# Séries numériques

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

## A) I Définitions

- $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ , $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : - suite des sommes partielles de $u$
  - série de terme général $u_n$
- La série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- notations :
  $\sum u_n$ : série de terme général $u_n$
  si la série $\sum u_n$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
  $\sum_{n\geq n_0} u_n$ : série définie à partir de $n_0$
- si $\sum u_n$ est une série convergente de somme $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$
  $n \in \mathbb{N}$, $R_n = S - S_n$ est le reste d'ordre $n$ de la série :

une somme infinie est une limite

$$R_n = \left(\lim_{k\to+\infty} \sum_{p=0}^{k} u_p\right) - \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right) = \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p - \sum_{p=0}^{n} u_p\right) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{k} u_p = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$$

## II Exemples

### 1. série arithmétique

$(a,b)\in\mathbb{K}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = an+b$ $\qquad S_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2} = (n+1)\frac{an+2b}{2}$

$\sum u_n$ ne converge que si $a=b=0$ $\quad (u_n = 0)$

### 2. série géométrique

$(a,b)\in\mathbb{K}^2$, $a\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = b a^n$ $\qquad S_n = \begin{cases} \frac{b - b a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ (n+1)b & \text{si } a = 1 \end{cases}$

$\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $|a| < 1$ ou $a = 1,\ b = 0$ $\quad$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$ et $R_n = \frac{b a^{n+1}}{1-a}$

### 3. série harmonique

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ , $\quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy

donc diverge.

### 4. téléscope ou dominos

ex : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{q=1}^{n+1} \frac{1}{q+1} = \overbrace{1}^{\text{pour } k=0} - \overbrace{\frac{1}{n+2}}^{\text{pour } q=n+1}$

donc $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1$

cas général : s'il existe $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ / $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n - v_{n+1}$ , alors

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = v_n - v_0$ $\qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = v_n - v_0 + u_0$

$\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $v$ converge.

## III Propriétés

Pp 1) L'ensemble des séries est un $\mathbb{K}$-ev

ce n'est pas une algèbre car : $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \neq \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$

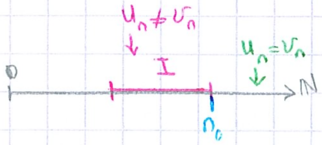
$P_p$ 2) L'ensemble des séries convergentes est un ss_ev
L'application qui à une série convergente associe sa somme est un morphisme d'ev. (forme linéaire) :
si $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\sum u_n$, $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge

et $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

$P_p$ 3) si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$,
$\exists!\, u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles

$$\begin{cases} u_0 = S_0 \\ u_1 = S_1 - S_0 \\ \vdots \\ u_n = S_n - S_{n-1} \end{cases} \qquad (u_1 + u_0 = S_1 \Rightarrow u_1 = S_1 - u_0 = S_1 - S_0)$$

$P_p$ 4) On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes




$(u_n, v_n) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$,
$I \subset \mathbb{N}$ fini / $\forall n \in \mathbb{N}\setminus I$, $u_n = v_n$
$n_0 = \max I$,
$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

$n > n_0 \Rightarrow S'_n - S_n = \sum_{k=0}^{n}(v_k - u_k) = \overbrace{\sum_{k\in I}(v_k - u_k)}^{\in \mathbb{K}}$

$S'_n - S_n = \text{cste}$
↳ $\hat{m}$ convergence

Th $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$ $\Longrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$

$u_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

⚠ pas de réciproque $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$

# B] Séries à termes positifs

## I Propriété fondamentale

- $\sum u_n$ série à termes positifs : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}^+$
les proposit° suivantes sont équivalentes : (1) la série $\sum u_n$ converge
(2) la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée :
$\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall n\in\mathbb{N},\ S_n \leq M$

$u_n = S_n - S_{n-1} \geq 0 \Leftrightarrow S_n \geq S_{n-1}$ : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ↗

- dans ce cas, $\lim_{+\infty} S_n = \sup\{S_n, n\in\mathbb{N}\}$

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} u_k,\ n\in\mathbb{N}\right\}$

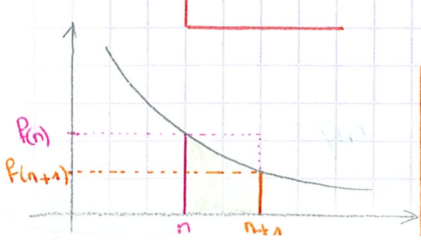
- si $\sum u_n$ diverge, $\lim_{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$

## II Comparaison à une intégrale

$P_p$) $F : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ ↗, les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) $F$ est majorée
(2) $F$ admet une limite en $+\infty$
(3) $(F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge
(4) ........... est bornée

$(4) \Rightarrow (1)$ : $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ F(n) \leq M$
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x \leq \underbrace{E(x)+1}_{\in\mathbb{N}}$ donc $F(x) \leq F(\underbrace{E(x)+1}_{\in\mathbb{N}}) \leq M$

Th soit $f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}^+$ continue ↘
la série $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ $f$ est intégrable sur $[0,+\infty[$
$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$
$\Leftrightarrow$ $\int_0^x f(t)\,dt$ admet une limite quand $x \to +\infty$
$\Leftrightarrow$ $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge




$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ $\Leftrightarrow \int_n^{n+1} f(n+1)\,dt \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dt$
$\Leftrightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$

$S_{n+1} - f(0)^* = \sum_{k=0}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) = S_n$

$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} f(k)}_{S_{n+1}} - f(0)$

$\int_0^{n+1} f(t)\,dt \leq S_n \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,dt$

donc $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} f(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

$\Leftrightarrow$ ——— est bornée $\quad 0 \leq \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leq S_n$

$\Leftrightarrow$ $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\quad$ (4) $\Downarrow$ (1)

$\Leftrightarrow$ $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est majorée

$\Leftrightarrow$ $x \longmapsto \int_0^x |f(t)|\,dt$ est majorée *

$\Leftrightarrow$ $f$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

* alors $\int_0^x f(t)\,dt$ a une limite en $+\infty$ d'où $\Rightarrow$ $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

rem : les hyp. peuvent être plus faibles ($f$ continue par morceaux, $f \searrow$ à partir d'un certain rang $x_0$)

ex : * $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow$ $\alpha > 1$

série de Riemann

$f : \begin{vmatrix} [1,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha} \end{vmatrix}$ est continue, $\searrow$ pour $\alpha > 0$

pour $\alpha \leq 0$, $\lim_{+\infty} f(n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$

on suppose $\alpha > 0$,

$x \geq 1$, $\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt = \begin{cases} \ln x & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x & \text{si } \begin{cases}\alpha \neq 1 \\ \alpha > 0\end{cases} \end{cases} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$

limite finie $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

* $\sum \frac{1}{n \ln n}$ $(n \geq 2)$ diverge

$f : \begin{vmatrix} [2,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x \ln x} \end{vmatrix}$ est continue, positive, $\searrow$

$\int_2^x f(t)\,dt = \int_2^x \frac{dt}{t \ln t} = \left[\ln(\ln t)\right]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Th amélioré

soit $f : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue $\searrow$

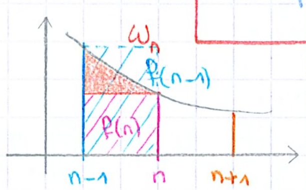
pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega_n = \int_{n-1}^n f(t)\,dt - f(n)$

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n \geq 0$

(2) la série $\sum \omega_n$ converge

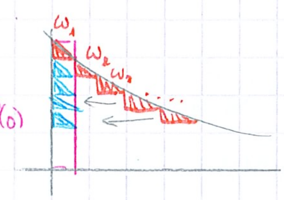
(3) la série $\sum f(n)$ converge $\Longleftrightarrow$ $f$ est intégrable

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$




$n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$

$n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)\,dt \leq f(n-1)$ $\Rightarrow$ $0 \leq \omega_n \leq f(n-1) - f(n)$




$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(f(k-1) - f(k)\right) = f(0) - f(n) \leq f(0)$

donc $\sum \omega_k$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée, donc $\sum \omega_n$ converge

et $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \leq f(0)$

$\sum_{k=1}^{n} \omega_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k = \int_0^{\infty} f(t)\,dt - \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

application : cste d'Euler $\quad f : \begin{vmatrix} [1,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{t} \end{vmatrix}$ $\searrow$, continue, positive

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\omega_n = \int_{n-1}^n f(t)\,dt - f(n) = \ln \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}$

$\sum \omega_n$ converge, $\sum_{k=2}^{n} \omega_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \ln n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

donc $\ln n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ admet une limite finie en $+\infty$, positive

$\ln n - \sum_{k=1} \frac{1}{k}$ admet une limite finie $\gamma$ (cste d'Euler) $\gamma \approx 0{,}577$

$\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma + o(1)$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$

## III Comparaison de 2 séries numériques positives

Pp 1) $(u,v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$

donc $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

$\sum v_n$ converge : $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M \rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$

contraposée : $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge

Pp 2) $(u,v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$

si $u \in O(v)$ $(u_n = O(v_n))$

$|u_n| \leq K|v_n|$

1er cas : si $\sum u_n$ diverge alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ comparaison des sommes partielles

2ème cas : si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge

$\sum_{k=n}^{\infty}$ : comparaison des restes d'ordre $n-1$

et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$ comparaison des restes d'ordre $n$

1er cas : $\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq u_k \leq A v_k$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq A \sum_{k=n_0}^{n} v_k \leq A \sum_{k=0}^{n} v_k$

$\sum v_n$ diverge : $\lim_{+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$ donc $\lim_{+\infty} A \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$

$\exists n_1 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k}_{\text{réel fini}} \leq \underbrace{A \sum_{k=0}^{n} v_k}_{\rightarrow +\infty}$

soit $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq 2A \sum_{k=0}^{n} v_k$

2ème cas : $\exists A \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq u_k \leq A v_k$

$A \sum v_n$ converge donc $\sum u_n$ converge

$\forall n > n_0,\ \forall m > n,\ \sum_{k=n+1}^{m} u_k \leq A \sum_{k=n+1}^{m} v_k$

passage à la lim : $m \to +\infty$ : $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq A \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$

Pp 3) $(u,v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$

si $u \in o(v)$ $(u_n = o(v_n))$ $(u_n \sim v_n)$

Pp 4) $u \sim v$ 1er cas : si $\sum v_n$ diverge alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ $\sim$

2ème cas : si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge

et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$ $\sim$

remplacer $\exists A \in \mathbb{R}^{+*}$ par $\forall \varepsilon > 0$

si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ donc $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

et $v_n = O(u_n)$ donc $\sum v_n$ diverge $\Rightarrow \sum u_n$ diverge

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont donc de même nature

1er cas : $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n - v_n = o(v_n) \Rightarrow \underbrace{|u_n - v_n|}_{\text{terme positif}} = o(v_n)$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} |u_k - v_k| = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$

$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} (u_k - v_k)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k - v_k| = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$

B

donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$

2ème cas : $|u_n - v_n| = o(v_n)$ $\quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k - v_k| = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right| = \left|\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} (u_k - v_k)\right| \leq \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |u_k - v_k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k - v_k| = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$$

rem : • il suffit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient positives à partir d'un certain rang

• si $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \text{ est positif à partir d'un certain rang } n_0 \end{cases}$ alors $u_n$ est positif à partir d'un certain rang $n_1$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow v_n \geq 0$

$u_n \sim v_n$ donc $u_n - v_n = o(v_n)$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ : $\exists n_1 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - v_n| \leq \frac{v_n}{2}$

$\Rightarrow -\frac{v_n}{2} \leq u_n - v_n \leq \frac{v_n}{2}$

$\downarrow + v_n$

$\Rightarrow \frac{v_n}{2} \leq u_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow 0 \leq \frac{v_n}{2} \leq u_n$

ex : $u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3+2}}$ $\quad u_n \sim \frac{n}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}$ or $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ est à termes positifs et diverge

donc $\sum u_n$ diverge

$u_n = \ln(\cos \frac{1}{n})$ $\quad u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$

or $\sum -\frac{1}{2n^2}$ est à termes négatifs et converge

donc $\sum u_n$ converge

$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$

on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ell$

alors $u_n \sim v_n$ $\quad \sum v_n$ est à termes de signe cst, diverge

donc $\sum u_n$ diverge

$\sum_{k=0}^{n} v_k = (n+1)\ell$ $\quad \sum_{k=0}^{n} u_k \sim (n+1)\ell \sim n\ell$

$\lim_{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} u_k = \ell$

formule de Stirling : $\sum_{k=1}^{n} \ln k \sim n \ln n$

méthode des rectangles

$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$

$\forall t \in [n, n+1],\ \ln n \leq \ln t \leq \ln(n+1) \Rightarrow \ln n \leq \int_n^{n+1} \ln t \, dt \leq \ln(n+1)$

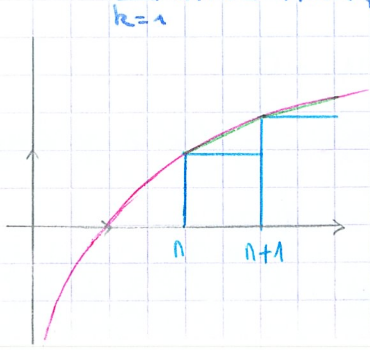
or, $\ln n \sim \ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + o(1)$ $\quad$ donc $\ln n \sim \int_n^{n+1} \ln t \, dt$

la série $\sum \ln n$ / est à termes positifs / diverge

donc $\sum_{k=1}^{n} \ln k \sim \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln t \, dt = \int_1^{n+1} \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - n$

$\sim (n+1)\ln(n+1) \sim n \ln n$

$\sum_{k=1}^{n} \ln k = n \ln n + o(n \ln n)$ $\qquad n! = n^n e^{o(n \ln n)}$




méthode des trapèzes

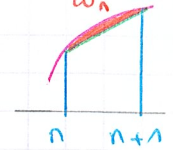
soit $h : [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ affine par morceaux

$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} h \text{ est affine sur } [n, n+1] \\ h(n) = \ln n \\ h(n+1) = \ln(n+1) \end{cases}$

$$\int_1^n h(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left[\underbrace{\ln k}_{\text{petite base}} + \underbrace{\ln(k+1)}_{\text{grande base}}\right] = \frac{1}{2}\ln 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \ln k + \frac{1}{2}\ln n$$

$= \sum_{k=1}^{n} \ln k - \frac{1}{2}\ln n$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega_n = \int_n^{n+1} (\ln t - h(t))\, dt \geqslant 0$ par convexité




$\omega_n = [t \ln t - t]_n^{n+1} - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{1}{2}\ln n = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - n\ln n + n - \frac{\ln(n+1)}{2} - \frac{\ln n}{2}$

$\omega_n = (n+1)\ln n + (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln n - \frac{\ln n}{2} - \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{2} - \frac{\ln n}{2} - 1$

$\omega_n = (n+1-n-1)\ln n + (n+1-\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1$

$\boxed{\omega_n} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \boxed{\frac{1}{12n^2}}$ $\oplus$ conv

$\sum \omega_n$ converge donc : $\exists \ell \in \mathbb{R} \,/\, \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k = \ell$

$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} (\ln t - h(t))\, dt = \lim_{n\to+\infty} \left( \int_1^n \ln t\, dt - \int_1^n h(t)\, dt \right)$

$\ell = \lim_{n\to+\infty} \left( n\ln n - n + 1 - \sum_{k=1}^{n} \ln k + \frac{1}{2}\ln n \right)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \ln k = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n - \ell + 1 + o(1)$

$n! = e^{\sum_{k=1}^{n} \ln k} = e^{n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n - \ell + 1 + o(1)} \sim n^n e^{-n} \sqrt{n}\, \mu$ $(\mu \in \mathbb{R}^{+*})$

intégrale de Wallis : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\, dx$

(pour calculer $\mu$)

par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \dfrac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$

$I_{2p} I_{2p+1} = \frac{(2p)!}{(2p+1)!} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(2p+1)}$

$I_{2p-1} I_{2p} = \frac{2^{2p-2}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{p^2} 2p = \frac{\pi}{4p} \sim \frac{\pi}{2(2p-1)}$

donc $I_n I_{n+1} \sim \frac{\pi}{2n}$

$0 \leqslant I_n$

$I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$

$\underbrace{I_{n+1} I_n}_{\sim \frac{\pi}{2n}} \leqslant I_n^2 \leqslant \underbrace{I_n I_{n-1}}_{\sim \frac{\pi}{2(n-1)} \sim \frac{\pi}{2n}}$ donc $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ $\Rightarrow I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$

donc $\frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$

$(2p)!$

$\frac{(2p)^{2p} e^{-2p} \sqrt{2p}\, \mu}{2^{2p} \underbrace{(p^{2p} e^{-2p} p\, \mu^2)}_{(p!)^2}} \frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\, \pi}{\mu} \sim \sqrt{\pi} \Leftrightarrow \mu \sim \sqrt{2\pi}$

$\mu = \sqrt{2\pi}$

$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

applications : critère de Riemann (comparaison à une série de Riemann)

$\sum u_n$ à termes positifs

- s'il existe $\alpha \in ]1, +\infty[$ / $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$

$\lim_{+\infty} \frac{u_n}{1/n^\alpha} = 0$ alors, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\sum u_n$ converge (car $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge)

- s'il existe $\alpha \in ]-\infty, 1]$ / $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$

$\lim_{+\infty} \frac{1}{n^\alpha u_n} = 0 \Leftrightarrow \lim_{+\infty} \frac{1/n^\alpha}{u_n}$ alors $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ donc $\sum u_n$ diverge $\left(\text{car } \left|\frac{1}{n^\alpha}\right| \leqslant \varepsilon |u_n|,\ \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge}\right)$

## comparaison logarithmique

si $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n > 0 \\ v_n > 0 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \end{cases}$ alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

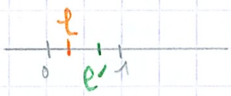
$\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge

$$\begin{cases} 0 < \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}} \\ 0 < \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leqslant \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \\ \vdots \\ 0 < \frac{u_1}{u_0} \leqslant \frac{v_1}{v_0} \end{cases} \rightarrow \text{par produit : } 0 < \frac{u_n}{u_0} \leqslant \frac{v_n}{v_0}$$

## règle de d'Alembert (comparaison à une suite géométrique)

si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \ (\in \overline{\mathbb{R}}) \end{cases}$ si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge

$\ell > 1$ $\sum u_n$ diverge



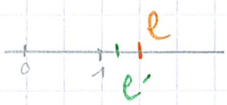
on suppose $0 < \ell < 1$, $\ell' = \frac{\ell + 1}{2}$ $\qquad \ell = 2\ell' - 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell' < 1$

on pose $v$ : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (\ell')^n$ alors $\begin{cases} v_n > 0 \\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = \ell' \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases}$

or, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$

donc $\sum u_n$ converge



on suppose $1 < \ell \leqslant +\infty$, $\ell' = \frac{\ell + 1}{2}$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 < \ell' \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$

on pose $v$ : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (\ell')^n$ alors $\begin{cases} v_n > 0 \\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = \ell' \\ \sum v_n \text{ diverge} \end{cases}$

or, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$

donc $\sum u_n$ diverge

rem : $\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \ell' \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} \geqslant \ell' \\ \vdots \\ \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \geqslant \ell' \end{cases} \rightarrow \frac{u_n}{u_{n_0}} \geqslant (\ell')^{n-n_0} \qquad u_n \geqslant u_{n_0} \ell'^{\,n-n_0} \longrightarrow +\infty$

# C/ Séries réelles ou complexes

## I Séries complexes

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x_n + i y_n$, $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k + i \sum\limits_{k=0}^{n} y_k$

$\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} y_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent

$\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent

dans ce cas : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n + i \sum\limits_{n=0}^{+\infty} y_n$

## 2. critère de Cauchy

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

$\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p>n_0 \Rightarrow |S_{p+q} - S_{p-1}| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\sum_{k=p}^{p+q} u_k\right| < \varepsilon$ $\quad p-1 \geq n_0$

$\left(\sum_{k=p}^{p+q} u_k\right.$ : tranche de Cauchy $\left.\right)$

# I Convergence absolue

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\sum u_n$ est "absolument convergente" si la série (à termes positifs) $\sum |u_n|$ est convergente.

Th Toute série complexe ou réelle "absolument convergente" est convergente alors
$$\begin{cases} \left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n| \end{cases}$$

⚠ pas de réciproque

$\sum |u_n|$ converge $\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall (p,q)\in\mathbb{N}^2\ p\geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=p}^{p+q} |u_k|\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\sum_{k=p}^{p+q} u_k\right| \leq \sum_{k=p}^{p+q} |u_k| < \varepsilon$

$\Rightarrow \sum u_n$ converge.

- si $\sum u_n$ est absolument convergente,
  $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n_0}^{n_0+q} u_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{n_0+q} |u_k|$
  pour $q \to +\infty$ $\sum u_n$ est convergente, donc :
  $$\left|\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} |u_k|$$

Pp) L'ensemble des séries absolument convergentes est un ss-ev de l'ev des séries convergentes.

- non vide
- si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$
  $$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} |\alpha u_k + \beta v_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |\alpha u_k| + \sum_{k=0}^{n} |\beta v_k|$$
  $$\leq |\alpha| \sum_{k=0}^{n} |u_k| + |\beta| \sum_{k=0}^{n} |v_k|$$
  $$\leq |\alpha| \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| + |\beta| \sum_{k=0}^{\infty} |v_k| \quad \in \mathbb{R}^+$$
  donc $\sum |\alpha u_n + \beta v_n|$ est une série à termes positifs convergente
  donc $\sum (\alpha u_n + \beta v_n)$ est absolument convergente

# II Comparaisons

$\sum v_n$ à termes positifs convergente

si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$

idem pour $u_n = o(v_n)$

⚠ faux pour $u_n \sim v_n$

$\exists A \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 \Rightarrow |u_k| \leq A v_k$ donc $|u_n| = O(v_n)$

donc $\sum |u_n|$ converge donc $\begin{cases} \sum u_n \text{ est absolument convergente} \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| = O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right) \end{cases}$

de plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|$ donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$

critère de Riemann si $\exists \alpha \in ]1,+\infty[ \,/\, \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} u_n = 0$

alors $\sum u_n$ est absolument convergente

## règle de d'Alembert

si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \ell \ (\in \overline{\mathbb{R}}) \end{cases}$ (termes positifs : $u_n > 0$)

si $\ell < 1$ : $\sum |u_n|$ converge, $\sum u_n$ converge absolument

$\ell > 1$ : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = +\infty$, $\sum u_n$ diverge

# IV Séries alternées

$\sum u_n$ série réelle est **alternée** si la suite $(-1)^n u_n$ est de signe fixe :

$\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n u_n \geqslant 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n u_n \leqslant 0$

$u_n = (-1)^n |u_n|$ $\qquad$ $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$

$\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, $\sum \dfrac{\cos n\pi}{\sqrt{n-1}}$

**th : critère spécial des séries alternées** (CSA)

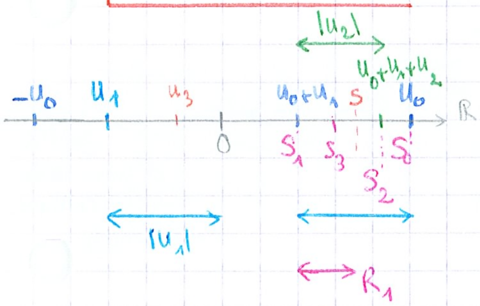
soit $\sum u_n$ alternée, $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ suite $\begin{cases} \searrow \\ \text{qui converge vers } 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \sum u_n$ converge

$\to$ dans ce cas, avec $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$

si $\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n u_n \geqslant 0$ ($\leqslant$) alors $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ ($\geqslant$, $\geqslant$)

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

$\to$ de plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - S| = |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$ ($S_n$ valeur approchée de $S$, erreur majorée par $|u_{n+1}|$)




la somme d'une série qui converge par le CSA a le signe de son 1er terme

$|u| \searrow$ donc $|u_1| \leqslant |u_0|$

on suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n u_n \geqslant 0$ $\qquad$ donc $u_n = (-1)^n |u_n|$

- $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes :

$S_{2n+2} - S_{2n} = \underbrace{u_{2n+2}}_{(-1)^{2n+2}|u_{2n+2}|} + \underbrace{u_{2n+1}}_{(-1)^{2n+1}|u_{2n+1}|} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$ $\quad (S_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \searrow$

$S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n+1} + u_{2n} = -|u_{2n+1}| + |u_{2n}| \geqslant 0$ $\quad (S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \nearrow$

$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \longrightarrow 0$

donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $S$

$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ et $\sum u_n$ converge

- $S_{2n+1} - S_{2n} \leqslant S - S_{2n} \leqslant 0 \iff u_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0 \Rightarrow |R_{2n}| \leqslant |u_{2n+1}|$

$0 \leqslant S - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} \iff 0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant u_{2n+2} \Rightarrow |R_{2n+1}| \leqslant |u_{2n+2}|$

donc $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\quad n \geqslant 0$, $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{n} = (-1)^n |u_n| \longrightarrow$ série alternée

$\longrightarrow (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \begin{cases} \searrow \\ \text{converge vers } 0 \end{cases}$

donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge

$\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, $\sum \left( \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \right)$ diverge (conv + div), $\sum \underbrace{\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}}_{u_n}$ $(n \geqslant 2)$ alternée

$|u_n| = \dfrac{1}{n+(-1)^n}$

$\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n} - \dfrac{(-1)^n}{n} = \dfrac{-1}{[n+(-1)^n]n} \sim -\dfrac{1}{n^2}$

$|u_{2n}| = \dfrac{1}{2n+1}$ $\qquad$ $|u_{2n+1}| = \dfrac{1}{2n}$

donc $|u_{2n+1}| \geqslant |u_{2n}|$

$\to$ ne vérifie pas le CSA

$\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \underbrace{\dfrac{(-1)^n}{n}}_{\text{conv par le CSA}} + \underbrace{O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{\text{conv absolument}}$

## V Complément

### 1. transformation d'Abel

$(u,v)\in(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$

$u_0=S_0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=S_n-S_{n-1}$

$$\sum_{k=0}^{n}u_kv_k=u_0v_0+\sum_{k=1}^{n}(S_k-S_{k-1})v_k=u_0v_0+\sum_{k=1}^{n}S_kv_k-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}S_{k-1}v_k}_{=\sum_{q=0}^{n-1}S_qv_{q+1}}$$

$$=u_0v_0+S_nv_n-S_0v_1+\sum_{k=1}^{n-1}S_k(v_k-v_{k+1})$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_kv_k=S_nv_n+\sum_{k=0}^{n-1}S_k(v_k-v_{k+1})$

### 2. exemple

$\theta\notin\pi\mathbb{Z}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\cos n\theta$, $v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\qquad \sum u_nv_n=\sum\frac{\cos n\theta}{\sqrt{n+1}}$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{-2i\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\theta/2}}\right)$$

$$S_n=\mathrm{Re}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{n}{2}\theta}\right)=\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos(\frac{n}{2}\theta)$$

donc $|S_n|\leqslant\frac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|}$ indépendant de $n$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos k\theta}{\sqrt{k+1}}=\frac{S_n}{\sqrt{n+1}}+\sum_{k=0}^{n-1}S_k(v_k-v_{k+1})$$

$\left|\frac{S_n}{\sqrt{n+1}}\right|\leqslant\frac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\longrightarrow 0$

$|S_k(v_k-v_{k+1})|=|S_k|\,|v_k-v_{k+1}|\leqslant\frac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|}\underbrace{(v_k-v_{k+1})}$

$v\searrow$ donc $v_k>v_{k+1}$ — terme général d'une série télescopique $\rightarrow$ converge

donc $\sum|S_k(v_k-v_{k+1})|$ converge

donc $\sum S_k(v_k-v_{k+1})$ converge absolument

d'où $\sum\frac{\cos n\theta}{\sqrt{n+1}}$ converge

## D) Séries doubles

### I Suites doubles

application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{K}$

notation : $u=(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ $\qquad u=(u_{p,q})_{(p,q)\in([p_0,+\infty[\cap\mathbb{N})\times([q_0,+\infty[\cap\mathbb{N})}$

### II Séries doubles à termes positifs

soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double à termes positifs, $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $u_{p,q}\geqslant 0$

**Th** si $\forall p\in\mathbb{N}$, ① la série $\sum_q u_{p,q}$ converge et a pour somme $v_p=\sum_{q=0}^{\infty}u_{p,q}$
② la série $\sum v_p$ converge

alors $\forall q\in\mathbb{N}$, ① la série $\sum_p u_{p,q}$ converge et a pour somme $w_q=\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}$
② la série $\sum w_q$ converge

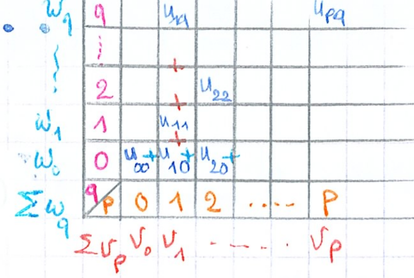
et les sommes sont les mêmes : $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}v_p=\sum_{q=0}^{\infty}w_q$ (1)

rem : • th d'inversion de limites : (1) $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}u_{p,q}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\left(\lim_{m\to+\infty}\sum_{q=0}^{m}u_{p,q}\right)=\lim_{m\to+\infty}\sum_{q=0}^{m}\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}u_{p,q}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}u_{p,q}\right)=\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{q=0}^{m}\sum_{p=0}^{n}u_{p,q}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty}\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\0\leqslant q\leqslant m}}u_{p,q}\right)=\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\0\leqslant q\leqslant m}}u_{p,q}\right)$$






- $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq u_{p,q} \leq v_p$ converge (q fixé)
  donc $\sum_p u_{p,q}$ converge
  donc $w_q = \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$ existe

- $\sum v_p$ à termes positifs $\quad A = \sum_{p=0}^{\infty} v_p$
  $\forall q_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{q=0}^{q_0} u_{p,q} \leq v_p$

  et $\sum_{p=0}^{\infty} \Big( \underbrace{\sum_{q=0}^{q_0} u_{p,q}}_{} \Big) \leq \sum_{p=0}^{\infty} v_p = A$

  $q_0+1$ séries convergentes (en p)

  somme de $q_0+1$ séries convergentes

  donc $\sum_{p=0}^{\infty} \Big( \sum_{q=0}^{q_0} u_{p,q} \Big) = \sum_{q=0}^{q_0} \Big( \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} \Big)$

  d'où $\sum_{q=0}^{q_0} \Big( \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} \Big) \leq A$, $\quad \forall q_0 \in \mathbb{N}, \sum_{q=0}^{q_0} w_q \leq A$

  série $\begin{cases} \text{à termes positifs} \\ \text{à sommes partielles bornées} \end{cases}$ donc converge

- de plus $\sum_{q=0}^{\infty} w_q \leq \sum_{p=0}^{\infty} v_p$

  les hyp. par rapport à p sont satisfaites par rapport à q
  donc les conclusions aussi, d'où $\sum_{p=0}^{\infty} v_p \leq \sum_{q=0}^{\infty} w_q$

|| La suite double à termes positifs $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est <u>sommable</u>
|| si les hypothèses ① et ② ou les ccl ① et ② sont satisfaites.

$P_p$) si $\begin{cases} \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 \leq u_{p,q} \leq u'_{p,q} \\ (u'_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \end{cases}$ alors $(u_{p,q})$ est <u>sommable</u>

|| p fixé $\quad 0 \leq u_{p,q} \leq u'_{p,q}$ converge $\qquad 0 \leq v_p = \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} \leq \sum_{q=0}^{\infty} u'_{p,q} = v'_p$

# III Séries doubles réelles ou complexes

1. || La suite double $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est <u>sommable</u> si
   || la <u>suite double à termes positifs</u> $(|u_{p,q}|)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est <u>sommable</u>

$P_p$1) $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$ $\quad u_{p,q}$ est sommable ssi 1 des deux conditions suivantes est vérifiée. (car elles sont équivalentes)

$\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} \sum_q |u_{p,q}| \text{ converge} \\ \Big(\text{si } v'_p = \sum_{q=0}^{\infty} |u_{p,q}| \text{ alors } \sum v'_p \text{ converge}\Big) \end{cases}$

$\forall q \in \mathbb{N}, \begin{cases} \sum_p |u_{p,q}| \text{ converge} \\ \Big(\text{si } w'_q = \sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}| \text{ alors } \sum w'_p \text{ converge}\Big) \end{cases}$

$P_p$ 2) L'ensemble des suites doubles sommables est un $\mathbb{K}$-ev

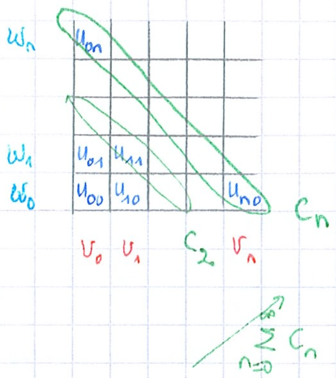
<u>Th</u> soit $u_{p,q}$ une suite double sommable,

1. $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_q u_{p,q}$ absolument convergente
   si $v_p = \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}$ alors <u>$\sum v_p$</u> est <u>absolument convergente</u>
2. $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_p u_{p,q}$ absolument convergente
   si $w_q = \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$ alors <u>$\sum w_q$</u> est <u>absolument convergente</u>
3. $\sum_{p=0}^{\infty} v_p = \sum_{q=0}^{\infty} w_q$

4. la suite $\left(\sum_{p=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} u_{p,q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty} v_p = \sum_{q=0}^{\infty} w_q$

5. pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $C_n = \sum_{p+q=n} u_{p,q} = \sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}$

la série $\sum C_n$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{p=0}^{\infty} v_p = \sum_{q=0}^{\infty} w_q$




1. $\forall p\in\mathbb{N}$, $\sum_q |u_{p,q}|$ est convergente
donc $\sum_q u_{p,q}$ est (absolument) convergente
donc $v_p = \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}$ existe
et $|v_p| \leq \sum_{q=0}^{\infty} |u_{p,q}| = v'_p$
or, $\sum v'_p$ converge ($P_1$)
donc $\sum |v_p|$ converge, donc $\sum v_p$ est absolument convergente

4. soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} v_p - \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} - \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} + \sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} - \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}$$

$$= \cancel{\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}} + \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=n+1}^{\infty} u_{p,q} + \sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} - \cancel{\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}}$$

$\sum_{p=0}^{\infty} v_p$ : dans une colonne, on ajoute toutes les cases
on le fait pour toutes les colonnes (de 1 à p)
on ajoute ces p résultats
$\sum_{q=0}^{\infty} w_q$ : dans une ligne ....
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ : sur une diagonale, ............
pour toutes les diago (de 1 à n)

- $\left|\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=n+1}^{\infty} u_{p,q}\right| \leq \sum_{p=0}^{n}\left|\sum_{q=n+1}^{\infty} u_{p,q}\right| \leq \sum_{q=n+1}^{\infty}\sum_{p=0}^{n} |u_{p,q}| \leq \sum_{q=n+1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}| = \sum_{q=n+1}^{\infty} w'_q$

reste d'ordre n d'une série convergente

donc $\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=n+1}^{\infty} u_{p,q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

- $\left|\sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}\right| = \left|\sum_{p=n+1}^{\infty} v_p\right| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} |v_p| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} v'_p$

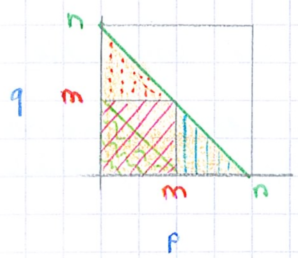
donc $\sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

- donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{\substack{0\leq p\leq n\\ 0\leq q\leq n}} u_{p,q} - \sum_{p=0}^{\infty} v_p\right) = 0$

donc $\left(\sum_{\substack{0\leq p\leq n\\ 0\leq q\leq n}} u_{p,q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{p=0}^{\infty} v_p$

- de même, $\left(\sum_{\substack{0\leq p\leq n\\ 0\leq q\leq n}} u_{p,q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{q=0}^{\infty} w_q$

3. en particulier, $\sum_{p=0}^{\infty} v_p = \sum_{q=0}^{\infty} w_q$




5. $\sum_{0\leq p+q\leq n} u_{p,q} - \sum_{\substack{0\leq p\leq m\\ 0\leq q\leq m}} u_{p,q} = \sum_{\substack{0\leq p+q\leq n\\ \text{non}\left(\substack{0\leq p\leq m\\ 0\leq q\leq m}\right)}} u_{p,q} = \sum_{\substack{0\leq p+q\leq n\\ p>m}} u_{p,q} + \sum_{\substack{0\leq p+q\leq n\\ q>m}} u_{p,q}$

$\left|\sum_{p+q\leq n} u_{p,q} - \sum_{\substack{p\leq m\\ q\leq m}} u_{p,q}\right| \leq \sum_{p>m}\underbrace{\sum_{q=0}^{\infty} |u_{p,q}|}_{v'_p} + \sum_{q>m}\underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}|}_{w'_q}$

$\sum c_n$

$\leq \sum_{p=m+1}^{\infty} v'_p + \sum_{q=m+1}^{\infty} w'_q$ restes d'ordre de séries converg

## 2 - produit de Cauchy

soient $\sum a_p$ et $\sum b_q$ 2 séries réelles ou complexes absolument convergentes
alors, la suite double $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable

en posant $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, la série $\sum c_n$ est absolument convergente

et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q\leq n} a_p b_q\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_p b_q = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \sum_{q=0}^{\infty} b_q$

Il suffit de démontrer que $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable
soit $p\in\mathbb{N}$, $\forall q\in\mathbb{N}$, $|a_p b_q| = |a_p||b_q|$
or, $\sum |b_q|$ converge donc $\sum_q |a_p b_q|$ converge

$v'_p = \sum_{q=0}^{\infty} |a_p b_q| = |a_p| \sum_{q=0}^{\infty} |b_q|$

$v_0 \quad v_1 \quad c_2 \quad v_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

4. soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} v_p - \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} - \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} + \sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} - \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}$$

$$= \cancel{\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}} + \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=n+1}^{\infty} u_{p,q} + \sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} - \cancel{\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}}$$

$\sum_{p=0}^{\infty} v_p$ : dans une colonne, on ajoute toutes les cases
on le fait pour toutes les colonnes (de 1 à p)
on ajoute ces p résultats
$\sum_{q=0}^{\infty} w_q$ : dans une ligne .....
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ : sur une diagonale, .........
pour toutes les diago (de 1 à n)

• $\left|\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=n+1}^{\infty} u_{p,q}\right| \leq \sum_{p=0}^{n}\left|\sum_{q=n+1}^{\infty} u_{p,q}\right| \leq \sum_{q=n+1}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}|u_{p,q}| \leq \sum_{q=n+1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|u_{p,q}| = \sum_{q=n+1}^{\infty} w'_q$

reste d'ordre n d'une série convergente

donc $\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=n+1}^{\infty} u_{p,q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

• $\left|\sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}\right| = \left|\sum_{p=n+1}^{\infty} v_p\right| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty}|v_p| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} v'_p$

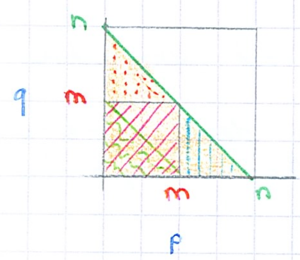
donc $\sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

• donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{\substack{0\leq p\leq n\\0\leq q\leq n}} u_{p,q} - \sum_{p=0}^{\infty} v_p\right) = 0$

donc $\left(\sum_{\substack{0\leq p\leq n\\0\leq q\leq n}} u_{p,q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{p=0}^{\infty} v_p$

• de même, $\left(\sum_{\substack{0\leq p\leq n\\0\leq q\leq n}} u_{p,q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{q=0}^{\infty} w_q$

3. en particulier, $\sum_{p=0}^{\infty} v_p = \sum_{q=0}^{\infty} w_q$




5. $\sum_{0\leq p+q\leq n} u_{p,q} - \sum_{\substack{0\leq p\leq m\\0\leq q\leq m}} u_{p,q} = \sum_{\substack{0\leq p+q\leq n\\ \text{non}\left(\substack{0\leq p\leq m\\0\leq q\leq m}\right)}} u_{p,q} = \sum_{\substack{0\leq p+q\leq n\\p>m}} u_{p,q} + \sum_{\substack{0\leq p+q\leq n\\q>m}} u_{p,q}$

$$\Bigg|\underbrace{\sum_{p+q\leq n} u_{p,q}}_{\sum c_n} - \sum_{\substack{p\leq m\\q\leq m}} u_{p,q}\Bigg| \leq \sum_{p>m}\underbrace{\sum_{q=0}^{\infty}|u_{p,q}|}_{v'_p} + \sum_{q>m}\underbrace{\sum_{p=0}^{\infty}|u_{p,q}|}_{w'_q}$$

$$\leq \sum_{p=m+1}^{\infty} v'_p + \sum_{q=m+1}^{\infty} w'_q$$

restes d'ordre m de séries convergentes

## 2. produit de Cauchy

soient $\sum a_p$ et $\sum b_q$ 2 séries réelles ou complexes absolument convergentes
alors, la suite double $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable

en posant $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, la série $\sum c_n$ est absolument convergente

et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_p b_q = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \sum_{q=0}^{\infty} b_q$

Il suffit de démontrer que $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable
soit $p\in\mathbb{N}$, $\forall q\in\mathbb{N}$, $|a_p b_q| = |a_p||b_q|$
or, $\sum |b_q|$ converge donc $\sum_q |a_p b_q|$ converge

$v'_p = \sum_{q=0}^{\infty}|a_p b_q| = |a_p|\sum_{q=0}^{\infty}|b_q|$

or, $\sum |a_p|$ converge donc $\sum_p |a_p|\left(\sum_{q=0}^{\infty}|b_q|\right)$ converge

donc $\sum v'_p$ converge

19

$\sum c_n$ est la série produit des séries $\sum a_p$ et $\sum b_q$

ex : $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_p = \frac{x^p}{p!}$, $b_q = \frac{y^q}{q!}$ $\quad (x,y)\in\mathbb{C}^2$

si $x=0$, $a_1 = \dots = a_p = 0$, $\sum a_p$ est absolument convergente
si $x\neq 0$, $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_p\neq 0$,

$\left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}\frac{p!}{|x|^p} = \frac{|x|}{p} \to 0$ par d'Alembert, $\sum a_p$ converge absolument

on pose $\exp(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{p!}$

$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \sum_{q=0}^{\infty} b_q$ donc $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}}_{\exp(x+y)} = \underbrace{\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{p!}\right)}_{\exp x}\underbrace{\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{y^q}{q!}\right)}_{\exp y}$

20