Éléments de base d'algèbre

I Éléments de logique

1) définition

Une proposition est un énoncé auquel on peut attribuer la valeur de vérité VRAIE ou FAUSSE.

$4 > 1$ est vraie

2) négation

On appelle négation de la proposition p la proposition notée $\bar{p}$ ou non p vraie ssi p est fausse.

p	non p
V	F
F	V

table de vérité de non p

3) conjonction - disjonction

Soient p, q 2 propositions

On appelle conjonction de p, q la proposition notée p et q vraie ssi p, q sont simultanément vraies.

On appelle disjonction de p, q la proposition notée p ou q vraie ssi l'une au moins des 2 est vraie.

p	q	p et q	p ou q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

$[(4>1)$ ou $(5>1000)]$ est vraie

$[(4>1)$ et $(5>1000)]$ est fausse

4) implication

Pb : p, q étant 2 propositions, construire la table de vérité de (non p) ou q.

p	q	non p	(non p) ou q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Supposons (non p) ou q vraie

si p est fausse, q peut être vraie ou fausse

.... vraie, q est vraie

Sous l'hypothèse (non p) ou q vraie, on peut affirmer :

si p est vraie, alors q est vraie :

"p vraie" implique "q vraie"

notation : (non p) ou q est notée : $p \Rightarrow q$

table de vérité de $p \Rightarrow q$

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p \Rightarrow q$ c'est (non p) ou q

rem : $p \Rightarrow q$ est fausse dans 1 seul cas, p vraie, q fausse

.... vraie dans 3 cas, en particulier, si p est fausse, $p \Rightarrow q$ est vraie que q soit vraie ou fausse.

$[(4>1) \Rightarrow (4$ pair$)]$ est vraie

$[(4>100) \Rightarrow (4$ pair$)]$ est vraie

[(4 > 100) ⇒ (5 pair)] est vraie   (F ⇒ ....) est vraie

<u>application</u> : Soit $x \in \mathbb{R}$
Mq l'implication $(x>1 \Rightarrow x^2>1)$ est vraie.

1er cas : $x>1$ est faux
l'implication est vraie

2ème cas : $x>1$ est vraie
$x^2-1 = (x-1)(x+1) > 0$ donc $x^2>1$

L'implication est donc toujours vraie.

rem : l'étude du 1er cas est inutile

rem : p : "$n \in \mathbb{N}$ est multiple de 4"
q : "$n \in \mathbb{N}$ est multiple de 2"
on a $p \Rightarrow q$
pour que "n soit 1 multiple de 4", il faut que "n soit 1 multiple de 2"
pour que "n soit 1 multiple de 2", il suffit que "n soit 1 multiple de 4"
"faut" traduit 1 condition nécessaire
"suffit" - - - - - - - - - - - - suffisante

La réciproque de $p \Rightarrow q$ est $q \Rightarrow p$

5) équivalence

Pb : Construire la table de vérité de $(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

notation : $(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow p)$ est notée $p \Leftrightarrow q$
$p \Leftrightarrow q$ est vraie ssi p, q ont même valeur de vérité

ex : $n \in \mathbb{N}$
p : "n multiple de 6"
q : "n multiple de 2 et 3"
on a $p \Leftrightarrow q$

6) quelques propriétés

Pb 1 : p, q, r sont 3 propositions.
Ecrire p ou (q et r) à l'aide de (p ou q), (p ou r).

p	q	r	q et r	p ou (q et r)	p ou q	p ou r	(p ou q) et (p ou r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

p ou (q et r) est équivalente à (p ou q) et (p ou r)
"ou" est distributif par rapport à "et"
p et (q ou r) est équivalente à (p et q) ou (p et r)
"et" est distributif par rapport à "ou".

Pb 2 : Exprimer non(p ou q) en fonction de non p, non q

p	q	p ou q	non (p ou q)	non p	non q	et (non q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

non (p ou q) est équivalente à (non p) **et** (non q)
non (p et q) .... (non p) **ou** (non q)

Pb 3 : Comparer les valeurs de vérité de $p \Rightarrow q$, $(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	non q	non p	$(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

$p \Rightarrow q$ est équivalente à $(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)$
$(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)$ est la contraposée de $p \Rightarrow q$

Pb 4 : Quelle est la négation de $p \Rightarrow q$?

$p \Rightarrow q$ est équivalente à (non p) ou q
non $(p \Rightarrow q)$ .... p et (non q)

II Quantificateurs

Soit 1 propriété $P(x)$, x appartenant à un ensemble E.
"Pour tout $x \in E$, $P(x)$ est vraie" peut s'écrire :
" $\forall x$, $x \in E$, $P(x)$ "
$\forall$ est 1 quantificateur universel
"Il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie" peut s'écrire :
" $\exists x$, $x \in E$, $P(x)$ "
$\exists$ est 1 quantificateur existentiel

Th : La négation de $\forall x$, $x \in E$, $P(x)$ est $\exists x$, $x \in E$, non $P(x)$
.... $\exists x$, $x \in E$, $P(x)$ ..... $\forall x$, $x \in E$, non $P(x)$

rem : $\forall x$, $x \in E$ se contracte en $\forall x \in E$.

Pb : Quelle est la valeur de vérité de (P) : $\forall x \in \emptyset$, $x \leq 11$?

(non P) : $\exists x \in \emptyset$, $x > 11$
(non P) est fausse donc (P) est vraie
$\emptyset$ est majorée par 11 (et aussi par 4, -35, ...)

Quelle est la valeur de vérité de (Q) : $\forall x \in \emptyset$, $x \geq 2007$?

(non Q) : $\exists x \in \emptyset$, $x < 2007$
(non Q) est fausse donc (Q) est vraie
$\emptyset$ est minorée par 2007

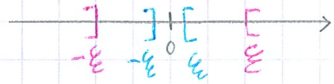
rem : $A(x,y)$ est 1 propriété dépendant de $x \in E$ et de $y \in F$
(P) : $\forall x \in E$, $\exists y \in F$, $A(x,y)$
(Q) : $\exists y \in F$, $\forall x \in E$, $A(x,y)$
si (Q) est vraie, alors (P) est vraie : $(Q) \Rightarrow (P)$

(P), (Q) ne sont pas équivalentes :
par exemple : (1) : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x$ est vraie (par exemple $y = x+1$)
(2) : $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x$ est fausse

L'ordre des quantificateurs a donc une importance.

rem : (2) $\Rightarrow$ (1) est vraie

exo : a, ε sont des réels
Etablir $[\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon] \Rightarrow a = 0$



- La contraposée de cette implication est :
  $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |a| \geq \varepsilon)$
- soit $a \neq 0$,
  posons $\varepsilon = |a|$, on a bien $\varepsilon > 0$ et $|a| \geq \varepsilon$

La contraposée est donc vraie, donc l'implication initiale aussi

III Ensembles

1) rappel

a) notations utilisées

$\emptyset$: ensemble vide
$\in$: appartenance $4 \in \mathbb{N}$
$\subset$: inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

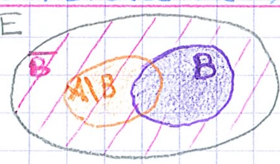
Soient A, B 2 parties d'un ensemble E.

$A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A$ et $x \in B\}$
$A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A$ ou $x \in B\}$

complémentaire de A dans E : $C_E A = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$

$C_E A$ est noté $\overline{A}$

différence de A et B :

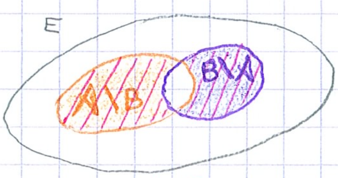


$A \setminus B = \{x \in E \,/\, x \in A$ et $x \notin B\}$

$$\boxed{A \setminus B = A \cap \overline{B}}$$

On appelle différence symétrique de A et B la partie de E, notée $A \Delta B$ définie par :

$$\boxed{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$$



$A \Delta B$

$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
$= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$

$x \in A \Delta B$ ssi x appartient à l'une des parties sans appartenir à l'autre.

ex :
$A \Delta A = \emptyset$
$A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A$
$A \Delta \overline{A} = (A \setminus \overline{A}) \cup (\overline{A} \setminus A) = A \cup \overline{A} = E$
$A \Delta E = (A \setminus E) \cup (E \setminus A) = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}$
$A \Delta B = B \Delta A$

b) quelques propriétés

A, B, C sont des parties d'1 ensemble E.

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
  $A \cap A = A$
  $A \cap \overline{A} = \emptyset$
  $A \cap E = A$
- $A \cup \emptyset = A$
  $A \cup A = A$
  $A \cup \overline{A} = E$
  $A \cup E = E$

- $A \cap B = B \cap A$ — $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B \subset A$ — $A \cap B \subset B$
- $A \subset A \cup B$ — $B \subset A \cup B$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

ou

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

dém
soit $x \in C_E(A \cup B)$ (1)
(1) $\Leftrightarrow x \notin (A \cup B)$
(1) $\Leftrightarrow$ non $(x \in A$ ou $x \in B)$
(1) $\Leftrightarrow$ non $(x \in A)$ et non $(x \in B)$
(1) $\Leftrightarrow x \notin A$ et $x \notin B$
(1) $\Leftrightarrow x \in C_E A$ et $x \in C_E B$
(1) $\Leftrightarrow x \in (C_E A \cap C_E B)$

dém
soit $x \in C_E(A \cap B)$ (2)
(2) $\Leftrightarrow x \notin (A \cap B)$
(2) $\Leftrightarrow$ non $(x \in A$ et $x \in B)$
(2) $\Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$
(2) $\Leftrightarrow x \in C_E A$ ou $x \in C_E B$
(2) $\Leftrightarrow x \in (C_E A \cup C_E B)$

2) exemples usuels

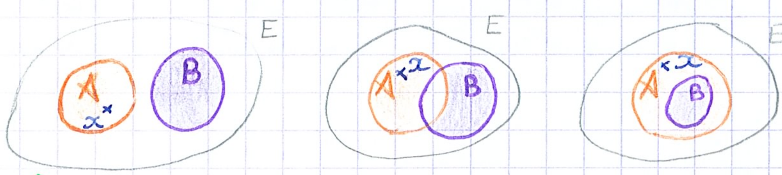
* A, B sont 2 parties de E

* Traduire $A \cup B = \emptyset$ puis $A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \emptyset$ ssi $A = B = \emptyset$
$A \cap B = \emptyset$ ssi $A \subset \overline{B}$ | $B \subset \overline{A}$

* Traduire $A \not\subset B$

$A \subset B$ équivaut à $\forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \in B)$
non$(A \subset B)$ équivaut à $\exists x \in E, (x \in A$ et $x \notin B)$



* Etablir l'équivalence des 4 propriétés suivantes :

P_1 : $A \subset B$
P_2 : $\overline{B} \subset \overline{A}$
P_3 : $A \cap B = A$
P_4 : $A \cup B = B$

pour Mq $P_2 \Leftrightarrow P_3$, j'introduis moi-même P_1

- $P_1 \Leftrightarrow P_2$: hyp : $A \subset B$
  $P_1 \Leftrightarrow \forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \in B)$
  $\Leftrightarrow \forall x \in E, (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$
  $\Leftrightarrow \forall x \in E, (x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A})$
  $\Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $P_1 \Leftrightarrow P_3$: $P_1 \Rightarrow P_3$ hyp : $A \subset B$
  - $(A \cap B) \subset A$ est toujours vraie
  - soit $x \in A$, d'après P_1, $x \in B$ donc $x \in A \cap B$
    donc $A \subset A \cap B$
    d'où $A \cap B = A$

  $P_3 \Rightarrow P_1$ hyp : $A \cap B = A$
  $(A \cap B) \subset B$ donc $A \subset B$, comme $A \cap B = A$, $A \subset B$

- $P_1 \Leftrightarrow P_4$: $P_1 \Rightarrow P_4$ hyp : $A \subset B$
  - $B \subset (A \cup B)$ est toujours vraie
  - soit $x \in A \cup B$,
    2 cas : $x \in B$
    $x \in A$, comme $A \subset B$, $x \in B$
    donc $(A \cup B) \subset B$
    d'où $A \cup B = B$

  $P_4 \Rightarrow P_1$ hyp : $A \cup B = B$
  $A \subset A \cup B$ donc $A \subset B$

IV Applications

1) définition

ex :
- $\ln : \begin{array}{|l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{array}$ — ln est une application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$: tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ a dans $\mathbb{R}$ 1 image unique
- $\sin : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x \end{array}$ — sin est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: tout $x \in \mathbb{R}$ a dans $\mathbb{R}$ 1 image unique.

Soient E, F 2 ensembles.
Une application f de E dans F associe à chaque élément de E 1 unique élément dans F.

$f : \begin{array}{|l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ — $f(x)$ est l'image de x par f
x est **un** antécédent de $f(x)$.

ex : $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ — 4 a pour image 16
4 est un antécédent de 16
(-4 en est un autre).

2 applications f, g sont égales ssi :
- elles ont même ensemble de départ E
- .... d'arrivée
- pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$

ex : les 4 applications suivantes sont différentes :

$\begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ $\begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ $\begin{array}{|l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ $\begin{array}{|l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$

2) composition des applications

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g[f(x)] \end{array}$$

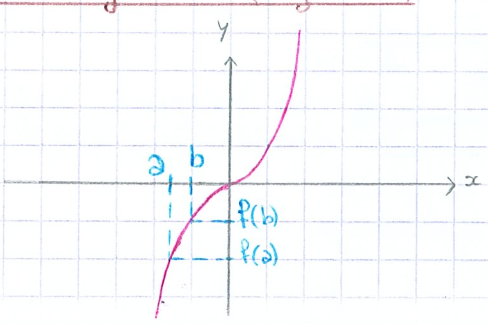
$g \circ f : \begin{array}{|l} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] \end{array}$

Th $\boxed{\begin{array}{l} E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \\ (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \end{array}}$

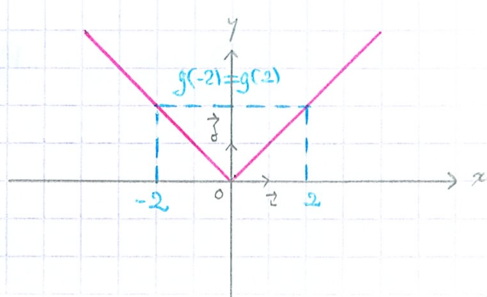
dém : soit $x \in E$,
$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)[f(x)] = h[g[f(x)]]$
$[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g[f(x)]]$

3) application injective (injection)

ex : $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$



$g : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array}$



a, b 2 réels distincts, on a $f(a) \neq f(b)$
f est une application injective

$2 \neq -2$ mais $g(2) = g(-2)$
g n'est pas une application injective

Soit $f : E \to F$. L'application f est injective ssi 2 éléments quelconques et distincts de E ont, par f, des images distinctes.

Th Soit $f : E \to F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(P_1) : f est **injective**
(P_2) : pour tout couple $(a, b) \in E^2$, on a : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
(P_3) : pour tout couple $(a, b) \in E^2$, on a : $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
(P_4) : tout élément de F admet par f au plus 1 antécédent dans E

dém
- supposons (P_1), soit $y \in F$,
  si $y = f(a) = f(b)$ alors, d'après (P_3), $a = b$
  donc y possède 0 ou 1 antécédent
  donc $(P_1) \Rightarrow (P_4)$
- supposons (P_4), soit $(a, b) \in E^2$ avec $f(a) = f(b)$
  a et b sont 2 antécédents du même élément
  d'après (P_4), $a = b$
  donc f est injective donc $(P_4) \Rightarrow (P_1)$

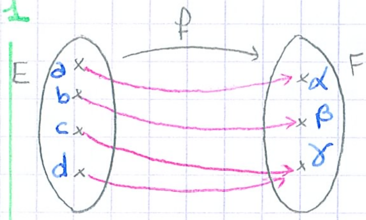
Ainsi, $(P_1) \Leftrightarrow (P_4)$

Méthode
Mq f est injective
1 → on utilise (P_3)
2 → on utilise (P_4) :
- on part d'un élément quelconque $y \in F$
- on résoud $y = f(x)$ d'inconnue x
- on établit que, pour tout y, cette équation a 0 ou 1 solution

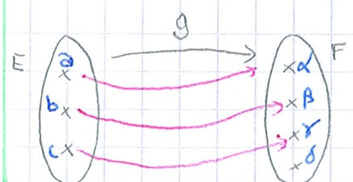
⚠ vérifier que f est bien 1 application : que chaque él^{t} de E n'a qu'1 seule image dans F

3 → on utilise (P_2)
Mq f n'est pas injective : on trouve un contre-exemple avec $a \neq b$ vérifiant $f(a) = f(b)$

ex : 1



f n'est pas injective car $c \neq d$ et $f(c) = \gamma = f(d)$



g est injective

2
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

$1 \neq -1$ et $f(1) = f(-1)$
f n'est pas injective

g est injective

exo : 1 $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ est-elle injective ?

Soient a, b 2 él^{ts} quelconques de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vérifiant $f(a) = f(b)$

$f(a) = f(b) \Leftrightarrow \dfrac{2a+1}{a-1} = \dfrac{2b+1}{b-1} \Leftrightarrow 2ab - 2a + b - 1 = 2ab - 2b + a - 1$

$\Leftrightarrow a = b$

f est donc injective

2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x^2}{x-1} \end{cases}$ est-elle injective ?

Soient a, b 2 él'ts quelconques de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ vérifiant $f(a)=f(b)$

$\underline{f(a)=f(b)} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{a-1} = \dfrac{b^2}{b-1} \Leftrightarrow a^2b - a^2 = ab^2 - b^2$

$\Leftrightarrow ab(a-b) + (b-a)(b+a) = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)[ab-a-b] = 0$

$\Leftrightarrow a-b=0$ ou $ab-a-b=0$

$\underline{a=b}$ $\quad a(b-1)=b$

$\quad \underline{a = \dfrac{b}{b-1}}$

je choisis $b=-1$, $a=\dfrac{1}{2}$

on a donc $f(-1)=f(\frac{1}{2})$

ainsi $\underline{-1 \neq \frac{1}{2}}$ et $\underline{f(-1)=f(\frac{1}{2})}$

donc f n'est pas injective

3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (2x+y,\ 3x-y) \end{cases}$ est-elle injective ?

Soient (a,b), (α,β) 2 él'ts quelconques de $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$\underline{f(a,b)=f(\alpha,\beta)} \Leftrightarrow (2a+b,\ 3a-b) = (2\alpha+\beta,\ 3\alpha-\beta)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = 2\alpha+\beta \\ 3a-b = 3\alpha-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 5\alpha \\ b=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\alpha \\ b=\beta \end{cases}$

donc $\underline{(a,b)=(\alpha,\beta)}$

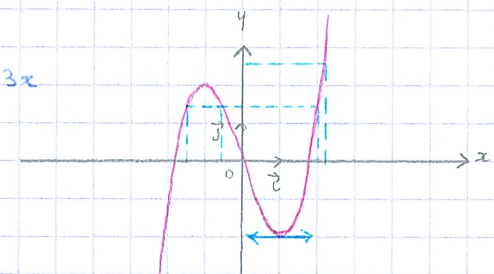
f est donc injective.

4. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x,y^2) \end{cases}$ est-elle injective ?

$\underline{(1,1) \neq (1,-1)}$ et $\underline{f(1,1) = (1,1) = f(1,-1)}$ $\quad f$ n'est pas injective

4) application surjective (surjection)

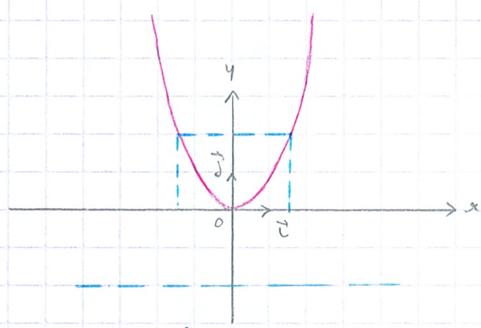
ex: $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3-3x \end{cases}$



tout él't $y \in \mathbb{R}$ possède au moins 1 antécédent

f est surjective

$g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$



si $y<0$, y n'a pas d'antécédent

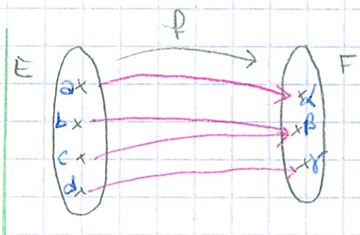
g n'est pas surjective.

Soit $f : E \longrightarrow F$. L'application f est surjective ssi tout élément de F admet, par f, au moins 1 antécédent dans E.

Méthode → Mq f est surjective

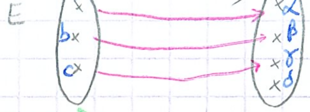
- soit $y \in F$ quelconque
- on établit que pour $\forall\, y \in F$, $y=f(x)$ a au moins 1 solution

ex : 1



f est surjective (et non injective car $b \neq c$ et $f(b) = \beta = f(c)$)

($4^3=81$ dessins possibles)



g n'est pas surjective car δ n'a pas d'antécédent (g est injective)

2 $g : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$ g n'est pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent

$h : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$ h est surjective

exo. 1 $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{x-2} \end{vmatrix}$ est-elle surjective ?

Soit $y \in \mathbb{R}$, je résous $y = f(x)$ d'inconnue x :

$y = \dfrac{x}{x-2} \Leftrightarrow yx - 2y - x = 0 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y$

si $y = 1$, x n'existe pas

1 n'a pas d'antécédent donc f n'est pas surjective

rem : $\dfrac{3x+1}{x-2} = 3$ impossible, $\dfrac{2x+1}{5x-2} = \dfrac{2}{5}$ impossible $\dfrac{x}{x-2} = 1$ impossible

2 $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \\ x \longmapsto \dfrac{x-1}{2x+1} \end{vmatrix}$ est-elle surjective ?

- si $x \neq -\frac{1}{2}$, $f(x)$ existe, est unique et $f(x) \neq \frac{1}{2}$
  f est donc une application
- Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
  $y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{x-1}{2x+1} \Leftrightarrow 2xy + y - x + 1 = 0$
  $\Leftrightarrow x(2y-1) = -1-y \Leftrightarrow x = -\dfrac{1+y}{2y-1} \neq -\dfrac{1}{2}$
  y admet 1 antécédent dans $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$
  donc f est surjective

5) application bijective (bijection)

a) définitions

Soit $f : E \to F$

L'application f est bijective ssi f est injective et surjective

L'application f est bijective ssi tout élément de F admet, par f, 1 unique antécédent.

Méthode → Mq f est bijective
- soit $y \in F$
- on établit que pour $\forall y \in F$, $y = f(x)$ admet 1 unique solution

ex : 1 $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$ f non injective, non surjective.

$g : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$ g non injective, surjective.

$h : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$ h injective, non surjective.

$k : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$ k bijective.

$l : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$ l bijective.

2 $\exp : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*} \\ x \mapsto e^x \end{vmatrix}$ est la bijection réciproque de $\ln : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{vmatrix}$

$Id_E : \begin{vmatrix} E \to E \\ x \mapsto x \end{vmatrix}$ est bijective ex : $f : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ x \longmapsto \frac{3x+1}{x-2} \end{cases}$ est-elle bijective ?

Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$, $y = f(x) \iff y = \frac{3x+1}{x-2} \iff yx - 2y = 3x + 1$

$\iff x(y-3) = 1 + 2y \iff x = \frac{1+2y}{y-3} \neq 2$

$\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ admet 1 unique antécédent $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$
donc f est bijective

b) application réciproque

Soit $f : E \to F$ une bijection
$y \in F$ possède 1 unique antécédent $x \in E$.
On considère l'application réciproque, notée $f^{-1} : \begin{cases} F \longrightarrow E \\ y \longmapsto x = f^{-1}(y) \end{cases}$

$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$

Soit $x \in E$, y est antécédent de x par f^{-1} ssi
$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$ donc y existe et est unique :
f^{-1} est une bijection.

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f^{-1}} E$; $x \mapsto y = f(x) \mapsto f^{-1}(y) = x$; $E \xrightarrow{f^{-1}\circ f} E$, $x \mapsto x$; $f^{-1}\circ f = Id_E$

$F \xrightarrow{f^{-1}} E \xrightarrow{f} F$; $y \mapsto f^{-1}(y) = x \mapsto f(x) = y$; $F \xrightarrow{f\circ f^{-1}} F$, $y \mapsto y$; $f \circ f^{-1} = Id_F$

Th : Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection
On peut considérer l'application réciproque $f^{-1} : \begin{cases} F \longrightarrow E \\ y \longmapsto x = f^{-1}(y) \end{cases}$

- $x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$
- f^{-1} est bijective
- $f \circ f^{-1} = Id_F$
  $f^{-1} \circ f = Id_E$

6) Théorèmes

a) $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$; $x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g[f(x)]$; $E \xrightarrow{g\circ f} G$, $x \mapsto z = (g\circ f)(x)$

Pb : 1 On suppose f et g injectives. Que dire de $g \circ f$?

Soit $(a,b) \in E^2$ avec $a \neq b$
f est injective donc $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
g .... $f(a) \neq f(b) \Rightarrow g[f(a)] \neq g[f(b)]$
$\iff (g\circ f)(a) \neq (g \circ f)(b)$ donc $g \circ f$ est injective

2 On suppose f et g surjectives. Que dire de $g \circ f$?

Soit $z \in G$
g est surjective : il existe $y \in F$ / $z = g(y)$
f .... $x \in E$ / $y = f(x)$
donc $z = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$
x est un antécédent de z par $g \circ f$,
donc $g \circ f$ est surjective

Th : la composée d'injections est une injection
.... de surjections .... surjection
.... de bijections .... bijection

rem : $g\circ f$ peut être bijective sans que ni f, ni g le soient :
f, g bijectives $\Longrightarrow$ $g\circ f$ bijective
$g\circ f$ peut être injective sans que g le soit ;
f, g injectives $\Longrightarrow$ $g\circ f$ injective
$g\circ f$ peut être surjective sans que f le soit :
f, g, surjectives $\Longrightarrow$ $g\circ f$ surjective
Il n'y a pas de réciproque

$\boxed{b}$

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ $\qquad$ $E \xrightarrow{g\circ f} G$

Pb : 1 | On suppose $g\circ f$ injective. f est-elle injective ?

Soit $(a,b)\in E^2$ / $f(a)=f(b)$
on a $g(f(a)) = g(f(b))$ or, $g\circ f$ est injective donc $a=b$
on a donc $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$ donc f est injective.

2 | On suppose $g\circ f$ surjective. g est-elle surjective ?

Soit $z\in G$,
$g\circ f$ est surjective donc $\exists x\in E$ / $z=(g\circ f)(x)$
donc $z=g[f(x)]$ $\quad$ $f(x)$ est un antécédent de z par g
donc g est surjective

Th $\boxed{\begin{array}{l} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \\ g\circ f \text{ injective} \Longrightarrow f \text{ injective} \\ g\circ f \text{ surjective} \Longrightarrow g \text{ surjective} \end{array}}$

exo : 1a | On suppose $g\circ f$ injective et f surjective. Que dire de g ?

$g\circ f$ est injective donc f est injective,
or, f est surjective
f est donc bijective, on peut donc considérer f^{-1}, la bijection réciproque de f.
$g=(g\circ f)\circ f^{-1}$ $\qquad$ g est la composée de 2 injections
donc g est injective.

b | On suppose $g\circ f$ surjective et g injective. Que dire de f ?

$g\circ f$ est surjective donc g est surjective
or, g est injective donc g est bijective.
On peut considérer la bijection réciproque de g, g^{-1}.
$f=g^{-1}\circ(g\circ f)$ $\qquad$ f, composée de 2 surjections, est une surjection.

2 | $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$
Etablir : $g\circ f$ et $h\circ g$ sont bijectives ssi f, g, h le sont.

- si f, g, h sont bijectives alors $g\circ f$ et $h\circ g$ le sont.
- hyp : $g\circ f$ et $h\circ g$ sont bijectives.

$\left\{\begin{array}{l} g\circ f \text{ injective} \\ g\circ f \text{ surjective} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ injective} \\ g \text{ surjective} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} h\circ g \text{ injective} \\ h\circ g \text{ surjective} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} g \text{ injective} \\ h \text{ surjective} \end{array}\right.$ $\Big\}$ g bijective

On peut considérer la bijection réciproque g^{-1}.
$f=g^{-1}\circ(g\circ f)$ $\qquad$ f, composée de 2 surjections, est surjective.
f est donc bijective
$h=(h\circ g)\circ g^{-1}$ $\qquad$ h, composée de 2 injections, est injective.
h est donc bijective.

3) $E \xrightarrow{f} F$, $F \xrightarrow{g} G$, $G \xrightarrow{h} E$

On suppose $\begin{cases} h \circ g \circ f \text{ et } f \circ h \circ g \text{ injectives} \\ g \circ f \circ h \text{ surjective} \end{cases}$

Que dire de f, g, h ?

$(f \circ h) \circ g$ injective $= f \circ (h \circ g)$ $\Rightarrow \begin{cases} g \text{ injective} \\ h \circ g \text{ injective} \end{cases}$

$(h \circ g) \circ f$ injective $= h \circ (g \circ f)$ $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ injective} \\ g \circ f \text{ injective} \end{cases}$

$g \circ (f \circ h)$ surjective $= (g \circ f) \circ h$ $\Rightarrow \begin{cases} g \text{ surjective} \\ g \circ f \text{ surjective} \end{cases}$

donc g bijective, $g \circ f$ bijective

On peut considérer g^{-1}, bijective.

* $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ f, composée de 2 bijections, est bijective.
* $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ h, - - - - - - - - injections, est injective

On peut considérer f^{-1}

$h = f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f \circ h)$ h, composée de 3 surjections, est surjective

h est bijective

C Pb: $f : E \longrightarrow F$

On suppose qu'il existe $g : F \longrightarrow E$ vérifiant $\begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$

Que dire de f ? de g ?

$f \circ g$ est bijective donc surjective $\Rightarrow f$ surjective
$g \circ f$ - - - - - - - - injective $\Rightarrow f$ injective
f bijective

On considère f^{-1}

$g \circ f = Id_E$ donc $(g \circ f) \circ f^{-1} = Id_E \circ f^{-1} \Leftrightarrow g = f^{-1}$

Th | Soit $f : E \longrightarrow F$
S'il existe $g : F \longrightarrow E$ vérifiant $\begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$
alors, f est bijective et $f^{-1} = g$

ex: * Soit $f : E \longrightarrow E$
si $f \circ f = Id_E$, f est bijective et $f^{-1} = f$
$M' = f(M)$ $M = f^{-1}(M') = f^{-1}(f(M)) = f(f(M))$

* $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \bar{z} \end{array}$ f est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, parallèlement à l'axe des ordonnées

* si $f \circ f \circ f = Id_E$, f est bijective et $f^{-1} = f \circ f$
(rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$)

Pb: $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ $E \xrightarrow{g \circ f} G$
On suppose f et g bijectives donc $g \circ f$ est bijective
Exprimer $(g \circ f)^{-1}$

$G \xrightarrow{g^{-1}} F \xrightarrow{f^{-1}} E$

$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ Id_E \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_G$

$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ Id_F \circ f = f^{-1} \circ f = Id_E$

$g \circ f$ et $f^{-1} \circ g^{-1}$ sont donc des applications réciproques.

Th | $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$
si f et g sont bijectives, alors,
$g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

7) restriction - prolongement

Soit $f : E \longrightarrow F$, soit A une partie de E

soit $g : \begin{array}{l} A \longrightarrow F \\ x \longmapsto g(x) = f(x) \end{array}$

g est la restriction de f à A
f est le prolongement de g à E

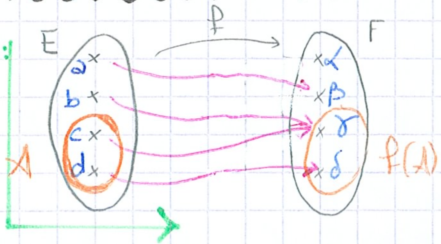
ex : $\sin : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \sin x \end{array}$ $u : \begin{array}{l} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \sin x \end{array}$

u est la restriction de $\sin$ à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, u est bijective.

8) image directe - image réciproque

a définition de l'image directe

ex :



$f(A)$ est l'image de A par f.

Soit $f : E \to F$, soit A une partie de E.
On appelle image (directe) de A par f la partie de F, notée $f(A)$, formée des images des éléments de A.

$f(A) = \{ f(x) \,/\, x \in A \}$

$y \in f(A) \iff \exists a \in A \,/\, y = f(a)$

rem : $f(\emptyset) = \emptyset$

$f(E) \subset F$

ex : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$

$f([-2,2]) = [0,4]$

$f([-3,2]) = [0,9]$

$f([0,2]) = [0,4]$

⚠ $f(-2) \in f([0,2])$ or, $-2 \notin [0,2]$

$f(x) \in f(A)$ signifie : $\exists a \in A \,/\, f(x) = f(a)$ et pas $x \in A$

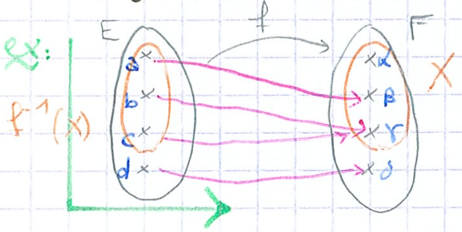
il se peut que $x \notin A$

si f est surjective, $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$

Th $f : E \to F$
f est surjective ssi $f(E) = F$

b image réciproque d'une partie

ex :



$f^{-1}(X)$ est l'image réciproque de X par f

Soit $f : E \to F$, soit X une partie de F.
On appelle image réciproque de X par f la partie de E, notée $f^{-1}(X)$, formée des antécédents des éléments de X.

$f^{-1}(X) = \{ x \in E \,/\, f(x) \in X \}$

ex : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$

$f^{-1}([0,4]) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \in [0,4] \} = [-2,2]$

$f^{-1}([-1,4]) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \in [-1,4] \} = [-2,2]$

$f^{-1}([-3,-1]) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \in [-3,-1] \} = \emptyset$

$f^{-1}(\{9\}) = \{-3, 3\}$

rem : $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$f^{-1}(F) = E$

⚠ $f^{-1}(X)$ est une notation qui ne suppose pas f bijective.

C] Quelques propriétés

Soit $f : E \longrightarrow F$, soient A, B 2 parties de E et X, Y 2 parties de F.

Pb : 1 On suppose $A \subset B$. Que dire de $f(A)$ et $f(B)$?

Soit $y \in f(A)$, donc $\exists a \in A \,/\, y = f(a)$,
$A \subset B$ donc $a \in B$ d'où $f(a) \in f(B)$
donc $y \in f(B)$

Ainsi $f(A) \subset f(B)$

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

2 On suppose $X \subset Y$. Que dire de $f^{-1}(X)$ et $f^{-1}(Y)$?

Soit $x \in f^{-1}(X)$, donc $f(x) \in X$
$X \subset Y$ donc $f(x) \in Y \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y)$

Ainsi, $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$

$$X \subset Y \Rightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$$

3 Comparer $f(A \cup B)$ avec $f(A) \cup f(B)$.

Soit $y \in f(A \cup B)$, donc $\exists a \in A \cup B \,/\, y = f(a)$
$a \in A \cup B$ donc $a \in A$ ou $a \in B$
donc $y = f(a) \in f(A)$ ou $y = f(a) \in f(B)$
$\Leftrightarrow y \in (f(A) \cup f(B))$

Ainsi, $f(A \cup B) \subset (f(A) \cup f(B))$

Soit $y \in (f(A) \cup f(B))$, ou $y \in f(A)$ donc $\exists a \in A \,/\, y = f(a)$
or, $a \in A$ donc $a \in A \cup B$ donc $y = f(a) \in f(A \cup B)$
ou $y \in f(B)$ donc $\exists a \in B \,/\, y = f(a)$
or, $a \in B$ donc $a \in A \cup B$ donc $y = f(a) \in f(A \cup B)$

Ainsi, $(f(A) \cup f(B)) \subset f(A \cup B)$

Ainsi, $$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

4 Comparer $f^{-1}(X \cup Y)$ avec $f^{-1}(X)$ et $f^{-1}(Y)$.

Soit $\alpha \in f^{-1}(X \cup Y)$, donc $f(\alpha) \in X \cup Y$
$f(\alpha) \in X$ ou $f(\alpha) \in Y$
$\Leftrightarrow \alpha \in f^{-1}(X)$ ou $\alpha \in f^{-1}(Y)$
$\Leftrightarrow \alpha \in (f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y))$

Ainsi, $f^{-1}(X \cup Y) \subset (f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y))$

Soit $\alpha \in (f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y))$,
$\alpha \in f^{-1}(X)$ ou $\alpha \in f^{-1}(Y)$
$f(\alpha) \in X$ ou $f(\alpha) \in Y$
$f(\alpha) \in (X \cup Y)$
$\alpha \in f^{-1}(X \cup Y)$

Ainsi, $(f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)) \subset f^{-1}(X \cup Y)$

Ainsi, $$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$$

5 Comparer $f(A \cap B)$ avec $f(A) \cap f(B)$

Soit $y \in f(A \cap B)$, donc $\exists a \in A \cap B \,/\, y = f(a)$,
$a \in A$ et $a \in B$ donc $y = f(a) \in f(A)$ et $y \in f(B)$
donc $y \in (f(A) \cap f(B))$.

Ainsi, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Soit $y \in (f(A) \cap f(B))$, $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$
$\exists a \in A \,/\, y = f(a)$ et $\exists b \in B \,/\, y = f(b)$

on ne peut pas conclure

contre-exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

$A = \{1\}$ $\quad B = \{-1\}$ $\quad A \cap B = \emptyset$

$f(A) = 1 \qquad f(B) = 1 \qquad f(A \cap B) = \emptyset$ et $f(A) \cap f(B) = \{1\}$

donc $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

Ainsi, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

6 Comparer $f^{-1}(X \cap Y)$ avec $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

Soit $\alpha \in f^{-1}(X \cap Y)$, donc $f(\alpha) \in X \cap Y$

donc $f(\alpha) \in X$ et $f(\alpha) \in Y$

donc $\alpha \in f^{-1}(X)$ et $\alpha \in f^{-1}(Y)$

donc $\alpha \in (f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y))$

Ainsi, $f^{-1}(X \cap Y) \subset (f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y))$

Soit $\alpha \in (f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y))$, $\alpha \in f^{-1}(X)$ et $\alpha \in f^{-1}(Y)$

$f(\alpha) \in X$ et $f(\alpha) \in Y$

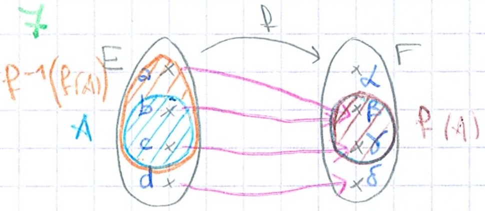
$f(\alpha) \in (X \cap Y)$

$\alpha \in f^{-1}(X \cap Y)$

Ainsi, $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(X \cap Y)$

Ainsi, $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

7



Comparer A et $f^{-1}(f(A))$.

Soit $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$

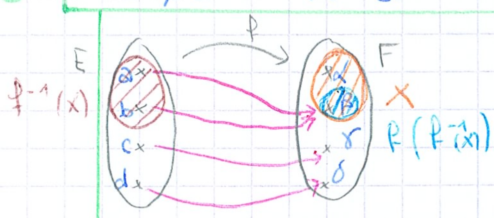
Ainsi, $A \subset f^{-1}(f(A))$

$A \neq f^{-1}(f(A))$: contre-exemple :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ (il faut f non injective)

$A = \{2\}$ $\quad f(A) = 4$ $\quad f^{-1}(f(A)) = \{-2, 2\}$

8 Comparer X et $f(f^{-1}(X))$



Soit $y \in f(f^{-1}(X))$,

$\exists x \in f^{-1}(X) \,/\, y = f(x)$

or, $f(x) \in X$ donc $y = f(x) \in X$

Ainsi, $f(f^{-1}(X)) \subset X$

$f(f^{-1}(X)) \neq X$: contre-exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ (il faut f non surjective)

$X = \{-1\}$ $\quad f^{-1}(X) = \emptyset$ $\quad f(f^{-1}(X)) = \emptyset$

$$\boxed{\begin{array}{l} A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \\ X \subset Y \Rightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y) \\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \\ f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \\ f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\ A \subset f^{-1}(f(A)) \\ f(f^{-1}(X)) \subset X \end{array}}$$