1$^{\text{ère}}$ partie : Rappels de trigonométrie

1. a) Périodes des fonctions trigonométriques

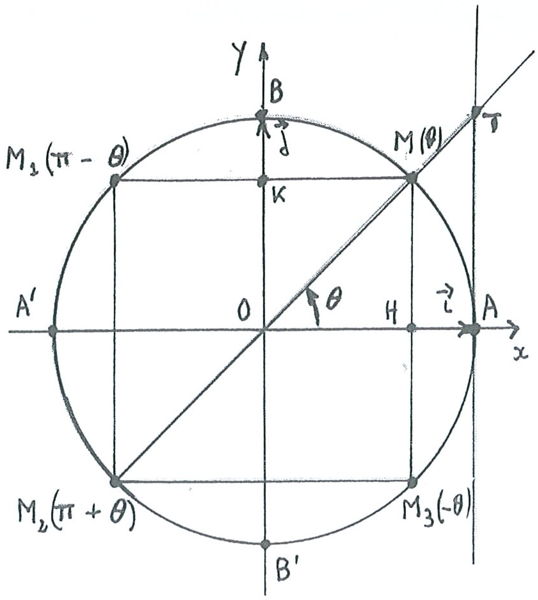
- Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques :

$$\boxed{\text{pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \\ \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \end{cases}}$$

- La fonction tangente, définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

est π-périodique :

$$\boxed{\text{pour tout } \theta \in D,\ \tan(\theta + \pi) = \tan\theta}$$



$$\begin{cases} \sin\theta = \overline{OK} \\ \cos\theta = \overline{OH} \\ \tan\theta = \overline{AT} \end{cases}$$

b) Parités

Les fonctions sinus et tangente sont impaires. La fonction cosinus est paire.

$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

c) Autres symétries

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$
$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \operatorname{cotan}\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

d) Remarques

$\cos(\theta + k\pi) = (-1)^k \cos\theta$	$\sin(\theta + k\pi) = (-1)^k \sin\theta$

2. Formules de base

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\sin(k\pi) = 0$	$\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$	$\cos(k\pi) = (-1)^k$	$\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$

3. Valeurs particulières

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
tan(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{2} \# 1,414$ $\sqrt{3} \# 1,732$

4. Formules d'addition et de duplication

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ dém	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$	$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$	$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

$1+\cos(a) = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)$	$\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
$1-\cos(a) = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$	$\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$	$\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

5. Transformation d'un produit en une somme

→ utile pour calculer des intégrales $\int \ldots \times \ldots = \int \ldots + \int \ldots$

$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$	$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$	$\sin(b)\cos(a) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$

6. Transformation d'une somme en un produit

On pose $\begin{cases} p = a+b \\ q = a-b \end{cases}$ donc $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$

$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	$\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

7. Transformation de $a\sin(x) + b\cos(x)$ $(a,b) \neq (0,0)$

dém

$a\sin(x) + b\cos(x) = A\cos(x+\varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{b}{A}$, $\sin\varphi = -\dfrac{a}{A}$

En particulier :

$\cos(x)+\sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
$\cos(x)-\sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

8. Expressions en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$, $x \in \left]-\pi, \pi\right[$

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ dém	$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ dém	$\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

dém

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b + \sin b\cos a}{\cos a\cos b - \sin a\sin b} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$

en divisant par $\cos a \cos b$

dém

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right]$$

$-\sin\varphi$ $\qquad$ $\cos\varphi$

ex : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right] = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right]$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left[\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right]$

$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

dém

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

en divisant par $\cos^2\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

9. Equations trigonométriques ($k \in \mathbb{Z}$)

$\cos(x)=0$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cos(x)=1$	$x = 2k\pi$
$\cos(x)=-1$	$x = \pi + 2k\pi$
$\cos(x)=\cos(a)$	$x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$

$\sin(x)=0$	$x = 2k\pi$
$\sin(x)=1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\sin(x)=-1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\sin(x)=\sin(b)$	$x = b + 2k\pi$ ou $x = \pi - b + 2k\pi$

$\tan(x)=0$	$x = k\pi$	$\tan(x)=\tan(c)$	$x = c + k\pi$

10. Formules de dérivation

$f(x)$	$f'(x)$	domaine de validité
$\sin(x)$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

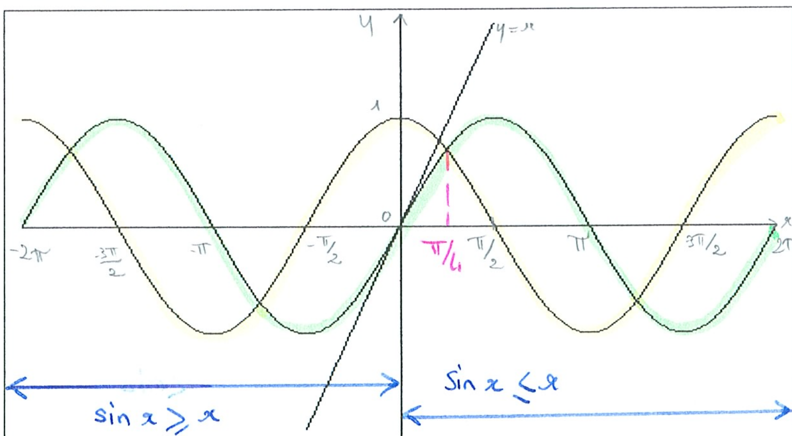
$f(x)$	$f'(x)$	domaine de validité
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\tan(ax+b)$	$\frac{a}{\cos^2(ax+b)}$ $a(1+\tan^2(ax+b))$	$ax+b \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

11. Limites usuelles

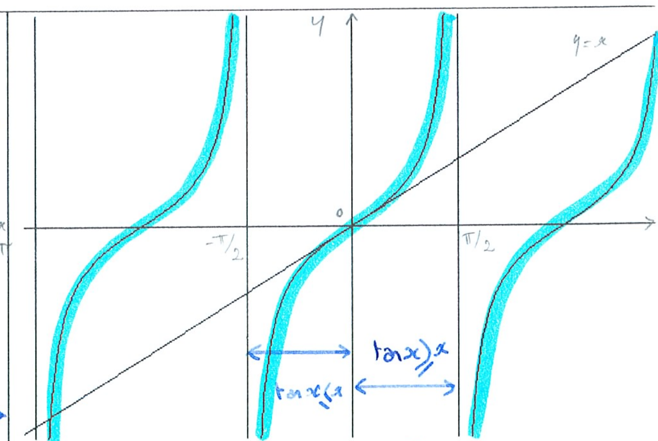
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$

pour $a \neq 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a$

12. Courbes



$y = \sin x$, $y = \cos x$



$y = \tan x$

13. Inégalités usuelles

si $x > 0$, $-x < \sin x < x$ dim	si $x < 0$, $x < \sin x < -x$	$\sin x = x$ si et seulement si $x = 0$	pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lvert \sin x \rvert \leq \lvert x \rvert$

si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $x < \tan x$	si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\tan x < x$

$\lvert \sin x \rvert \leq \lvert x \rvert$

dém

$f : x \longmapsto \sin x - x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ (égalité en des valeurs isolées)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$ 0 0	0	0 0 $-\dots$	
$f(x)$	$+$ ↘		0	↘ $-$	

pour $x < 0$, $\sin x < x$

pour $x > 0$, $\sin x > x$

$\sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$g : x \longmapsto \sin x + x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$g'(x) = \cos x + 1 \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$ 0	0	0 $+$ 0 0	
$g(x)$	$-$ ↗		0	↗ $+$	

pour $x < 0$, $\sin x < -x$

pour $x > 0$, $\sin x > -x$

$\sin x = -x$

$\Leftrightarrow x = 0$

donc, pour $x < 0$, $-x \leq \sin x \leq x$

$x > 0$, $x \leq \sin x \leq -x$

2ème partie : Compléments d'analyse

I Théorème de la bijection réciproque

Soit I un intervalle. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur I.
Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a \neq b$ et $a < b$.
On a $f(a) < f(b)$ ou $f(b) < f(a)$
$f(a) \neq f(b)$ donc f est injective.

- f réalise une bijection de I sur $f(I) = J$.
  On peut considérer la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$.
  $f(I) = J$ est un intervalle.

Th [si f est strictement croissante sur I alors f^{-1} l'est sur J]

dém | soit $(\alpha, \beta) \in J^2$ avec $\alpha < \beta$
si $f^{-1}(\alpha) \geqslant f^{-1}(\beta)$ alors, $f[f^{-1}(\alpha)] \geqslant f[f^{-1}(\beta)]$
donc $\alpha \geqslant \beta$ ce qui contredit l'hypothèse
ainsi, $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$
f^{-1} est donc strict croissante sur J

- f^{-1} est continue sur J.
- $M(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
  $\Leftrightarrow M'(y,x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$
  $\rightarrow$ symétrie d'axe $x = y$

Th
soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I.
- f est une bijection de I sur $f(I) = J$, qui est un intervalle
- f^{-1} est une bijection de J sur I
- f^{-1} est continue, strictement monotone sur J et de même sens de variation que f

Les représentations graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à $y = x$

II Dérivation d'une fonction réciproque

Th
soit I un intervalle. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement monotone sur I. (donc f est une bijection de I sur $f(I) = J$

$I \xrightarrow{f} J$ $J \xrightarrow{f^{-1}} I$
$a \mapsto f(a) = b$ $b \mapsto f^{-1}(b) = a$)

si $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases}$

alors, $\begin{cases} f^{-1} \text{ est dérivable en } b = f(a) \\ (f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(b)]} \end{cases}$

ex 1 :
$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 = y \end{array}$ $f^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ y \longmapsto \sqrt{y} = x \end{array}$

soit $x > 0$, $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } x \\ f'(x) = 2x \neq 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} f^{-1} \text{ est dérivable en } y = f(x) \\ (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases}$

f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, pour $y>0$: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

2 $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 = y \end{array}$ $\quad f^{-1}: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \sqrt[3]{y} = x \end{array}$

soit $x \neq 0$, $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } x \\ f'(x) = 3x^2 \neq 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} f^{-1} \text{ est dérivable en } y = x^3 \\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2} = \frac{1}{3y^{2/3}} \end{cases}$

si x décrit $\mathbb{R}^*$, y aussi

donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, pour $y \neq 0$: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$

3 $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 + 2x + x^3 + 2x^5 \end{array}$ est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$? Etudier la dérivabilité de f^{-1}

- f, fonction polynôme, est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
  donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
  On peut considérer f^{-1}
- $\begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \quad\quad y = 1 + 2x + x^3 + 2x^5 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R} \\ y \quad\quad x \end{array}$

  soit $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } x \\ f'(x) = 2 + 3x^2 + 10x^4 \neq 0 \end{cases}$

  donc f est dérivable en $y = f(x)$.

  f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f(-1)$ puis $(f^{-1})'(-4)$.

$f(-1) = 1 - 2 - 1 - 2 = -4$ $\qquad (f^{-1})'(-4) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2+3+10} = \frac{1}{15}$

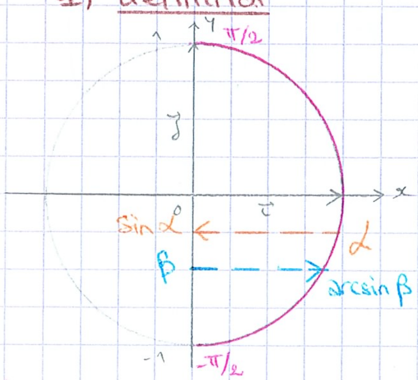
Méthode $\rightarrow$ pour calculer $(f^{-1})'(b)$, on calcule $f(a) = b$

3ème partie : Fonctions trigonométriques réciproques

I Arcsinus

rem : $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ n'est pas bijective donc ne possède pas d'application réciproque.

1) définition



La restriction de sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue, strictement croissante, réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

Elle admet donc une bijection réciproque appelée arcsinus.

$\arcsin : \begin{array}{l} [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x \longmapsto y = \arcsin x \end{array}$

$$\boxed{\begin{cases} y = \arcsin x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

B

2) propriétés

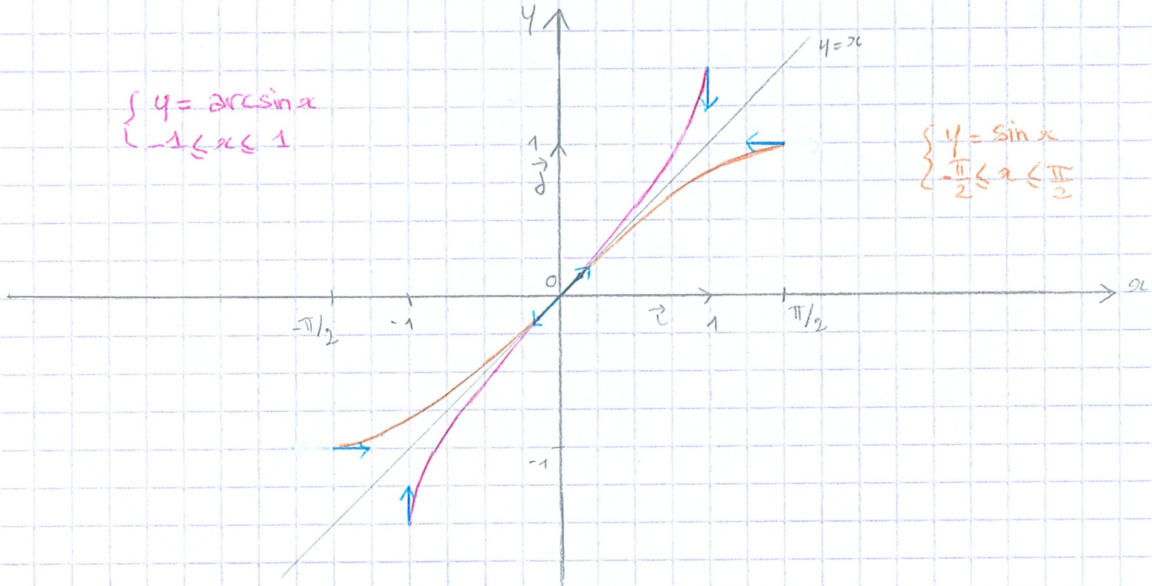
a

- arcsinus est défini sur $[-1,1]$
  $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- arcsinus est 1 bijection de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- sur $[-1,1]$, arcsinus est continue, strictement croissante.

x	-1	0	1
$\arcsin x$	$-\pi/2$	0 ↗	$\pi/2$

$y = \arcsin x$: "y est l'arc dont le sinus vaut x."

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$



b imparité

$\begin{cases} y = \arcsin x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ x = \sin y \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq -y \leq \frac{\pi}{2} \\ -x = \sin(-y) \end{cases}$ $\begin{cases} -y = \arcsin(-x) \\ -1 \leq -x \leq 1 \end{cases}$

Th arcsinus est impaire : pour $x \in [-1,1]$, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

c les 4 formules

- $\arcsin : \begin{array}{l} [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x \longmapsto y = \arcsin x \end{array}$ $\quad \sin : \begin{array}{l} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1] \\ y \longmapsto x = \sin y \end{array}$

  soit $x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin x) = x$
- $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\arcsin x) \geq 0$
  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}$
  $= \sqrt{1 - x^2}$
- soit $x \in]-1,1[$, $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- soit $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin y) = y$

Th

pour $x \in [-1,1]$, $\begin{cases} \sin(\arcsin x) = x \\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

pour $x \in]-1,1[$, $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

pour $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin y) = y$

ex : Calculer $\tan(\arcsin \frac{5}{13})$

$$\tan\left(\arcsin \frac{5}{13}\right) = \frac{\sin(\arcsin \frac{5}{13})}{\cos(\arcsin \frac{5}{13})} = \frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2}} = \frac{5}{12}$$

rem : $\arcsin(\sin \pi) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi$

$\arcsin(\sin \frac{3\pi}{2}) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2}$

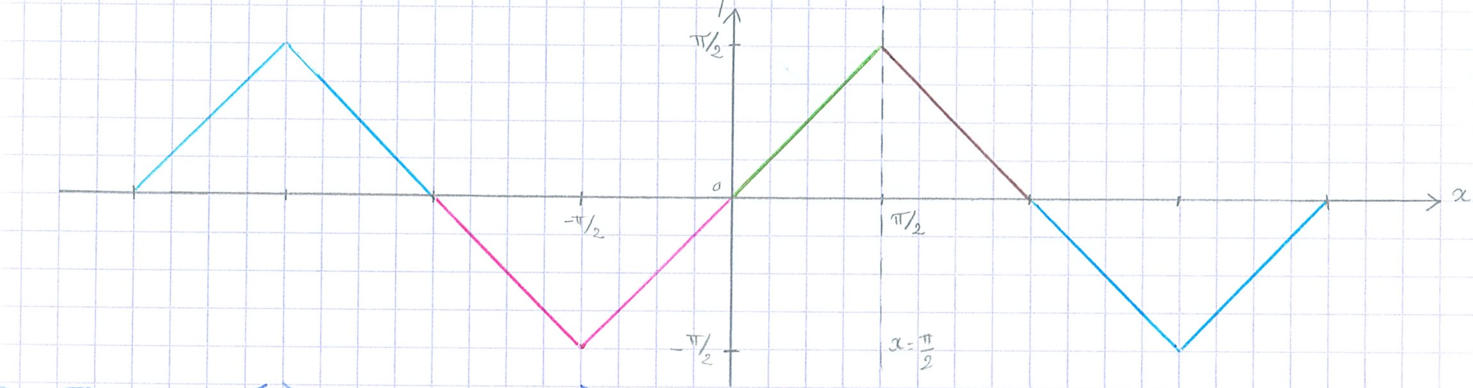
$\arcsin(\sin \frac{5\pi}{4}) = \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$

⚠ $\arcsin(\sin y)$ existe pour tout $y \in \mathbb{R}$,
en général, $\arcsin(\sin y) \neq y$
cependant, $\arcsin(\sin y) = y \iff y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ [ssi on compose des appl. récip.)

3) exemples usuels

a) représenter $f : x \longmapsto \arcsin(\sin x)$

- f est définie, continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, on étudie f sur $[-\pi, \pi]$
- $f(-x) = \arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x) = -f(x)$
  f est impaire donc O est centre de symétrie
  on étudie donc f sur $[0, \pi]$.
- $f(\pi - x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \arcsin(\sin x) = f(x)$
  $D : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie
  on étudie donc f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
- pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = x$



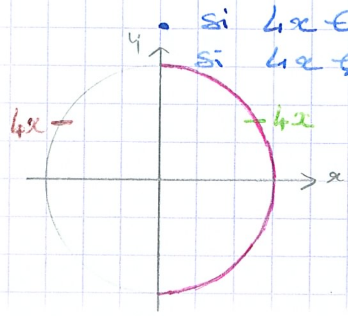
$y = -x + 2\pi$ $\quad$ $y = -x - \pi$ $\quad$ $y = x$ $\quad$ $y = -x + \pi$ $\quad$ $y = x - 2\pi$

b) représenter $g : x \longmapsto \arcsin\sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{2}}$

$1 - \cos 4x = 2\sin^2(2x)$ donc $g(x) = \arcsin|\sin(2x)|$

- g est définie, continue sur $\mathbb{R}$, π-périodique
- $g(x + \frac{\pi}{2}) = \arcsin|\sin(2x + \pi)| = g(x)$ donc $\frac{\pi}{2}$ est période
  on se place sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
- $g(-x) = \arcsin|\sin(-2x)| = g(x)$ g est paire
  on se place sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.
- pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $g(x) = \arcsin(\sin 2x) = 2x$

c) pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, simplifier $\varphi(x) = \arcsin(\sin 4x)$



- si $4x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi(x) = 4x$
- si $4x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on cherche θ / $\begin{cases} \sin 4x = \sin \theta \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

* si $4x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$,
$\begin{cases} \sin 4x = \sin(4x - 2k\pi) \\ -\frac{\pi}{2} \leq 4x - 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

* si $4x \in \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$,
$\begin{cases}\sin(4x)=\sin(\pi-4x)\\ -\frac{\pi}{2}-2k\pi \leq \pi-4x \leq \frac{\pi}{2}-2k\pi\end{cases} \iff \begin{cases}\sin(4x)=\sin(\pi-4x+2k\pi)\\ -\frac{\pi}{2}\leq \pi-4x+2k\pi \leq \frac{\pi}{2}\end{cases}$

x	$-\pi/2$ … $-3\pi/8$	$-3\pi/8$ … $-\pi/8$	$-\pi/8$ … $\pi/8$	$\pi/8$ … $3\pi/8$	$3\pi/8$ … $\pi/2$
$4x$	-2π … $-3\pi/2$	$-3\pi/2$ … $-\pi/2$	$-\pi/2$ … $\pi/2$	$\pi/2$ … $3\pi/2$	$3\pi/2$ … 2π
$\sin(4x)$	$\sin(4x+2\pi)$, $0\leq 4x+2\pi\leq\frac{\pi}{2}$	$\sin(\pi-4x)$, $\frac{3\pi}{2}\leq\pi-4x\leq\frac{5\pi}{2}$; $\sin(-\pi-4x)$, $-\frac{\pi}{2}\leq-\pi-4x\leq\frac{\pi}{2}$	$\sin 4x$	$\sin(\pi-4x)$, $-\frac{\pi}{2}\leq\pi-4x\leq\frac{\pi}{2}$	$\sin(4x-2\pi)$, $-\frac{\pi}{2}\leq 4x-2\pi\leq\frac{\pi}{2}$
$\varphi(x)$	$4x+2\pi$	$-\pi-4x$	$4x$	$\pi-4x$	$4x-2\pi$

$\boxed{d}$ résoudre (1) : $\arcsin x = \arcsin\frac{12}{13}+\arcsin\frac{4}{5}$

$(1) \Rightarrow (2)$

(2) : $x=\sin(\arcsin x)=\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}+\arcsin\frac{4}{5}\right)$

$=\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)+\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$

$=\frac{12}{13}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}+\frac{4}{5}\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{1}{13}\left(\frac{36}{5}+\frac{20}{5}\right)=\frac{56}{65}$

or, $\begin{cases}\arcsin\frac{12}{13}\approx 1,18\\ \arcsin\frac{4}{5}\approx 0,93\end{cases}$ $\arcsin\frac{12}{13}+\arcsin\frac{4}{5}\approx 2,10>\frac{\pi}{2}$ $\arcsin\frac{56}{65}\approx 1,04$

donc $\arcsin\frac{12}{13}+\arcsin\frac{4}{5}\neq\arcsin\frac{56}{65}$

rem : si on ne raisonne pas par équivalence, il faut faire une vérification

⚠ rem : $A=B \Rightarrow \sin A=\sin B$

On encadre $\arcsin\frac{12}{13}+\arcsin\frac{4}{5}$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\frac{12}{13}\leq 1$ donc $\frac{\pi}{3}\leq\arcsin\frac{12}{13}\leq\frac{\pi}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\frac{4}{5}\leq 1$ donc $\frac{\pi}{4}\leq\arcsin\frac{4}{5}\leq\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}<\frac{7\pi}{12}\leq\arcsin\frac{12}{13}+\arcsin\frac{4}{5}$

donc (1) n'a pas de solution

$\boxed{e}$ résoudre (2) : $\arcsin x=\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{1}{3}$

$0<\frac{5}{13}<\frac{1}{2}$ donc $0<\arcsin\frac{5}{13}<\frac{\pi}{6}$

$0<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ donc $0<\arcsin\frac{1}{3}<\frac{\pi}{6}$

$0<\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{1}{3}<\frac{\pi}{3}$

(2) admet donc 1 unique solution.

$(2)\Rightarrow x=\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{1}{3}\right)$

$=\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)+\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$

$=\frac{5}{13}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{1}{3}\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{13}$

$=\frac{10\sqrt{2}+12}{39}$

(2) ayant 1 unique solution, $x=\frac{10\sqrt{2}+12}{39}$ convient.

$\boxed{f}$ résoudre (3) : $\arcsin x+\arcsin\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$ et (4) : $\arcsin x+\arcsin(x\sqrt{3})=\arcsin(2x)$

(3) soit $\varphi(x)=\arcsin x+\arcsin\frac{x}{2}$. φ est définie sur $[-1,1]$, continue et strictement croissante sur $[-1,1]$

φ est 1 bijection de $[-1,1]$ sur $\varphi([-1,1])=[\varphi(-1),\varphi(1)]$

$=\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$

or, $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ donc (3) possède 1 unique solution dans $[-1,1]$, et même dans $[0,1]$ car $\varphi(0)=0$

$\arcsin x = \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{x}{2} \Rightarrow x = \sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$$(4+\sqrt{2})x = 2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$(4+\sqrt{2})^2x^2 = 8\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$ avec $x \geq 0$ (pour avoir l'équivalence)

$(20+8\sqrt{2})x^2 = 8$ avec $x \geq 0$

$x^2 = \frac{2}{5+\sqrt{2}}$ avec $x \geq 0$

Ainsi $x = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{2}}}$

(3) ayant 1 unique solution, $x = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{2}}}$ convient nécessairement

Méthode $\rightarrow$ pour utiliser 1 bijection, il faut avoir $\varphi(a) = $ cste et déterminer si cste $\in$ ensemble de définition

(4) : $\arcsin x + \arcsin x\sqrt{3} = \arcsin 2x$

on a $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

(4) $\Rightarrow$ $x\cos(\arcsin x\sqrt{3}) + x\sqrt{3}\cos(\arcsin x) = 2x$

$x\sqrt{1-3x^2} + x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = 2x$

donc $x = 0$ ou $\sqrt{1-3x^2} + \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = 2$

$x = 0$ ou $1-3x^2 + 3(1-x^2) + 2\sqrt{3}\sqrt{1-3x^2}\sqrt{1-x^2} = 4$

$x = 0$ ou $-6x^2 = -2\sqrt{3}\sqrt{1-3x^2}\sqrt{1-x^2}$

$x = 0$ ou $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{1-3x^2}\sqrt{1-x^2}$

$x = 0$ ou $3x^4 = (1-3x^2)(1-x^2) = 1 - x^2 - 3x^2 + 3x^4$

$x = 0$ ou $1 - 4x^2 = 0$

$x = 0$ ou $x^2 = \frac{1}{4}$

$x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

On vérifie : $\rightarrow$ 0 est solution

$\rightarrow \arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} = \arcsin 2\frac{1}{2}$

$\rightarrow \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} = \arcsin\left(-2\frac{1}{2}\right)$

(4) a donc 3 solutions : $-\frac{1}{2}$, 0 et $\frac{1}{2}$.

4) dérivation de arcsinus

a) $[-1,1] \xrightarrow{\arcsin} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad$ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sin} [-1,1]$

$x \longmapsto y = \arcsin x$ $\qquad$ $y \longmapsto x = \sin y$

soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, sinus est dérivable en y et

$(\sin)'(y) = \cos y \neq 0$

donc arcsinus est dérivable en $x = \sin y$ et

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{(\sin)'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $x \in]-1,1[$

Th arcsinus est définie, continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$

pour $x \in]-1,1[$, $(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) généralisation

$$\varphi : I \xrightarrow{u} [-1,1] \xrightarrow{\text{arcsinus}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \longmapsto u(x) \longmapsto \arcsin(u(x))$$

Th Si $\begin{cases} u \text{ est dérivable en } x \\ u(x) \in [-1,1] \end{cases}$ alors, $\begin{cases} \varphi \text{ est dérivable en } x \\ \varphi'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} \end{cases}$

ex : 1. $\varphi : x \longmapsto \arcsin(3x)$

φ est définie, continue sur $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ et dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$,
pour $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$,
$$\varphi'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

2. $\varphi : x \longmapsto \arcsin(\sqrt{x})$

φ est définie, continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$,
pour $x \in]0,1[$,
$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

rem : 1 primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ est $2\arcsin(\sqrt{x})$.

3. $\varphi : x \longmapsto \arcsin(2x-1)$

φ est définie, continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$,
pour $x \in]0,1[$
$$\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+4x}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

rem : 1 primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ est $\arcsin(2x-1)$.

5) application aux primitives

Th 1 primitive sur $]-1,1[$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin x$

ex :
$$\int_{1/3}^{-1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{1/3}^{-1/2} = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{1}{3}$$

généralisation :

Th Soit $u : I \longrightarrow]-1,1[$ dérivable sur I
1 primitive sur I de $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$ s'intègre en $x \mapsto \arcsin(u(x))$

ex : 1.

* $$\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\Big[\arcsin(2x)\Big]_0^{1/4} = \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

* $$\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int_0^{1/3} \frac{dx}{2\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}\int_0^{1/3} \frac{3/2}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\left[\arcsin\frac{3x}{2}\right]_0^{1/3}$$
$$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{18}$$

* $$\int_0^{5/8} \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}} = \frac{4}{5}\int_0^{5/8} \frac{5/4}{4\sqrt{1-\left(\frac{5}{4}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{5}\left[\arcsin\frac{5x}{4}\right]_0^{5/8}$$
$$= \frac{1}{5}\arcsin\frac{25}{32}$$

* $$I = \int_{1/2}^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$ $$x - x^2 = -[x^2 - x] = -\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$ (forme canonique)

$$I = \int_{1/2}^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \int_{1/2}^{1/3} \frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}}\, dx = \left[\arcsin 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\right]_{1/2}^{1/3}$$

$$= \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{-\arcsin \frac{1}{3}}$$

2. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 5}}$ a-t-elle des primitives ?

f est définie, continue sur $\left]-1, \frac{5}{2}\right[= I$, donc admet des primitives sur I.

$$-2x^2 + 3x + 5 = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right) = -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{5}{2}\right] = -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$$

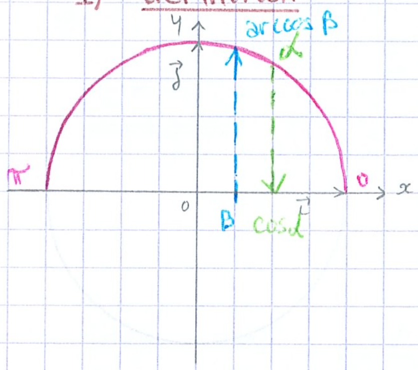
$$= \frac{98}{16}\left[1 - \frac{16}{49}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2\right] = \frac{49}{8}\left[1 - \left(\frac{4x-3}{7}\right)^2\right]$$

donc $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{49}{8}\left[1 - \left(\frac{4x-3}{7}\right)^2\right]}} = \dfrac{7}{4} \dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{7}{2\sqrt{2}}\sqrt{1 - \left(\frac{4x-3}{7}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{4/7}{\sqrt{1 - \left(\frac{4x-3}{7}\right)^2}}$

1 primitive sur I, de f, est $\underline{x \longmapsto \dfrac{\sqrt{2}}{2} \arcsin \dfrac{4x-3}{7}}$

II Arccosinus

1) définition



La restriction de cosinus à $[0, \pi]$ est continue, strictement décroissante, réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Elle admet donc une bijection réciproque appelée arccosinus.

$$\arccos : \begin{array}{|l} [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \\ x \longmapsto y = \arccos x \end{array}$$

$$\cos : \begin{array}{|l} [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \\ y \longmapsto x = \cos y \end{array}$$

$$\boxed{\begin{cases} y = \arccos x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}}$$

2) propriétés

$\boxed{a}$
- arccosinus est définie sur $[1, 1]$.
  $\arccos x \in [0, \pi]$.
- arccosinus est 1 bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.
- sur $[-1, 1]$, arccosinus est continue, strict^{t} décroissante.

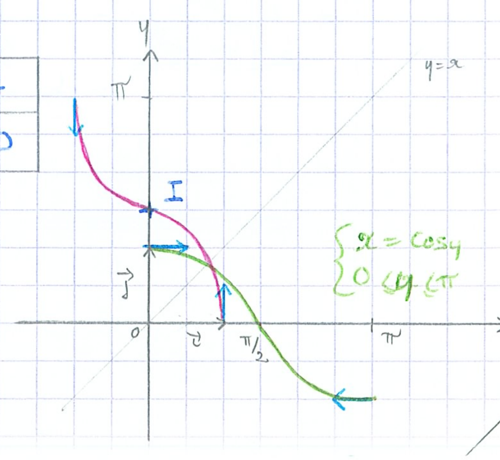
x	-1	0	1
arccosinus	π	$\pi/2$	0

$y = \arccos x$: "y est l'arc dont le cosinus vaut x".

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

$\arccos x + \arccos(-x) = \pi$

$\begin{cases} y = \arccos x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$



b relation entre arccos x et arccos $(-x)$

$\begin{cases} y = \arccos x \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = \cos(\pi - y) \\ 0 \leqslant \pi - y \leqslant \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi - y = \arccos(-x) \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

Th pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$

interprétation : $M(x, \arccos x)$ $M'(-x, \arccos(-x))$
I milieu de $[MM']$: $I\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
I est centre de symétrie pour la courbe $y = \arccos x$

c les 4 formules

- $[-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi]$ $\qquad$ $[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$
  $x \longmapsto y = \arccos x$ $\qquad$ $y \longmapsto x = \cos y$
  soit $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos x) = x$
- $\arccos x \in [0, \pi]$ donc $\sin(\arccos x) \geqslant 0$
  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}$
  $= \sqrt{1 - x^2}$
- soit $x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$
- soit $y \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos y) = y$

Th pour $x \in [-1, 1]$, $\begin{cases} \cos(\arccos x) = x \\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$
pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$
pour $y \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos y) = y$

ex : Calculer $\tan\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$

$\tan\left(\arccos \frac{3}{5}\right) = \frac{\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)}{\cos\left(\arccos \frac{3}{5}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{3}$

rem : $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{2}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2}$
$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \neq -\frac{\pi}{3}$

⚠ $\arccos(\cos y)$ existe pour tout $y \in \mathbb{R}$,
en général $\arccos(\cos y) \neq y$
cependant, $\arccos(\cos y) = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi]$ (ssi on compose des appl. récip.).

d relation entre arcsin x et arccos x

soient $\begin{cases} y = \arcsin x \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} z = \arccos x \\ -1 \leqslant z \leqslant 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = \cos z \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

$\sin y = \cos z$

$\begin{cases} \sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - z \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$

La restriction de sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est 1 bijection, donc

$y = \frac{\pi}{2} - z$ $\qquad$ $y + z = \frac{\pi}{2}$

Th pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

e dérivation de arccosinus

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

Th arccos est $\begin{cases} \text{définie continue sur } [-1, 1] \\ \text{dérivable sur }]-1, 1[\end{cases}$
pour $x \in]-1, 1[$, $(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

généralisation : $I \xrightarrow{u} [-1,1] \xrightarrow{\text{arccosinus}} [0,\pi]$

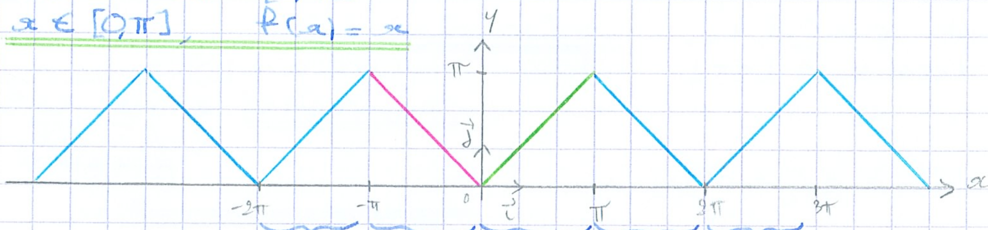
$x \longmapsto u(x) \longmapsto \arccos(u(x))$

Th si $\begin{cases} u \text{ est dérivable en } x \\ u(x) \in [-1,1] \end{cases}$ alors, $\begin{cases} \varphi \text{ est dérivable en } x \\ \varphi'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} \end{cases}$

3) exemples usuels

a représenter $f : x \longmapsto \arccos(\cos x)$

- f est définie, continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, on étudie f sur $[-\pi,\pi]$
- $f(-x) = \arccos(\cos(-x)) = \arccos(\cos x) = f(x)$
  f est paire donc $y'Oy$ est axe de symétrie.
  on étudie f sur $[0,\pi]$
- pour $x \in [0,\pi]$, $f(x) = x$



b résoudre (1) : $\arccos x = \arccos\frac{1}{4} - \arccos\frac{1}{5}$

⚠ arccos ↘

$0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{\pi}{3} < \arccos\frac{1}{4} < \frac{\pi}{2}$

$0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{\pi}{3} < \arccos\frac{1}{5} < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{6} < \arccos\frac{1}{4} - \arccos\frac{1}{5} < \frac{\pi}{6}$

Cet encadrement est inutile car trop grand

$\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ donc $\arccos\frac{1}{4} < \arccos\frac{1}{5}$ donc $\arccos\frac{1}{4} - \arccos\frac{1}{5} < 0$

Ainsi, $\arccos\frac{1}{4} - \arccos\frac{1}{5} \notin [0,\pi]$ donc (1) n'a pas de solution.

c résoudre (2) : $\arccos x = \arccos\frac{3}{5} + \arccos\frac{8}{17}$

$0 < \frac{3}{5} < 1$ donc $0 < \arccos\frac{3}{5} < \frac{\pi}{2}$

$0 < \frac{8}{17} < 1$ donc $0 < \arccos\frac{8}{17} < \frac{\pi}{2}$

$0 < \arccos\frac{3}{5} + \arccos\frac{8}{17} < \pi$

donc (2) a 1 solution unique.

(2) $\Rightarrow$ $x = \cos\left(\arccos\frac{3}{5} + \arccos\frac{8}{17}\right) = \frac{3}{5}\,\frac{8}{17} - \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}$

$= \frac{24}{85} - \frac{4}{5}\,\frac{15}{17} = -\frac{36}{85}$

(2) ayant 1 solution unique, $x = -\frac{36}{85}$ convient.

d résoudre (3) : $\arccos x + \arccos 2x = \frac{2\pi}{3}$

soit $\varphi(x) = \arccos x + \arccos 2x$; φ est définie, continue et strict^t décroissante sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

donc φ est 1 bijection de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sur $\varphi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = [\varphi(\frac{1}{2}), \varphi(-\frac{1}{2})]$
$= [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$

or, $\frac{2\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$

donc (3) a 1 solution unique.

(3) $\Rightarrow$ $\arccos x = \frac{2\pi}{3} - \arccos 2x$

$\Rightarrow$ $x = \cos\frac{2\pi}{3}\, 2x + \sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{1-4x^2} = -x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-4x^2}$

$\Rightarrow$ $2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-4x^2}$

$\Rightarrow$ $4x^2 = \frac{3}{4}(1-4x^2)$ avec $x \geq 0$

$\Rightarrow$ $x^2(4+3) = \frac{3}{4}$ avec $x \geq 0$

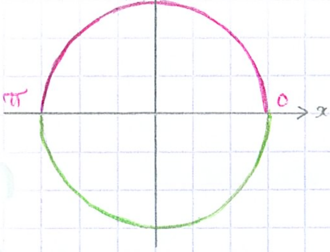
$\Rightarrow$ $x = \sqrt{\frac{3}{28}}$

Ainsi, $x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

(3) ayant 1 solution unique, $x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ convient.

e simplifier $\varphi(x) = \arccos(\cos 4x)$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

- si $4x \in [0,\pi]$, $\varphi(x) = 4x$
- $4x \notin [0,\pi]$, je cherche θ / $\begin{cases} \cos 4x = \cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$



* si $4x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $\begin{cases} \cos 4x = \cos(4x - 2k\pi) \\ 0 \leq 4x - 2k\pi \leq \pi \end{cases}$

* si $4x \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ $\begin{cases} \cos 4x = \cos(-4x) \\ -2\pi - 2k\pi \leq -4x \leq -\pi - 2k\pi \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 4x = \cos(-4x + 2\pi + 2k\pi) \\ 0 \leq -4x + 2\pi + 2k\pi \leq \pi \end{cases}$

x	$-\pi/2$		$-\pi/4$		0		$\pi/4$		$\pi/2$
$4x$	-2π		$-\pi$		0		π		2π
$\cos 4x$		$\cos(4x + 2\pi)$ $0 \leq 4x + 2\pi \leq \pi$		$\cos(-4x)$ $0 \leq -4x \leq \pi$		$\cos 4x$		$\cos(-4x)$ $-2\pi \leq -4x \leq -\pi$ $\cos(-4x + 2\pi)$ $0 \leq -4x + 2\pi \leq \pi$	
$\varphi(x)$		$4x + 2\pi$		$-4x$		$4x$		$-4x + 2\pi$	

f résoudre (4): $2 \arccos x = \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$

x appartient au domaine de définition D ssi :

$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - x^2 \geq 0 \\ -1 \leq 2x\sqrt{1 - x^2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 4x^2(1 - x^2) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq 1 - 4x^2 + 4x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq (1 - 2x^2)^2 \end{cases}$

donc $D = [-1, 1]$

On effectue 1 chgt de var bijectif : $\begin{cases} x = \cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

(4) $\Rightarrow$ $2\theta = \arcsin(2\cos\theta \sin\theta) = \arcsin(\sin 2\theta)$

donc $2\theta = \arcsin(\sin 2\theta) \iff 2\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \iff \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

or, $\theta \in [0, \pi]$ donc $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

ainsi, $x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$

g résoudre (5): $\arccos\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(2x - 1)$

$x \in D$ ssi : $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \\ -1 \leq 2x - 1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq 2x \leq 2 \end{cases}$ donc $D = [0, 1]$

je pose $\begin{cases} x = \cos^2\theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\arccos(\cos\theta) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(2\cos^2\theta - 1)$

$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(\cos 2\theta)$

$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta))$

or, $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$

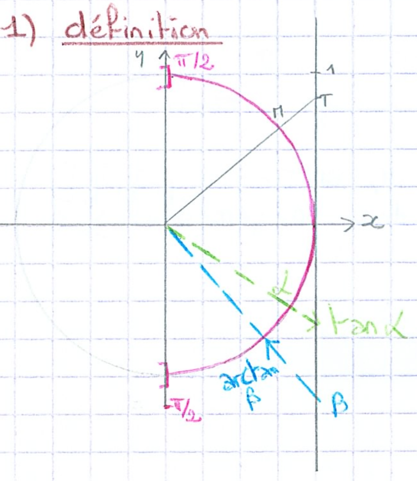
donc $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$

$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \theta$ égalité tjrs vérifiée

Ainsi, l'ensemble des solutions est l'intervalle $[0, 1]$.

III Arctangente

1) définition



La restriction de tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Elle admet donc une bijection réciproque appelée arctangente.

$\arctan : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x \longmapsto y = \arctan x \end{array}$ $\quad$ $\tan : \begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto x = \tan y \end{array}$

$$\boxed{\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

2) propriétés

a • arctangente est définie sur $\mathbb{R}$.
$\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

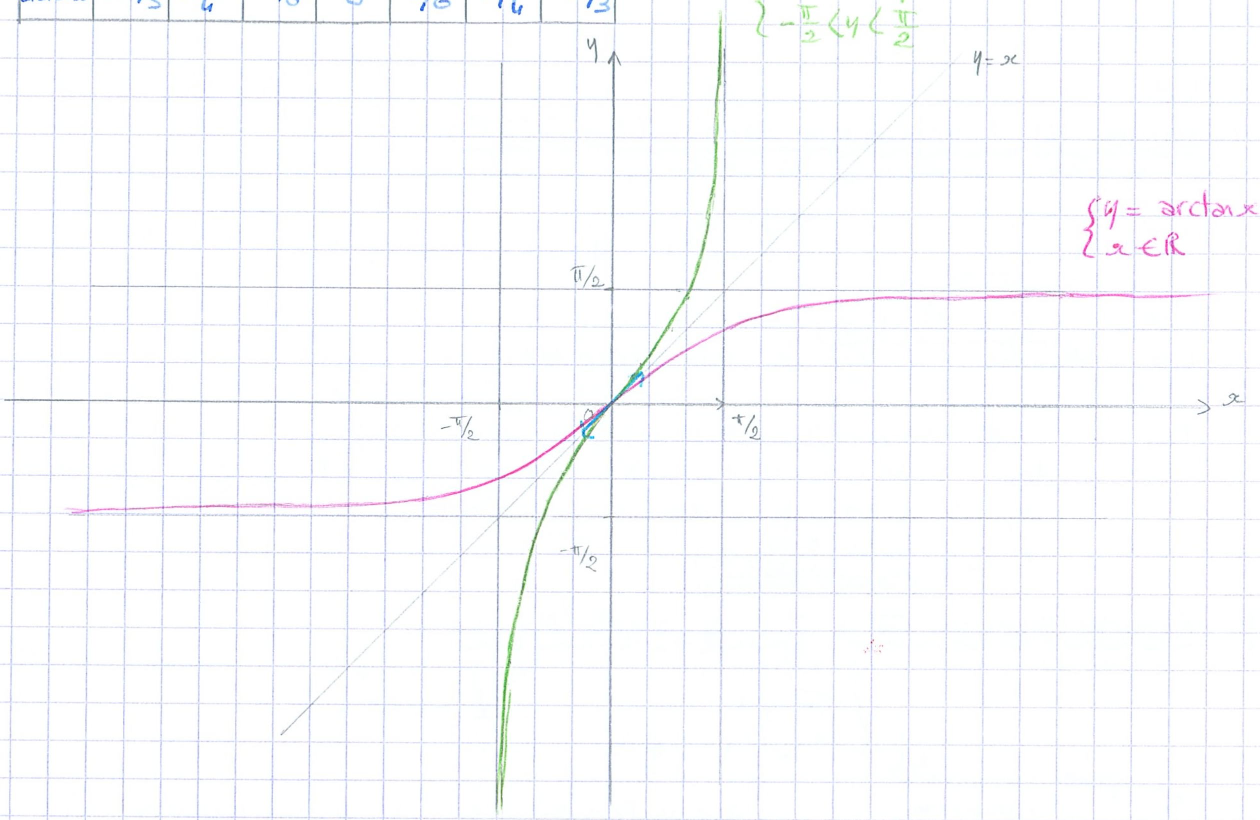
• arctangente est bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

• sur $\mathbb{R}$, arctangente est continue, strictement croissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\arctan x$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$

$y = \arctan x$: " y est l'arc dont la tangente vaut x "

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	$-\pi/3$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$



rem : $\arctan x$ a le signe de x
$\arctan x = x \iff x = 0$
pour $x < 0$, $\arctan x > x$
$x > 0$, $\arctan x < x$

b impairité de arctangente

$\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -x = \tan(-y) \\ -\frac{\pi}{2} < -y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -y = \arctan(-x) \\ -x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Th [arctan est impaire : pour tout x réel, $\arctan(-x) = -\arctan x$]

c les 4 formules

• $\arctan : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x \longmapsto y = \arctan x \end{array}$ $\tan : \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto x = \tan y \end{array}$

soit $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$

• $\dfrac{1}{\cos^2(\arctan x)} = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2$ or, $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(\arctan x) > 0$

donc $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

• $\sin(\arctan x) = \tan(\arctan x)(\cos \arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

• soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan y) = y$

Th pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \tan(\arctan x) = x \\ \cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

pour $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan y) = y$

ex : Calculer $\cos(\arctan \frac{1}{2})$

$$\cos(\arctan \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

rem : $\arctan(\tan \pi) = \arctan 0 = 0 \neq \pi$

pour $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, on peut définir $\arctan(\tan y)$.

en général, $\arctan(\tan y) \neq y$

cependant, $\arctan(\tan y) = y \iff y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (ssi on compose des fonct. réciproques)

d) relation entre $\arctan x$ et $\arctan \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

f est impaire

1er cas : $x > 0$ soient $y = \arctan x$ et $z = \arctan \frac{1}{x}$

$\begin{cases} x = \tan y \\ 0 < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{1}{x} = \tan z \\ 0 < z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\tan y = \dfrac{1}{\tan z}$

$\begin{cases} \tan y = \tan(\frac{\pi}{2} - z) \\ 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{\pi}{2} - z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ la restriction de tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est bijective, donc

$y = \frac{\pi}{2} - z$ $\quad y + z = \frac{\pi}{2}$

Ainsi, $\forall x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

2ème cas : $x < 0$ $\quad f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$

Th pour tout $x \neq 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \times \text{signe}(x)$

e) transformer $\arctan a + \arctan b$

ex : $S = \arctan 2 + \arctan 3$

$1 < 2$ donc $\frac{\pi}{4} < \arctan 2 < \frac{\pi}{2}$

$1 < 3$ donc $\frac{\pi}{4} < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}$ $\Big\}$ $\frac{\pi}{2} < S < \pi$

$\tan S = \dfrac{2+3}{1-2\times 3} = -1 = \tan(-\frac{\pi}{4})$ donc $S = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

or, $\frac{\pi}{2} < S < \pi$ donc $S = \dfrac{3\pi}{4}$

cas général : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $S = \arctan a + \arctan b$

$S \in]-\pi, \pi[$

$S = \frac{\pi}{2} \iff \arctan a = \frac{\pi}{2} - \arctan b$ donc $b > 0$

$\iff \arctan a = \arctan \frac{1}{b}$ avec $b > 0$

$a = \frac{1}{b}$ avec $b > 0$

$ab = 1$ avec $b > 0$

$S = -\frac{\pi}{2} \iff \arctan a = -\frac{\pi}{2} - \arctan b$ donc $b < 0$

$\arctan a = \arctan \frac{1}{b}$ avec $b < 0$

$ab = 1$ avec $b < 0$

pour $ab \neq 1$, $\tan S = \dfrac{a+b}{1-ab} = \tan\left(\arctan \dfrac{a+b}{1-ab}\right)$

donc $S = \arctan \dfrac{a+b}{1-ab} + k\pi$

S	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
k	‖	-1	‖	0	‖	1	‖

$S > \frac{\pi}{2}$ $\iff$ $\arctan a > \frac{\pi}{2} - \arctan b$ donc $b>0$ donc $\arctan b = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{b}$

$\iff$ $\arctan a > \arctan \frac{1}{b}$ avec $b>0$

$\iff$ $a > \frac{1}{b}$ avec $b>0$

$\iff$ $ab > 1$ avec $b>0$

$S < \frac{\pi}{2}$ $\iff$ $\arctan a < -\frac{\pi}{2} - \arctan b$ donc $b<0$ donc $\arctan b = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{b}$

$\iff$ $\arctan a < \arctan \frac{1}{b}$ avec $b<0$

$\iff$ $a < \frac{1}{b}$ avec $b<0$

$\iff$ $ab > 1$ avec $b<0$

Th pour $ab \neq 1$,

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} + k\pi$$

avec $k = \begin{cases} 1 & \text{si } ab > 1 \text{ avec } a>0,\ b>0 \\ 0 & \text{si } ab < 1 \\ -1 & \text{si } ab > 1 \text{ avec } a<0,\ b<0 \end{cases}$

ex : Calculer $S = \arctan 1/2 + \arctan 1/5 + \arctan 1/8$

- $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{1/2 + 1/5}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{5}} + k\pi = S_1$

  avec $k=0$ car $\frac{1}{2}\frac{1}{5} < 1$ donc $S_1 = \arctan \frac{7}{9}$

- $S = \arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} = \arctan \frac{7/9 + 1/8}{1 - \frac{7}{9}\frac{1}{8}} + k\pi$

  avec $k=0$ car $\frac{7}{9}\frac{1}{8} < 1$ donc $S = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

3) dérivation de arctangente

a

$\mathbb{R} \xrightarrow{\arctan} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\qquad$ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\xrightarrow{\tan} \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = \arctan x$ $\qquad$ $y \longmapsto x = \tan y$

soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan$ est dérivable en y et

$(\tan)'(y) = 1 + \tan^2 y \neq 0$

donc arctangente est dérivable en $x = \tan y$ et

$(\arctan)'(x) = \frac{1}{(\tan)'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

Th arctangente est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

b généralisation

$I \xrightarrow{u} \mathbb{R} \xrightarrow{\arctan} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\qquad \varphi$

$x \longmapsto u(x) \longmapsto \arctan(u(x))$

Th si u est dérivable alors $\begin{cases} \varphi \text{ est dérivable en } x \\ \varphi'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} \end{cases}$

ex : 1 $\varphi : x \longmapsto \arctan\sqrt{x}$

φ est définie continue pour $x \geq 0$ et dérivable pour $x > 0$,

$\varphi'(x) = \frac{1/(2\sqrt{x})}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

2 $\varphi : x \longmapsto \arctan(e^x)$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

4) application aux primitives

Th [Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est arctangente]

ex : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

généralisation :

Th [Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I.
1 primitive sur I de $x \longmapsto \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ s'intègre en $x \longmapsto \arctan(u(x))$]

ex : * $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\arctan 2x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\arctan 2$

* $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{3}{2}\int_0^{3/2} \frac{2/3}{9\left(1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2\right)}\,dx = \frac{3}{18}\left[\arctan \frac{2x}{3}\right]_0^{3/2} = \frac{1}{6}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24}$

* Déterminer 1 primitive de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^2+x+1}$

forme canonique : $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$$f(x) = \frac{1}{\frac{3}{4}\left[1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

1 primitive sur $\mathbb{R}$ de f est $x \longmapsto \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

* Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\sqrt{3} - \arctan -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\pi}{3} + \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right] = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

* Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$

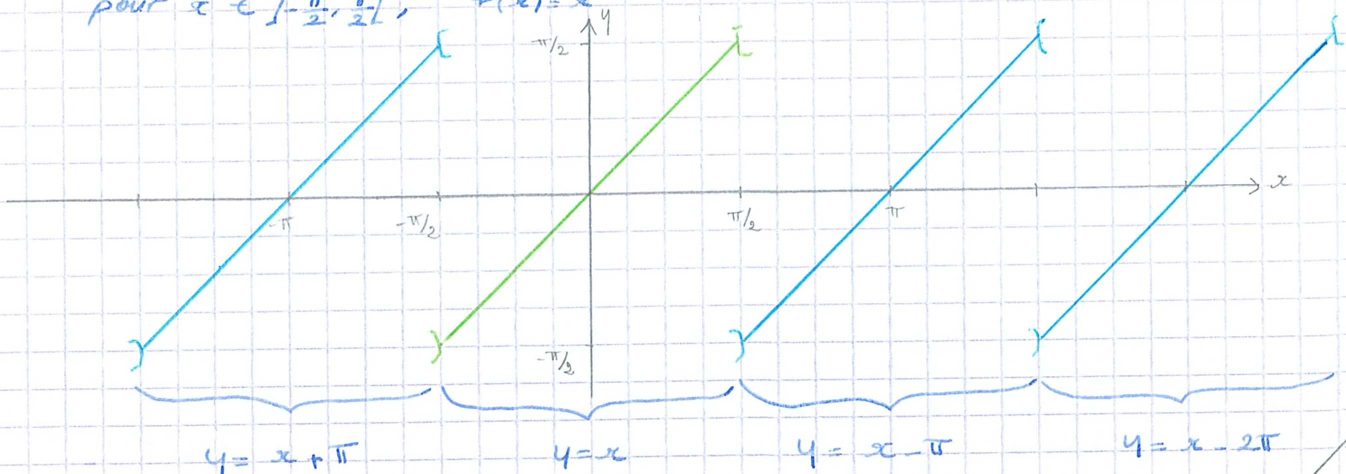
$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \left[\arctan(x+1)\right]_{-1}^1 = \arctan 2$$

5) exercices usuels

a) représenter $f : x \longmapsto \arctan(\tan x)$

f est définie, continue pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, π périodique

pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = x$



b) simplifier $\arctan(\tan 2x)$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$

1er cas : $2x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan 2x) = 2x$

2ème cas : $2x \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, si $2x \in \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

$\tan 2x = \tan(2x - k\pi)$

x	$-\pi/2$		$-\pi/4$		$\pi/4$		$\pi/2$
$2x$	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$\tan 2x$		$\tan(2x+\pi)$ $0 \leq 2x+\pi < \frac{\pi}{2}$	‖	$\tan 2x$	‖	$\tan(2x-\pi)$ $-\frac{\pi}{2} < 2x-\pi \leq 0$	
$\arctan(\tan 2x)$		$2x+\pi$	‖	$2x$	‖	$2x-\pi$	

c) comparer $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$ et $\beta = \arctan\frac{4}{3}$

$\tan\beta = \frac{4}{3}$ $\quad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ $\quad$ donc $\tan\beta = \tan 2\alpha$

or, $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ $\quad$ donc $\beta = 2\alpha$ $\quad$ (car la restriction de $\tan$ à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est 1 bijection).

Ainsi, $\arctan\frac{4}{3} = 2\arctan\frac{1}{2}$

d) résoudre $\arcsin(2x-1) + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{\pi}{2}$

x appartient au domaine de définition D ssi :

$$\begin{cases} -1 \leq 2x-1 \leq 1 \\ x \neq 0 \\ \frac{1-x}{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 2x \leq 2 \\ x \neq 0 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow D =]0,1]$$

je pose $\begin{cases} x = \cos^2\theta \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\quad (1) \Leftrightarrow \arcsin(2\cos^2\theta - 1) + 2\arctan\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\pi}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \arcsin(\cos 2\theta) + 2\arctan|\tan\theta| = \frac{\pi}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \arcsin(\cos 2\theta) + 2\theta = \frac{\pi}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos 2\theta) + 2\theta = \frac{\pi}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \arccos(\cos 2\theta) = 2\theta \Rightarrow 2\theta \in [0,\pi]$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

ainsi $(1) \Rightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (tous les θ choisis conviennent)

d'ensemble des solutions est $]0,1]$