad |f(x)-f(x')| \leqslant |f(x)-\ell| + |f(x')-\ell| \leqslant 2\varepsilon$

$\Leftarrow$ soit u une suite d'éléments de $[a,b[$ qui converge vers b
$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha > 0 / \forall (x,x') \in [a,b[^2, (|x-b| < \alpha \text{ et } |x'-b| < \alpha) \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \varepsilon$
$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - b| < \alpha$
$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p \geqslant n_0 \text{ et } q \geqslant n_0) \Rightarrow (|u_p - b| < \alpha \text{ et } |u_q - b| < \alpha) \Rightarrow |f(u_p) - f(u_q)| < \varepsilon$

3 $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, f a une limite finie en $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall (x,x') \in [a,+\infty[^2$,
$(x \geqslant A \text{ et } x' \geqslant A) \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \varepsilon$

3. exemples

* $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue $\qquad g : \begin{vmatrix} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |f(x)| \end{vmatrix}$ est continue, positive

$G : \begin{vmatrix} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^x g(t)\,dt \end{vmatrix}$ est continue, positive, dérivable, croissante. $(G'(x) = g(x) \geqslant 0)$

si G est majorée, G admet une limite en $+\infty$ et
$F : \begin{vmatrix} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt \end{vmatrix}$ admet une limite en $+\infty$ *

dans ce cas f est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt$

$\lim_{x\to+\infty} G(x) = L \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in [0,+\infty[, x \geqslant A \Rightarrow |G(x) - L| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon>0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall (x,x') \in [0,+\infty[^2, (x \geqslant A \text{ et } x' \geqslant A) \Rightarrow |G(x)-L| < \varepsilon \text{ et } |G(x')-L| < \varepsilon$
$\Rightarrow |F(x) - F(x')| = \left| \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{x'} f(t)\,dt \right|$

on ignore si $x < x'$ ou $x > x'$

$\Rightarrow |F(x) - F(x')| = \left|\int_{x'}^x f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x'}^x |f(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{x'} f(t)\,dt\right| \leqslant G(x) - G(x')$
$\leqslant |G(x) - L| + |L - G(x')| \leqslant 2\varepsilon$

* $f : \begin{vmatrix} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin x}{1+x^2} \end{vmatrix}$ $\quad f$ est continue sur $[0,+\infty[$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $|f(x)| = \frac{|\sin x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$

donc $\forall x \geqslant 0$, $\int_0^x |f(t)|\,dt \leqslant \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x - \arctan 0 \leqslant \frac{\pi}{2}$

donc f est intégrable sur $[0,+\infty[$ $\quad \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx \right)$

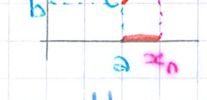
rem : idem sur $[a,b[$ $(b\in\mathbb{R})$: $f : \begin{vmatrix}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin 1/x}{\sqrt{x}} \end{vmatrix}$ est intégrable

VII Suites complexes

1. convergence

$u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_n = \mathrm{Re}(u_n) \\ y_n = \mathrm{Im}(u_n) \end{cases}$ $\quad u_n = x_n + i y_n$, $\quad \ell \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} a = \mathrm{Re}(\ell) \\ b = \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$ $\quad \ell = a + ib$

$|x_n - a| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \sqrt{2}\max\{|x_n - a|, |y_n - b|\}$
$|y_n - b| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \sqrt{2}\max\{|x_n - a|, |y_n - b|\}$



car $|x_n - a|^2 + |y_n - b|^2 = |u_n - \ell|^2$
$|u_n - \ell|^2 \leqslant 2\max\{|x_n - a|^2, |y_n - b|^2\}$

u converge vers ℓ $\Leftrightarrow$ x converge vers a et y vers b

$\Rightarrow$ si f a une limite finie en b
$\lim_{x \to b} f(x) = \ell$ $\quad |f(x) - f(x')| \leq |f(x) - \ell| + |f(x') - \ell| \leq 2\varepsilon$

$\Leftarrow$ soit u une suite d'éléments de $[a, b[$ qui converge vers b
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \,/\, \forall (x, x') \in [a, b[^2, \; (|x - b| < \alpha$ et $|x' - b| < \alpha) \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$
$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - b| < \alpha$
$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \; (p \geq n_0$ et $q \geq n_0) \Rightarrow (|u_p - b| < \alpha$ et $|u_q - b| < \alpha) \Rightarrow |f(u_p) - f(u_q)| < \varepsilon$

3 $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, f a une limite finie en $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \,/\, \forall (x, x') \in [a, +\infty[^2$,
$(x \geq A$ et $x' \geq A) \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

3. exemples

* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue $\quad g : \begin{vmatrix} [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto |f(x)| \end{vmatrix}$ est continue, positive

$G : \begin{vmatrix} [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x g(t)\,dt \end{vmatrix}$ est continue, positive, dérivable, croissante $(G'(x) = g(x) \geq 0)$

si G est majorée, G admet une limite en $+\infty$ et
$F : \begin{vmatrix} [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt \end{vmatrix}$ admet une limite en $+\infty$

dans ce cas f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt$

$\lim_{x \to +\infty} G(x) = L \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in [0, +\infty[, \; x \geq A \Rightarrow |G(x) - L| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \,/\, \forall (x, x') \in [0, +\infty[^2, \; (x \geq A$ et $x' \geq A) \Rightarrow |G(x) - L| < \varepsilon$ et $|G(x') - L| < \varepsilon$

$\Rightarrow |F(x) - F(x')| = \left| \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{x'} f(t)\,dt \right|$

on ignore si $x < x'$ ou $x > x'$

$\Rightarrow |F(x) - F(x')| = \left| \int_{x'}^x f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_{x'}^x |f(t)|\,dt \right| \leq \left| \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{x'} f(t)\,dt \right| \leq G(x) - G(x')$
$\leq |G(x) - L| + |L - G(x')| \leq 2\varepsilon$

* $f : \begin{vmatrix} [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin x}{1 + x^2} \end{vmatrix}$ $\quad f$ est continue sur $[0, +\infty[$, $\forall x \in [0, +\infty[$, $|f(x)| = \frac{|\sin x|}{1 + x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}$

donc $\forall x \geq 0$, $\int_0^x |f(t)|\,dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan x - \arctan 0 \leq \frac{\pi}{2}$

donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$ $\quad \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1 + x^2}\,dx = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{1 + x^2}\,dx \right)$

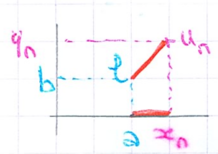
rem : idem sur $[a, b[$ $(b \in \mathbb{R})$: $f : \begin{vmatrix}]0, 1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin 1/x}{\sqrt{x}} \end{vmatrix}$ est intégrable

VII Suites complexes

1. convergence

$u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_n = \mathrm{Re}(u_n) \\ y_n = \mathrm{Im}(u_n) \end{cases}$ $\quad u_n = x_n + i y_n$, $\quad \ell \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} a = \mathrm{Re}(\ell) \\ b = \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$ $\quad \ell = a + ib$

$|x_n - a| \leq |u_n - \ell| \leq \sqrt{2} \max \{|x_n - a|, |y_n - b|\}$
$|y_n - b| \leq |u_n - \ell| \leq \sqrt{2} \max \{|x_n - a|, |y_n - b|\}$



car $|x_n - a|^2 + |y_n - b|^2 = |u_n - \ell|^2$
$|u_n - \ell|^2 \leq 2 \max \{|x_n - a|^2, |y_n - b|^2\}$

u converge vers ℓ $\Leftrightarrow$ x converge vers a et y vers b

2. Cauchy complexe

$u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, u est de Cauchy complexe $\Leftrightarrow$ x et y sont de Cauchy réelles
Toute suite de Cauchy complexe converge

3. Bolzano Weierstrass complexe

Toute suite complexe bornée a au moins 1 valeur d'adhérence
u complexe bornée $\Rightarrow x, y$ réelles bornées
$\exists \varphi$ extractrice $/ \; x \circ \varphi$ converge donc $y \circ \varphi$ est bornée
$\exists \psi$ extractrice $/ \; y \circ \varphi \circ \psi$ converge
et $x \circ \varphi \circ \psi$ est extraite de $x \circ \varphi$ donc converge
donc $y \circ \varphi \circ \psi$ et $x \circ \varphi \circ \psi$ convergent
donc $u \circ \varphi \circ \psi$ convergent