I - Rappels

1. Fonction logarithme népérien

Définition : la fonction **logarithme népérien** est la primitive, sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'annule en 1, de la fonction $x \to \frac{1}{x}$

Conséquences :

- la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$
- Pour tout $x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

Théorème : la fonction logarithme népérien est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$

formules

$\forall a > 0, \forall b > 0, \ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\forall a > 0, \forall b > 0, \ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

$\forall a > 0, \forall r \in \mathbb{Q}, \ln(a^r) = r \ln a$

inégalité usuelle

$\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$ (égalité en 1)

limites usuelles

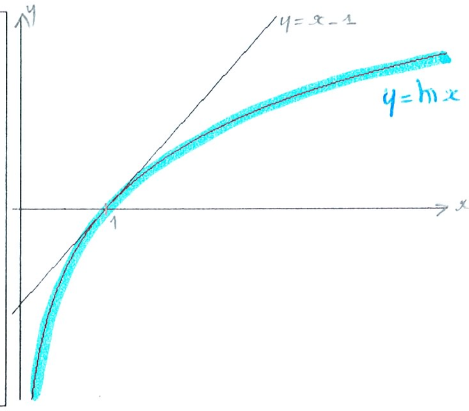
$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$



Dérivation : sur tout intervalle I où la fonction u est dérivable et ne s'annule pas la fonction $\varphi : x \to \ln|u(x)|$ est dérivable et $\varphi'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Primitive : u étant dérivable et ne s'annulant pas sur l'intervalle I, une primitive sur I de la fonction $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ est la fonction $x \to \ln|u(x)|$

2. Fonction exponentielle de base e

Définition : exp, **fonction exponentielle de base e**, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien

Conséquences :

- la fonction exp est une bijection continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp)' = \exp$

formules

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, e^{a+b} = e^a e^b$

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, (e^a)^r = e^{ra}$

inégalité usuelle

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ (égalité en 0)

limites usuelles

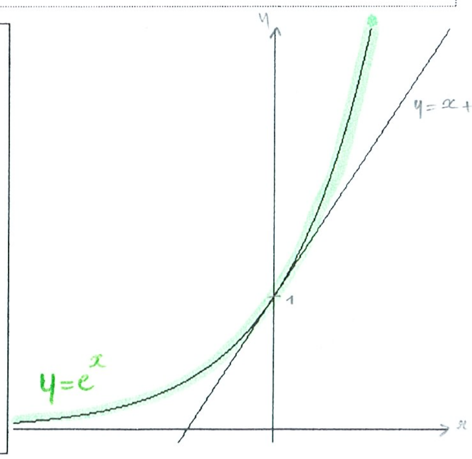
$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$



Dérivation : sur tout intervalle où u est dérivable, la fonction $\psi : x \to e^{u(x)}$ est dérivable et $\psi'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

Primitive : u étant dérivable sur l'intervalle I, une primitive sur I de la fonction $x \to u'(x) e^{u(x)}$ est la fonction $x \to e^{u(x)}$

II Fonctions logarithmes

Soit $a>0$, $a\neq 1$.
On appelle **fonction logarithme de base a** la fonction, notée $\log_a$, définie par :

$$\log_a : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array}$$

rem : $\log_e = \ln$
$\log_{10} = \log$

propriétés : Soit $a>0$, $a\neq 1$.

- pour tout $x>0$, tout $y>0$,
  $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
  $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- pour tout $x\in\mathbb{R}$, tout $r\in\mathbb{Q}$, $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$
  $\log_a 1 = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0$
  $\log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$
- pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $\log_a(a^r) = r$
  $\log 10^r = r$

1) étude et représentation de $x \longmapsto \log_a x$

$(a>0,\ a\neq 1)$, $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$; $\log_a$ est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

pour $x>0$, $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x\ln a}$ du signe de $\ln a$

$a>1$

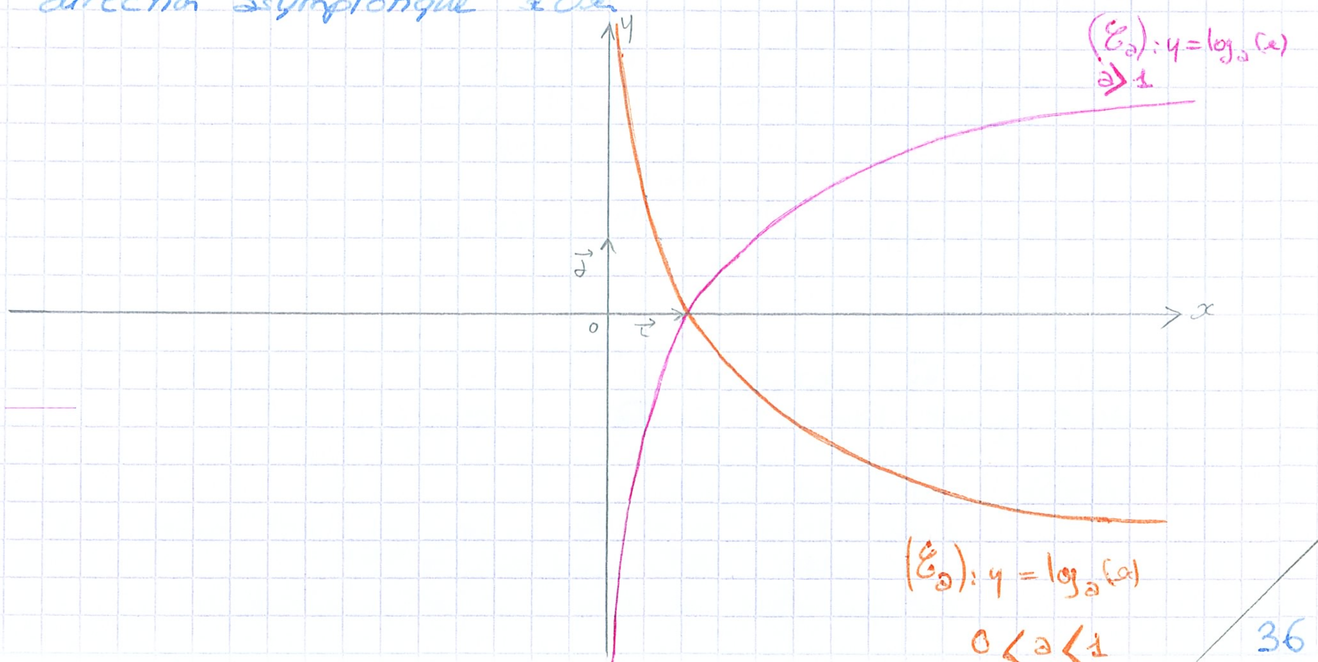
x	0		1		a		$+\infty$
$(\log_a)'(x)$	‖			$+$			
$(\log_a)(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$0<a<1$

x	0		a		1		$+\infty$
$(\log_a)'(x)$	‖			$-$			
$(\log_a)(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{+\infty} \frac{\log_a(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{\ln a} = 0$$

$(\mathcal{C}_a)$: $y=\log_a(x)$ admet, qd $x\to+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique $x'Ox$.



rem : relation entre $\log_a(x)$ et $\log_b(x)$, $(a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1, x>0)$

$$\log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln x}{\ln a}\,\frac{\ln a}{\ln b} = \log_a(x)\log_b(a)$$

d'où $\log_b(x) = \log_b(a)\,\log_a(x)$

application : soit $b = \frac{1}{a}$

$$\log_{1/a}(x) = \log_{1/a}(a)\log_a(x) = \frac{\ln a}{\ln \frac{1}{a}}\log_a(x) = -\log_a(x)$$

d'où $\log_{1/a}(x) = -\log_a(x)$

$\rightarrow$ $(\mathcal{C}_a)$ et $(\mathcal{C}_{1/a})$ sont symétriques par rapport à $x'Ox$.

Th soit $a>0$, $a\neq 1$
$\log_a$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$

III Fonctions exponentielles

1) définition

Soit $a>0$, $a\neq 1$.
$\log_a$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une bijection réciproque appelée exponentielle de base a, notée $\exp_a$.

$$\exp_a : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ x \longmapsto y = \exp_a(x) \end{array} \qquad \log_a : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto x = \log_a(y) \end{array}$$

$$\begin{cases} y = \exp_a(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \log_a(y) \\ y > 0 \end{cases}$$

soit $x\in\mathbb{R}$, $y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y) = \dfrac{\ln y}{\ln a}$

donc $y = \exp_a(x) \iff x\ln a = \ln y$

$y = \exp_a(x) \iff e^{x\ln a} = e^{\ln y} = y$

Th soit $a>0$, $a\neq 1$
pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\exp_a(x) = e^{x\ln a}$

2) nouvelle notation

rem : soit $a>0$, $a\neq 1$,

* $\exp_a(2) = e^{2\ln a} = e^{\ln(a^2)} = a^2$
* $\exp_a(-3) = e^{-3\ln a} = e^{\ln(a^{-3})} = a^{-3}$

$\exp_5(-3) = 5^{-3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$

* $\exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}\ln a} = e^{\ln\sqrt{a}} = \sqrt{a} = a^{1/2}$

$\exp_9\left(\frac{1}{2}\right) = 9^{1/2} = 3$

soit $r\in\mathbb{Q}$, $\exp_a(r) = e^{r\ln a} = e^{\ln(a^r)} = a^r$
donc pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $\exp_a(r) = a^r$

notation : soit $a>0$, $a\neq 1$.
pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\exp_a(x)$ est notée a^x
donc $a^x = \exp_a(x) = e^{x\ln a}$
(ce qui donne un sens à a^x, $x\in\mathbb{R}$).

convention : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $1^x = 1$.

Th [Soit $a > 0$
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x \ln a}$]

$2^{\pi} = e^{\pi \ln 2}$

3) formules de calcul

Pb : | Pour tout $a > 0$, tout $r \in \mathbb{Q}$, $\ln(a^r) = r \ln a$
Peut-on étendre cette formule à exposant réel ?

$\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a$

pour tout $a > 0$, tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(a^x) = x \ln a$

pour tout $a > 0$, tout $b > 0$, tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$,
$a^x a^y = a^{x+y}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (ab)^x = a^x b^x$ ...

4) représentation de $x \longmapsto a^x$

cas particulier : $a = 1$ $\quad 1^x = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

général : $a > 0$, $a \neq 1$ $\quad a^x = \exp_a(x) = e^{x \ln a}$

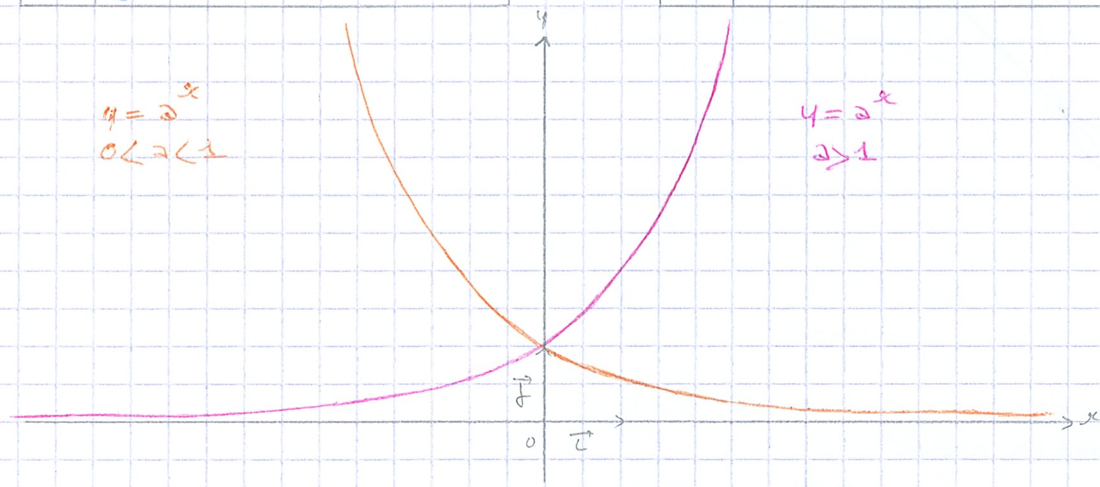
$\exp_a$ est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$(\exp_a)'(x) = \ln a \; e^{x \ln a} = (\ln a)(a^x)$ du signe de $\ln a$

$a > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(\exp_a)'(x)$		+		
a^x	0 ↗	1	a	↗ $+\infty$

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(\exp_a)'(x)$		−		
a^x	$+\infty$ ↘	1	a	↘ 0



ex : | Calculer $\int_0^1 3^x \, dx$

$\int_0^1 3^x \, dx = \int_0^1 e^{x \ln 3} \, dx = \left[\frac{e^{x \ln 3}}{\ln 3} \right]_0^1 = \frac{e^{\ln 3}}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3}$

IV Fonction puissance

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ est appelée fonction puissance.

$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $\quad f_\alpha$ est définie, continue, dérivable pour $x > 0$, et :
$f'_\alpha(x) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$, du signe de α

$$\lim_{+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0^+ & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0^+ & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

seul le signe de α compte : $\lim_{+\infty} x^4 = \lim_{+\infty} x^{27} = \dots = \lim_{+\infty} x^1 = +\infty$
$\lim_{+\infty} x^{-4} = \underline{\quad} = \lim_{+\infty} x^{-1} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

1^{er} cas : $\boxed{\alpha = 0}$ $\quad f_0(x) = x^0 = 1$

$2^{ème}$ cas : $\boxed{\alpha < 0}$

x	0	1	$+\infty$
x^α	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0^+

$3^{ème}$ cas : $\boxed{\alpha > 0}$

x	0	$+\infty$
x^α	$\|\|$ 0^+ $\nearrow$	$+\infty$

→ 3 ss-cas : $\boxed{0 < \alpha < 1}$, $\boxed{\alpha = 1}$, $\boxed{\alpha > 1}$

* étude de la branche infinie :

$$\lim_{+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \lim_{+\infty} x^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0^+ & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

si $\alpha > 1$: la courbe admet 1 branche parabolique de dir asymp. $y'Oy$

si $\alpha < 1$: .... $x'Ox$

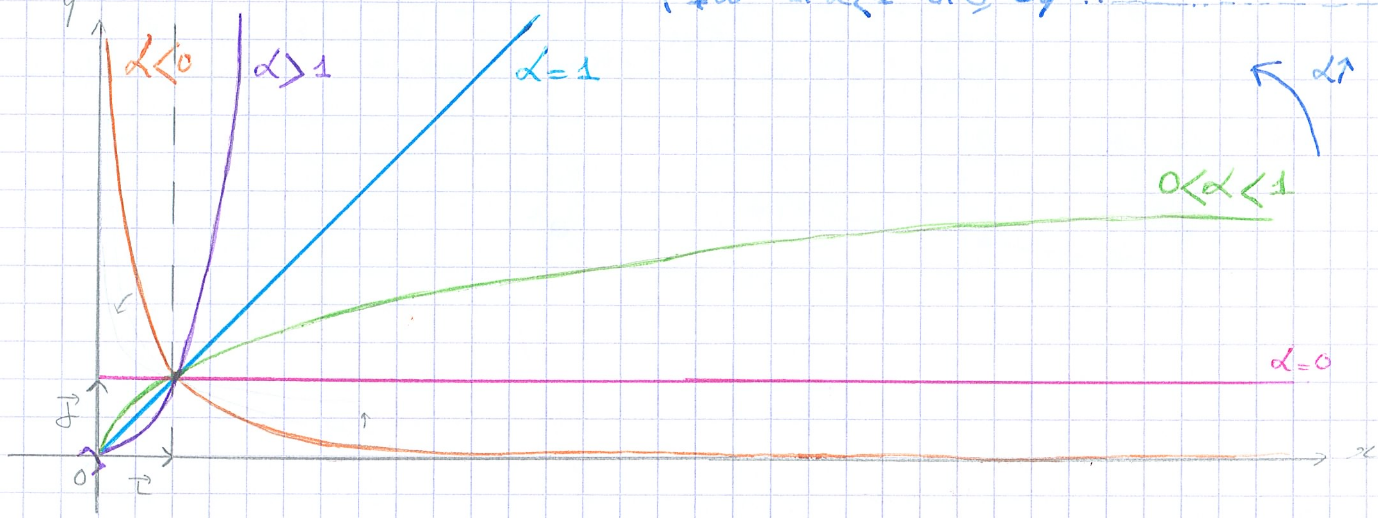
* étude qd $x \to 0^+$:

On prolonge f_α par continuité à droite en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$
ce qui nous permet de déterminer la demi-tangente en 0

$$\lim_{0^+} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \lim_{0^+} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

si $\alpha > 1$: en 0, Ox est demi-tangente à droite

si $\alpha < 1$: en 0, Oy ....



V Croissance comparée

1) généralisation de $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

soient $(m, p) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lim_{+\infty} (\ln x)^m = \begin{cases} +\infty & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ 0^+ & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{+\infty} x^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \\ 0^+ & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

$\lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^m}{x^p}$ est indéterminée

quand $\begin{cases} m > 0 \\ p > 0 \end{cases}$ $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$, $\begin{cases} m < 0 \\ p < 0 \end{cases}$ $\left(\frac{0^+}{0^+}\right)$

(qd m et p sont de même signe)

qd $\begin{cases} m < 0 \\ p < 0 \end{cases}$, on peut se ramener à $\begin{cases} m > 0 \\ p > 0 \end{cases}$ $\quad \frac{(\ln x)^{-2}}{x^{-5}} = \frac{x^5}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\frac{(\ln x)^2}{x^5}}$

$$\lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^m}{x^p} = \lim_{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{p/m}}\right)^m = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{m}{p} \frac{\ln y}{y}\right)^m = 0^+$$

$y = x^{p/m} \Rightarrow \ln y = \frac{p}{m} \ln x$

Th $\left[\text{soient } m > 0,\ p > 0,\ \lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^m}{x^p} = 0^+\right]$

(en $+\infty$, x^p impose sa limite à $(\ln x)^m$)

$$\lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3} = 0^+ \qquad \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} = \lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^{1/2}}{x} = 0^+$$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2}{(\ln x)^5} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\frac{(\ln x)^5}{x^2}} = +\infty$

C

2) généralisation de $\lim\limits_{0^+} x \ln x = 0$

car $(\ln x)^m = e^{m \ln(\ln x)}$ donc $\ln x$ doit être > 0

$$\lim_{0^+} x^p = \begin{cases} 0^+ & \text{si } p>0 \\ 1 & \text{si } p=0 \\ +\infty & \text{si } p<0 \end{cases}$$

$$\lim_{0^+} |\ln x|^m = \begin{cases} +\infty & \text{si } p>0 \\ 1 & \text{si } p=0 \\ 0^+ & \text{si } p<0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{0^+} x^p |\ln x|^m$ est indéterminée quand m et p sont de même signe

$$\lim_{0^+} x^p |\ln x|^m = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y^p} |\ln y|^m = \lim_{y\to+\infty} \frac{(\ln y)^m}{y^p} = 0^+$$

$y = \frac{1}{x}$; $\Rightarrow x = \frac{1}{y}$ car $|-\ln y| = |\ln y|$

Th $\left[\text{soient } m>0,\ p>0,\quad \lim\limits_{0^+} x^p |\ln x|^m = 0 \right]$

(en 0^+, x^p impose sa limite à $|\ln x|^m$)

$\lim\limits_{0^+} x (\ln x)^5 = 0$ $\quad \lim\limits_{0^+} x^3 \sqrt{|\ln x|} = \lim\limits_{0^+} x^3 |\ln x|^{1/2} = 0$

pas de valeur absolue car $5 \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{0^+} x^{-1} (\ln x)^{-2} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{x (\ln x)^2} = +\infty$

3) généralisation de $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Il y a indétermination de $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x^m}$ quand $m>0$ $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$\ln\left(\dfrac{e^x}{x^m}\right) = x - m \ln x = x \left(1 - m \dfrac{\ln x}{x}\right)$

Th $\left[(\text{soit } m>0),\quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x^m} = +\infty \right]$

(en $+\infty$, e^x impose sa limite à x^m

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x^{1/2}} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{3^x}{x^2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{x \ln 3}}{x^2} = +\infty$

4) généralisation de $\lim\limits_{-\infty} x e^x = 0$

Il y a indétermination de $\lim\limits_{-\infty} |x|^m e^x$ quand $m>0$ $(+\infty \times 0)$

$\lim\limits_{-\infty} |x|^m e^x = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{y^m}{e^y} = 0$

$y = -x$

Th $\left[\text{soit } m>0,\quad \lim\limits_{-\infty} |x|^m e^x = 0 \right]$

(en $-\infty$, e^x impose sa limite à $|x|^m$)

$\lim\limits_{-\infty} \sqrt{|x|}\, e^x = 0^+$ $\quad \lim\limits_{-\infty} x^3 e^x = 0^-$

⚠ l'absence de valeur absolue entraîne 0^-

VI Exercices usuels

1) cf exos 1.

qd on a $\lim (1+h)^x$, on écrit $\lim e^{x\ln(1+h)}$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

1^∞ est une forme indéterminée

2) étudier et représenter $f : x \longmapsto x^x$

$f(x) = e^{x\ln x}$ f est définie, continue, dérivable pour $x > 0$ et :

$f'(x) = \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) e^{x\ln x} = (\ln x + 1)\, e^{x\ln x}$ du signe de $\ln x + 1$

$\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	$\searrow$	$f(e^{-1})$	$\nearrow$	$+\infty$

étude de la branche infinie :

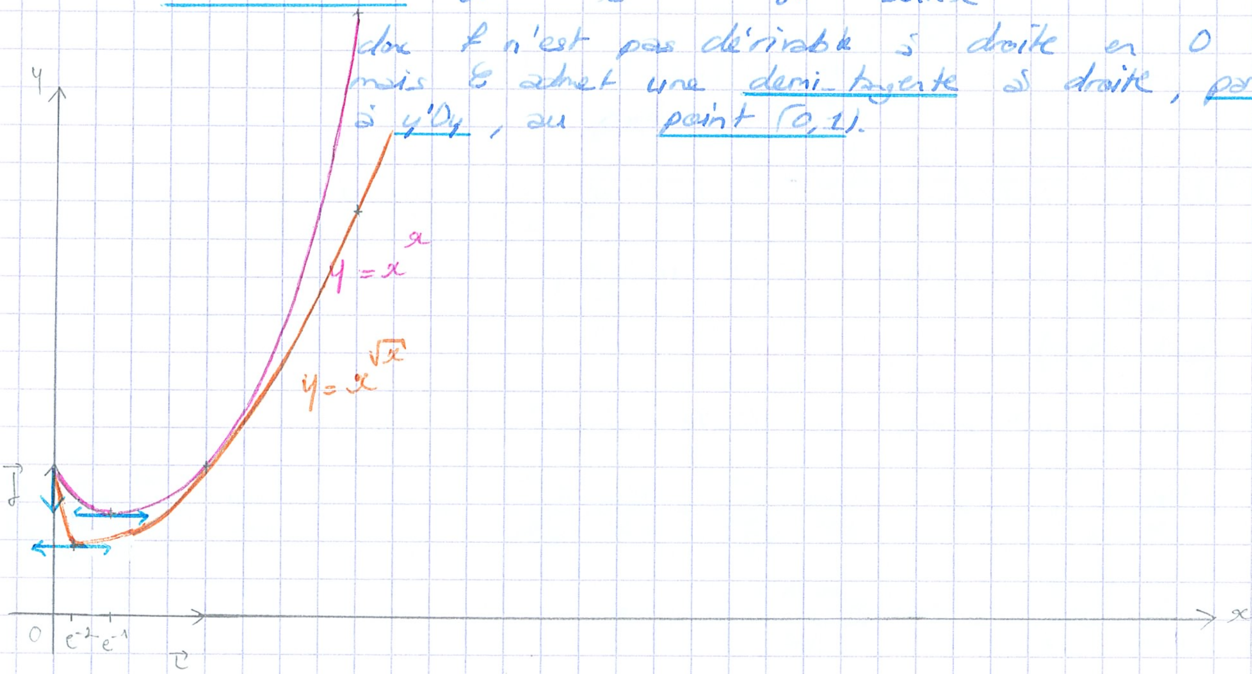
$\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} x^{x-1} = \lim\limits_{+\infty} e^{(x-1)\ln x} = +\infty$ $\mathcal{C}$ possède une branche parabolique de dir asymp $y'Oy$.

étude en 0^+ :

On prolonge f par continuité à droite en 0 en posant $f(0) = 1$

$\lim\limits_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{0^+} \frac{e^{x\ln x} - 1}{x} = \lim\limits_{0^+} \frac{e^{x\ln x} - e^0}{x\ln x} \ln x = -\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0 mais $\mathcal{C}$ admet une demi-tangente à droite, parallèle à $y'Oy$, au point $(0,1)$.



3) étudier et représenter $f : x \longmapsto x^{\sqrt{x}}$

$f(x) = e^{\sqrt{x}\ln x}$ f est définie, continue, dérivable pour $x > 0$, et :

$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) e^{\sqrt{x}\ln x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}\ln x}$ du signe de $\ln x + 2$

$\ln x + 2 > 0 \iff \ln x > -2 \iff x > e^{-2}$

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	$\searrow$	$f(e^{-2})$	$\nearrow$	$+\infty$

étude de la branche infinie :

$\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} x^{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{+\infty} e^{(\sqrt{x}-1)\ln x} = +\infty$ $\mathcal{C}$ possède une branche parabolique de direction asymptotique $y'Oy$.

étude en 0^+ :

On prolonge f par continuité à droite en 0 en posant $f(0) = 1$

$\lim\limits_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{0^+} \frac{e^{\sqrt{x}\ln x} - 1}{\sqrt{x}\ln x} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x = -\infty$

$\mathcal{C}$ admet une demi-tangente à droite, parallèle à $y'Oy$, au point $(0,1)$.

C

VII Fonctions hyperboliques (directes)

1) remarque

Pb : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, peut-on trouver 2 applications g, h, définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant : $\begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}$

1ère partie : **analyse** : on suppose que g et h existent

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$

donc $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] & (1) \\ h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] & (2) \end{cases}$

donc, **si** g et h existent,
alors, g et h sont uniques et définies par (1), (2)

2ème partie : synthèse, soient g et h définies par : $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$

$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \qquad g \text{ est paire}$$
$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x) \qquad h \text{ est impaire}$$

Th

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f s'écrit de façon unique sous la forme $f = g + h$
avec g paire, h impaire

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

application : $f(x) = e^x$

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{partie paire}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{partie impaire}}$$

2) définitions

On appelle :
- cosinus hyperbolique, la fonction, notée ch, définie par $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- sinus hyperbolique, ……………… sh ……… $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- tangente hyperbolique, ……………… th, ……… $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$ } $x \in \mathbb{R}$
- cotangente hyperbolique, ……………… coth, $coth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)}$, $x \in \mathbb{R}^*$

3) 1ères formules

$\begin{cases} ch\,x + sh\,x = e^x \\ ch\,x - sh\,x = e^{-x} \end{cases}$ par produit, $ch^2 x - sh^2 x = 1$

en divisant par $ch^2 x$, $1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$ $\Rightarrow ch\,x = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2 x}}$

$\Rightarrow sh\,x = \frac{th\,x}{\sqrt{1 - th^2 x}}$

4) étude et représentation de ch

$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ch est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

$(ch)'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\,x$ $\qquad (ch)'(x) = sh\,x$
$\qquad ch(-x) = ch\,x$

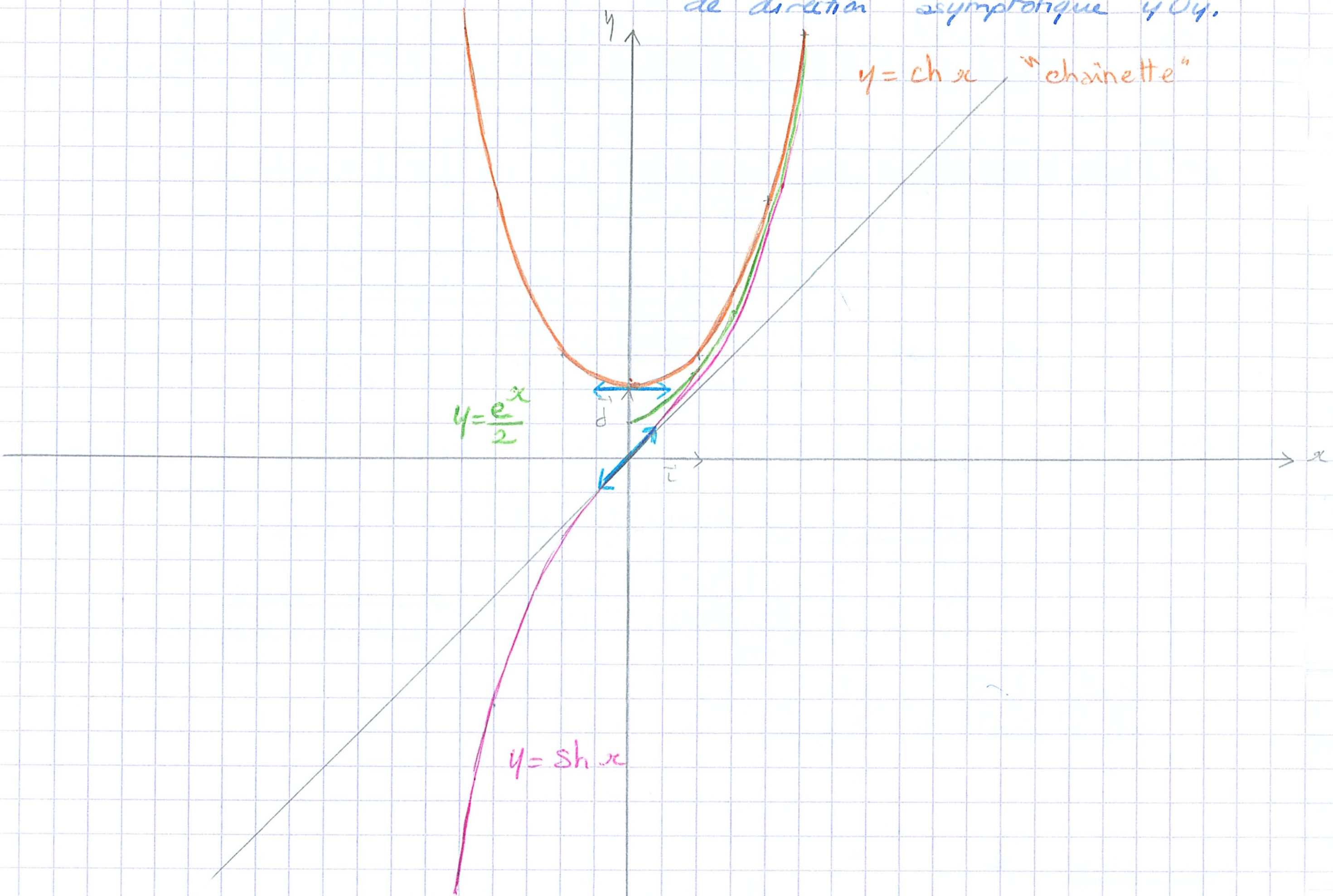
$\frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh\,x$		$-$	0	$+$	
$ch\,x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

étude de la branche infinie :

$\lim\limits_{+\infty} \frac{ch\,x}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{e^x}{2x} + \frac{e^{-x}}{2x} = +\infty$

La courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $y'Oy$.



rem : ch est paire $\quad ch\,a = ch\,b \iff a = b$ ou $a = -b$

5) étude et représentation de sh

$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ sh est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$(sh)'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\,x$

$(sh)'(x) = ch\,x$

$(sh)(-x) = -sh\,x$

$(sh)''(x) = sh\,x \qquad (ch)''(x) = ch\,x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch\,x$		$+$	1	$+$	
$sh\,x$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

étude de la branche infinie :

$$\begin{cases} ch\,x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \\ sh\,x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow ch\,x - \frac{e^x}{2} = \frac{e^{-x}}{2} \\ &\Rightarrow sh\,x - \frac{e^x}{2} = -\frac{e^{-x}}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\lim_{+\infty} ch\,x - \frac{e^x}{2} = 0^+ \\ &\lim_{+\infty} sh\,x - \frac{e^x}{2} = 0^- \end{aligned}$$

Les courbes $y = ch\,x$, $y = sh\,x$ et $y = \frac{e^x}{2}$ sont asymptotes quand $x \to +\infty$

et $sh\,x < \frac{e^x}{2} < ch\,x$

tangente en O à $y = sh\,x$: $D : y = x$ (car $ch'(0) = 1$)

$\varphi(x) = sh\,x - x$ $\quad \varphi$ est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$\varphi'(x) = ch\,x - 1 \geq 0$ (égalité en 0 uniquement)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$ ↗	0	↗ $+$	
	sh x au dessous de D			sh x au-dessus de D	

rem : • sh est 1 bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: $\text{sh}\, a = \text{sh}\, b \iff a = b$

• si $x > 0$, $\text{sh}\, x > x$

si $x < 0$, $\text{sh}\, x < x$

$\text{sh}\, x = x \iff x = 0$

• $\lim\limits_{0} \frac{\text{sh}\, x}{x} = 1$ (limite du taux d'accroissement)

6) étude et représentation de th x

$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

th est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$(\text{th})'(x) = \frac{\text{ch}\, x\, \text{ch}\, x - \text{sh}\, x\, \text{sh}\, x}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$$

$$\text{th}(-x) = \frac{-\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = -\text{th}\, x$$

$(\text{th})'(x) = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$

$\text{th}(-x) = -\text{th}\, x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{th}'(x)$		$+$	1	$+$	
$\text{th}\, x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

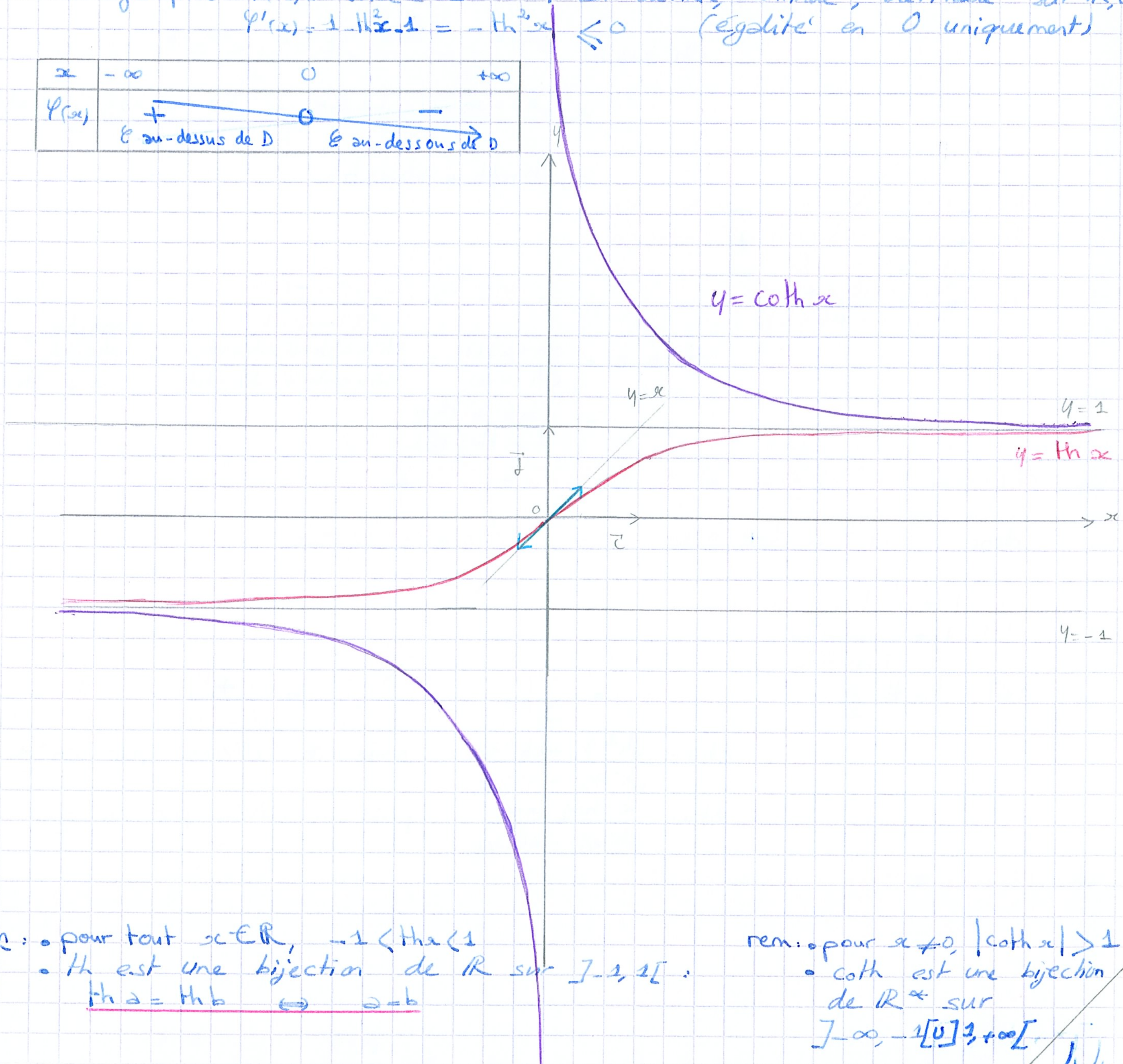
position de la courbe par rapport à (D) : $y = x$

tangente en O : (D) : $y = x$

je pose $\varphi(x) = \text{th}\, x - x$; φ est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$\varphi'(x) = 1 - \text{th}^2 x - 1 = -\text{th}^2 x \leqslant 0$ (égalité en 0 uniquement)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi(x)$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-$
	$\mathcal{C}$ au-dessus de D			$\mathcal{C}$ au-dessous de D	



rem : • pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \text{th}\, x < 1$

• th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$: $\text{th}\, a = \text{th}\, b \iff a = b$

rem : • pour $x \neq 0$, $|\text{coth}\, x| > 1$

• coth est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

7) étude et représentation de coth

$\coth x = \dfrac{ch\, x}{sh\, x} = \dfrac{1}{th\, x} \quad (x \neq 0)$

$(\coth)'(x) = \dfrac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = 1 - \coth^2 x = \dfrac{-1}{sh^2 x}$

$(\coth)(-x) = \dfrac{ch\, x}{-sh\, x} = -\coth x$

coth est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et :

$(\coth)'(x) = 1 - \coth^2 x = \dfrac{-1}{sh^2 x} \quad (x \neq 0)$

$\coth(-x) = -\coth x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\coth x$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

8) formulaire de trigonométrie hyperbolique

* $ch\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad sh\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad th\, x = \dfrac{sh\, x}{ch\, x}$ $\quad \coth x = \dfrac{ch\, x}{sh\, x} \; (x \neq 0)$

* $ch(-x) = ch\, x$ $\quad sh(-x) = -sh\, x$ $\quad th(-x) = -th\, x$ $\quad \coth(-x) = -\coth x$

* $e^x = ch\, x + sh\, x$

$e^{-x} = ch\, x - sh\, x$

donc $e^{2x} = \underset{ch\, 2x}{(\text{paire})} + \underset{sh\, 2x}{(\text{impaire})}$

par produit : $ch^2 x - sh^2 x = 1$ $\quad (ch^2 x + i^2 sh^2 x = 1)$

en divisant par $ch^2 x$: $1 - th^2 x = \dfrac{1}{ch^2 x}$

* $ch(a+b) = ch\,a\, ch\,b + sh\,a\, sh\,b$

dém : $ch(a+b) = \dfrac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \dfrac{e^a e^b + e^{-a} e^{-b}}{2}$

$= \dfrac{(ch\,a + sh\,a)(ch\,b + sh\,b) + (ch\,a - sh\,a)(ch\,b - sh\,b)}{2}$

$= ch\,a\, ch\,b + sh\,a\, sh\,b$

$ch(a-b) = ch\,a\, ch\,b - sh\,a\, sh\,b$

$sh(a+b) = sh\,a\, ch\,b + sh\,b\, ch\,a$

$sh(a-b) = sh\,a\, ch\,b - sh\,b\, ch\,a$

$th(a+b) = \dfrac{th\,a + th\,b}{1 + th\,a\, th\,b}$ $\qquad th(a-b) = \dfrac{th\,a - th\,b}{1 - th\,a\, th\,b}$

dém : $th(a+b) = \dfrac{sh(a+b)}{ch(a+b)} = \dfrac{sh\,a\, ch\,b + sh\,b\, ch\,a}{ch\,a\, ch\,b + sh\,a\, sh\,b} = \dfrac{\dfrac{sh\,a\, ch\,b}{ch\,a\, ch\,b} + \dfrac{sh\,b\, ch\,a}{ch\,a\, ch\,b}}{1 + th\,a\, th\,b}$

$= \dfrac{th\,a + th\,b}{1 + th\,a\, th\,b}$

* $ch(2a) = ch^2 a + sh^2 a = 1 + 2 sh^2 a = 2 ch^2 a - 1$

donc $ch^2 a = \dfrac{1 + ch\, 2a}{2}$ $\qquad sh^2 a = \dfrac{ch\, 2a - 1}{2}$

$sh(2a) = 2\, sh\,a\, ch\,a$

$th(2a) = \dfrac{2\, th\,a}{1 + th^2 a}$

* soit $t = th\, \dfrac{a}{2}$ $\qquad th\,a = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\qquad ch\,a = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ $\qquad sh\,a = \dfrac{2t}{1-t^2}$

dém : $ch\,a = \dfrac{ch^2 a/2 + ch^2 a/2}{ch^2 a/2 - sh^2 a/2}$ puis on divise par $ch^2 \frac{a}{2}$

$sh\,a = \dfrac{2\, sh\, a/2\; ch\, a/2}{ch^2 a/2 - sh^2 a/2}$ puis on divise par $ch^2 \frac{a}{2}$

* $ch\,a\, ch\,b = \dfrac{1}{2}\left[ch(a+b) + ch(a-b)\right]$

$sh\,a\, sh\,b = \dfrac{1}{2}\left[ch(a+b) - ch(a-b)\right]$

$sh\,a\, ch\,b = \dfrac{1}{2}\left[sh(a+b) + sh(a-b)\right]$

* soient $p = a+b$, $q = a-b$ $\Longrightarrow$ $a = \dfrac{p+q}{2}$, $b = \dfrac{p-q}{2}$

C

* $\mathrm{ch}\,p + \mathrm{ch}\,q = 2\,\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}\,\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{ch}\,p - \mathrm{ch}\,q = 2\,\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\,\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}$

  $\mathrm{sh}\,p + \mathrm{sh}\,q = 2\,\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\,\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{sh}\,p - \mathrm{sh}\,q = 2\,\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}\,\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}$

* soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{ch}(ka) = \frac{e^{ka}+e^{-ka}}{2} = \frac{(e^a)^k + (e^{-a})^k}{2}$

  donc $2\,\mathrm{ch}(ka) = (\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a)^k + (\mathrm{ch}\,a - \mathrm{sh}\,a)^k$

  $2\,\mathrm{sh}(ka) = (\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a)^k - (\mathrm{ch}\,a - \mathrm{sh}\,a)^k$

* $\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{cases}}$ formules d'Euler

  Les problèmes de signes proviennent du $i^2 = -1$

  or, $\begin{cases} \mathrm{ch}\,x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \mathrm{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos x = \mathrm{ch}(ix) \\ \sin x = -i\,\mathrm{sh}(ix) \end{cases}$

  $\cos^2 x + \sin^2 x = \mathrm{ch}^2(ix) + i^2\,\mathrm{sh}^2(ix)$
  $= \mathrm{ch}^2(ix) - \mathrm{sh}^2(ix)$

  $\cos(a+b) = \mathrm{ch}(ia+ib) = \mathrm{ch}(ia)\mathrm{ch}(ib) + \mathrm{sh}(ia)\mathrm{sh}(ib)$
  $= \cos a \cos b + i\sin a\, i \sin b$
  $= \cos a \cos b - \sin a \sin b$

9) exercices usuels

a exprimer $\mathrm{ch}(3a)$ en fonction de $\mathrm{ch}\,a$

$\mathrm{ch}(3a) = \frac{e^{3a}+e^{-3a}}{2} = \frac{(e^a)^3 + (e^{-a})^3}{2}$

or, $\begin{cases} (e^a)^3 = (\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a)^3 = \mathrm{ch}^3 a + 3\mathrm{ch}^2 a\,\mathrm{sh}\,a + 3\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}^2 a + \mathrm{sh}^3 a \\ (e^{-a})^3 = (\mathrm{ch}\,a - \mathrm{sh}\,a)^3 = \mathrm{ch}^3 a - 3\mathrm{ch}^2 a\,\mathrm{sh}\,a + 3\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}^2 a - \mathrm{sh}^3 a \end{cases}$

$\mathrm{ch}(3a) = \mathrm{ch}^3 a + 3\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}^2 a$

$\mathrm{ch}(3a) = \mathrm{ch}^3 a + 3\mathrm{ch}\,a(\mathrm{ch}^2 a - 1) = \mathrm{ch}^3 a + 3\mathrm{ch}^3 a - 3\mathrm{ch}\,a$

$\mathrm{ch}(3a) = 4\mathrm{ch}^3 a - 3\mathrm{ch}\,a$

autre méthode : $\mathrm{ch}\,3a$ est la partie paire de e^{3a}

$e^{3a} = (e^a)^3 = \underbrace{\mathrm{ch}^3 a}_{\text{paire}} + \underbrace{3\mathrm{ch}^2 a\,\mathrm{sh}\,a}_{\text{impaire}} + \underbrace{3\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}^2 a}_{\text{paire}} + \underbrace{\mathrm{sh}^3 a}_{\text{impaire}}$

de même, $\mathrm{sh}(3a) = 3\mathrm{ch}^2 a\,\mathrm{sh}\,a + \mathrm{sh}^3 a$
$= 3(\mathrm{sh}^2 a + 1)\mathrm{sh}\,a + \mathrm{sh}^3 a = 4\mathrm{sh}^3 a + 3\mathrm{sh}\,a$

b trouver une primitive de $f : x \mapsto \mathrm{sh}(3x)\mathrm{sh}(4x)$

Méthode → transformer $f(x)$ en une somme

$f(x) = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(7x) - \mathrm{ch}\,x]$

une primitive est $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}\,7x}{14} - \frac{\mathrm{sh}\,x}{2}$

c linéariser $f(x) = (\mathrm{sh}\,x)^m(\mathrm{ch}\,x)^p$

Méthode →
- si possible, on abaisse les exposants en utilisant $\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x = \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2x$
- on revient aux exponentielles, on développe
- on assemble les termes en e^{kx} e^{-kx}
- on revient aux fonctions hyperboliques

ex. 1 Trouver une primitive de $f : x \mapsto (\mathrm{sh}\,x)^6$

f est définie, continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$(\mathrm{sh}\,x)^6 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}\left[\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(e^x)^k(-e^{-x})^{6-k}\right]$

$= \frac{1}{2^6}\Big[\binom{6}{0}e^0(-e^{-x})^6 + \binom{6}{1}e^x(-e^{-x})^5 + \binom{6}{2}e^{2x}(-e^{-x})^4 + \binom{6}{3}e^{3x}(-e^{-x})^3 + \binom{6}{4}e^{4x}(-e^{-x})^2 + \binom{6}{5}e^{5x}(-e^{-x}) + \binom{6}{6}e^{6x}(e^0)\Big]$

$= \frac{1}{2^6}\left[e^{-6x} - 6e^{x}e^{-5x} + 15e^{2x}e^{-4x} - 20e^{3x}e^{-3x} + 15e^{4x}e^{-2x} - 6e^{5x}e^{-x} + e^{6x}\right]$

$= \frac{1}{2^6}\left[e^{-6x} + e^{6x} - 6e^{-4x} - 6e^{4x} + 15e^{-2x} + 15e^{2x} - 20e^0\right]$

$$= \frac{1}{2^6}\left[e^{-6x} + e^{6x} - 6\left(e^{-4x}+e^{4x}\right) + 15\left(e^{2x}+e^{-2x}\right) - 20\right]$$

$$= \frac{1}{2^6}\left[2\,\mathrm{ch}\,6x - 12\,\mathrm{ch}\,4x + 30\,\mathrm{ch}\,2x - 20\right]$$

$$= \frac{\mathrm{ch}\,6x}{2^5} - \frac{3}{2^4}\,\mathrm{ch}\,4x + \frac{15}{2^5}\,\mathrm{ch}\,2x - \frac{5}{2^4}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est : $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}\,6x}{6\times 2^5} - \frac{3\,\mathrm{sh}\,4x}{4\times 2^4} + \frac{15\,\mathrm{sh}\,2x}{2\times 2^5}$

(c'est celle qui s'annule en 0) $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}\,6x}{192} - \frac{3\,\mathrm{sh}\,4x}{64} + \frac{15\,\mathrm{sh}\,2x}{64} - \frac{5}{16}x$

2. Trouver une primitive de $g : x \mapsto (\mathrm{ch}\,x)^2(\mathrm{sh}\,x)^4$

$$g(x) = (\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,x)^2\,\mathrm{sh}^2 x = \left(\frac{\mathrm{sh}\,2x}{2}\right)^2 \mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{4x} - 2e^0 + e^{-4x}\right)\left(e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{6x} - 2e^{4x} + e^{2x} - 2e^{2x} + 4 - 2e^{-2x} + e^{-2x} - 2e^{-4x} + e^{-6x}\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{6x} + e^{-6x} - 2\left(e^{4x}+e^{-4x}\right) + \left(e^{2x}+e^{-2x}\right) - 2\left(e^{2x}+e^{-2x}\right) + 4\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left(2\,\mathrm{ch}\,6x - \mathrm{ch}\,4x + 2\,\mathrm{ch}\,2x - 4\,\mathrm{ch}\,2x + 4\right)$$

$$= \frac{1}{32}\,\mathrm{ch}\,6x - \frac{1}{16}\,\mathrm{ch}\,4x - \frac{1}{32}\,\mathrm{ch}\,2x + \frac{1}{16}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est :

$x \mapsto \frac{\mathrm{sh}\,6x}{192} - \frac{\mathrm{sh}\,4x}{64} - \frac{\mathrm{sh}\,2x}{64} + \frac{1}{16}x$ (celle qui s'annule en 0)

$\boxed{d}$ simplifier : $C = \mathrm{ch}\,x + \mathrm{ch}\,2x + \mathrm{ch}\,3x + \dots + \mathrm{ch}\,nx$ $(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$

$$C = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} + \dots + \frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x + (e^x)^2 + \dots + (e^x)^n + e^{-x} + (e^{-x})^2 + \dots + (e^{-x})^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^x\left[1 + e^x + \dots + (e^x)^{n-1}\right] + \frac{1}{2}e^{-x}\left[1 + e^{-x} + \dots + (e^{-x})^{n-1}\right]$$

1er cas : $x = 0$: $C = n$

2ème cas : $x \neq 0$: $C = \frac{e^x}{2}\,\frac{1-(e^x)^n}{1-e^x} + \frac{e^{-x}}{2}\,\frac{1-(e^{-x})^n}{1-e^{-x}}$

$$= \frac{e^x}{2}\,\frac{1-e^{nx}}{1-e^x} + \frac{e^{-x}}{2}\,\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}$$

$$= \frac{e^x}{2}\,\frac{e^{nx/2}\left(e^{-nx/2} - e^{nx/2}\right)}{e^{x/2}\left(e^{-x/2} - e^{x/2}\right)} + \frac{e^{-x}}{2}\,\frac{e^{-nx/2}\left(e^{nx/2} - e^{-nx/2}\right)}{e^{-x/2}\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right)}$$

$$= \frac{e^x}{2}\,\frac{e^{\frac{n-1}{2}x}\left(-2\,\mathrm{sh}\,\frac{nx}{2}\right)}{-2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}} + \frac{e^{-x}}{2}\,e^{\frac{1-n}{2}x}\,\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{nx}{2}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\mathrm{sh}\,n\frac{x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}e^{(n+1)\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-(n+1)\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{sh}\,n\frac{x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}}\,\frac{1}{2}\,2\,\mathrm{ch}\left((n+1)\frac{x}{2}\right)$$

donc,

pour $x = 0$, $C = n$

pour $x \neq 0$, $C = \dfrac{\mathrm{sh}\,\frac{nx}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}}$

$\boxed{e}$ simplifier $S = \mathrm{sh}\,x + \mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x+2y) + \dots + \mathrm{sh}(x+ny)$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

$$S = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} + \dots + \frac{e^{x+ny} - e^{-x-ny}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^x\left[1 + e^y + (e^y)^2 + \dots + (e^y)^n\right] - \frac{1}{2}e^{-x}\left[1 + e^{-y} + (e^{-y})^2 + \dots + (e^{-y})^n\right]$$

1er cas : $y = 0$: $S = (n+1)\,\mathrm{sh}\,x$

2ème cas : $y \neq 0$: $S = \frac{1}{2}e^x\,\frac{1-(e^y)^{n+1}}{1-e^y} - \frac{1}{2}e^{-x}\,\frac{1-(e^{-y})^{n+1}}{1-e^{-y}}$

$$\underline{\underline{S}} = \frac{e^x}{2}\,\frac{1-e^{(n+1)y}}{1-e^y} - \frac{e^{-x}}{2}\,\frac{1-e^{-(n+1)y}}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{2}\,e^{(n+1)y/2}\left[e^{-(n+1)y/2}-e^{(n+1)y/2}\right]$$

$$= \frac{e^x}{2}\,\frac{e^{(n+1)y/2}\left[e^{-(n+1)y/2}-e^{(n+1)y/2}\right]}{e^{y/2}\left[e^{-y/2}-e^{y/2}\right]} - \frac{e^{-x}}{2}\,\frac{e^{-(n+1)y/2}\left[e^{(n+1)y/2}-e^{-(n+1)y/2}\right]}{e^{-y/2}\left[e^{y/2}-e^{-y/2}\right]}$$

$$= \frac{e^x}{2}\,e^{ny/2}\,\frac{-2\,\mathrm{sh}\,(n+1)y/2}{-2\,\mathrm{sh}\,\frac{y}{2}} - \frac{e^{-x}}{2}\,e^{-ny/2}\,\frac{2\,\mathrm{ch}\,\frac{(n+1)y}{2}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{y}{2}}$$

$$= \left[\frac{e^{x+ny/2}}{2} - \frac{e^{-x-ny/2}}{2}\right]\frac{\mathrm{sh}\,(n+1)y/2}{\mathrm{sh}\,y/2} = \underline{\underline{\frac{\mathrm{sh}\,\frac{(n+1)y}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{y}{2}}\;\mathrm{sh}\left(x+\frac{ny}{2}\right)}}$$

f simplifier $T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,\mathrm{ch}\,(kx)$ $(x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N})$

$$\underline{\underline{T}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^x)^k\,1^{n-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{-x})^k\,1^{n-k}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x+1\right)^n + \frac{1}{2}\left(e^{-x}+1\right)^n = \frac{1}{2}\left[e^{x/2}\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)\right]^n + \frac{1}{2}\left[e^{-x/2}\left(e^{-x/2}+e^{x/2}\right)\right]^n$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{nx/2}\left(2\,\mathrm{ch}\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\,e^{-nx/2}\left(2\,\mathrm{ch}\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\,2^n\left(\mathrm{ch}\frac{x}{2}\right)^n 2\,\mathrm{ch}\frac{nx}{2}$$

$$= \underline{\underline{2^n\left(\mathrm{ch}\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)}}$$

g étudier et représenter $f : x \longmapsto 2\arctan(e^x) - \arcsin(\mathrm{th}\,x)$

f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2\,\frac{e^x}{1+(e^x)^2} - \frac{1/\mathrm{ch}^2 x}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2 x}} = \frac{2}{e^{-x}+e^x} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x\sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ch}\,x} - \frac{1}{\mathrm{ch}\,x} = 0$$

donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

$f(0) = 2\arctan 1 - \arcsin 0 = 2\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\underline{\underline{f(x) = \frac{\pi}{2}}}$

VIII Fonctions hyperboliques réciproques

1) Fonction argument sinus hyperbolique

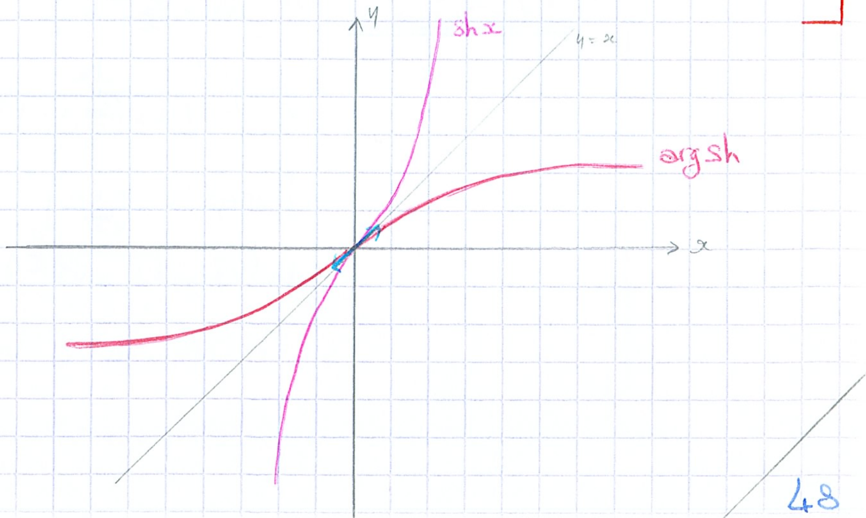
sh est 1 bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, sh admet donc 1 bijection réciproque appelée argument sinus hyperbolique, notée argsh.

$$\mathrm{argsh} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = \mathrm{argsh}\,x \end{array} \qquad \mathrm{sh} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto x = \mathrm{sh}\,y \end{array}$$

$$\boxed{\begin{cases} y = \mathrm{argsh}\,x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \mathrm{sh}\,y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

Th [argsh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$]

x	$-\infty$	0	$+\infty$
argsh x	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$



rem: $\mathrm{argsh}\,x = \mathrm{sh}\,x \iff x = 0$

* expression logarithmique de argsh x :

soit $y = \operatorname{argsh} x$, $x = \operatorname{sh} y$ et $\operatorname{ch} y = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$

$\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y = x + \sqrt{1+x^2} = e^y$

donc $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

Th [pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$]

rem : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ car $x + \sqrt{1+x^2} = e^y > 0$

* dérivation de argsh x :

argsh x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$(\operatorname{argsh})'(x) = \frac{1 + 2x/2\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Th [argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $(\operatorname{argsh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$]

généralisation :

$$I \xrightarrow{u} \mathbb{R} \xrightarrow{\operatorname{argsh}} \mathbb{R} \qquad (\varphi)$$
$$x \longmapsto u(x) \longmapsto \operatorname{argsh}[u(x)]$$

Th [si u est dérivable en x alors, $\begin{cases} \varphi \text{ est dérivable en } x \\ \varphi'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}} \end{cases}$]

ex : $\varphi : x \longmapsto \operatorname{argsh}\sqrt{x}$

φ est définie, continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et :

$$\varphi'(x) = \frac{1/2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$$

rem : 1 primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ est $x \longmapsto \operatorname{argsh}\sqrt{x}$

Th [soit u dérivable sur I,
une primitive sur I de $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}$ est $x \mapsto \operatorname{argsh}(u(x))$
$x \longmapsto \ln(u(x) + \sqrt{1+u^2(x)})$]

ex : 1. * $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = [\operatorname{argsh} x]_0^1 = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

* $$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}} = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{2\sqrt{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_{-1}^{2} \frac{3/2}{\sqrt{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\left[\operatorname{argsh}\frac{3x}{2}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\operatorname{argsh} 3 - \operatorname{argsh}\left(-\frac{3}{2}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\ln(3+\sqrt{1+9}) - \ln\left(-\frac{3}{2}+\sqrt{1+\frac{9}{4}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(3+\sqrt{10}) - \ln\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right] = \frac{1}{3}\ln\frac{6+2\sqrt{10}}{\sqrt{13}-3}$$

* $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \int_0^1 \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+\frac{4}{3}\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{4x+2}{2\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 \frac{2/\sqrt{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\,dx$$

$$= \left[\operatorname{argsh}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \operatorname{argsh}\frac{3}{\sqrt{3}} - \operatorname{argsh}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{1+\sqrt{3}^2}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{3}^2}}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{3}+2) - \ln\frac{3}{\sqrt{3}} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Th pour $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \text{sh}(\text{argsh}\, x) = x \\ \text{ch}(\text{argsh}\, x) = \sqrt{1+x^2} \\ \text{th}(\text{argsh}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

pour $y \in \mathbb{R}$, $\text{argsh}(\text{sh}\, y) = y$

2) fonction argument cosinus hyperbolique

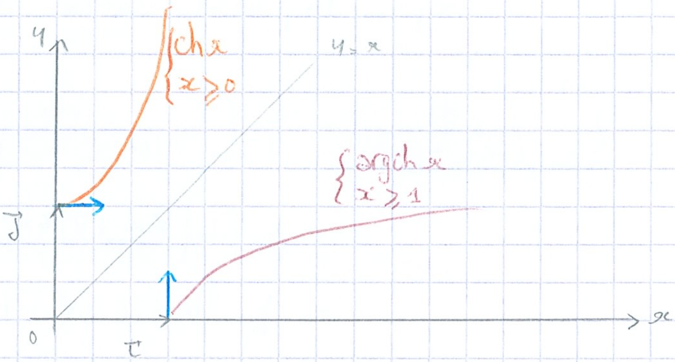
La restriction de ch à $\mathbb{R}^+$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$, elle admet donc une bijection réciproque, appelée argument cosinus hyperbolique, notée argch.

$\text{argch} : \begin{array}{l} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto y = \text{argch}\, x \end{array}$ $\quad$ $\text{ch} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[\\ y \longmapsto x = \text{ch}\, y \end{array}$

$$\begin{cases} y = \text{argch}\, x \\ x \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \text{ch}\, y \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Th argch est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$, continue, strictement croissante sur $[1, +\infty[$

x	1	$+\infty$
argch x	0 ↗	$+\infty$



* expression logarithmique de argch x.

soit $\begin{cases} y = \text{argch}\, x \\ x \geqslant 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \text{ch}\, y \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \text{sh}\, y \geqslant 0$ donc $\text{sh}\, y = \sqrt{\text{ch}^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$

$\text{ch}\, y + \text{sh}\, y = x + \sqrt{x^2 - 1} = e^y$

donc $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

Th pour $x \geqslant 1$, $\text{argch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

* dérivation de argch x :

argch est dérivable sur $]1, +\infty[$, et :

$$(\text{argch})'(x) = \frac{1 + 2x/2\sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{(x + \sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Th argch est $\begin{cases} \text{définie, continue sur } [1, +\infty[\\ \text{dérivable sur }]1, +\infty[, \text{ et : } (\text{argch})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$

rem : 1 primitive sur $]1, +\infty[$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est $x \longmapsto \text{argch}\, x$

MAIS : $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ admet des primitives sur $]-\infty, -1[$ aussi.

soit $f(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|$

$x \in D \iff \begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} \neq 0 \end{cases}$

si $x \geqslant 1$, $x + \sqrt{x^2-1} \neq 0$

si $x \leqslant -1$, $x + \sqrt{x^2 - 1} = 0 \iff \sqrt{x^2-1} = -x \iff x^2 - 1 = x^2$

donc $x + \sqrt{x^2-1} \neq 0$

f est définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

f est dérivable en tout x vérifiant, $\begin{cases} x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$

donc sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Th Une primitive sur $]-\infty, -1[$, sur $]1, +\infty[$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est $x \longmapsto \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$

(argch x est valable sur $]1, +\infty[$ seulement, $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$ sur $]-\infty, -1[$, $]1, +\infty[$)

ex : $\ast$ $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_2^3 = \ln(3+2\sqrt{2}) - \ln(2+\sqrt{3}) = \ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$

$\ast$ $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|-2+\sqrt{3}\right| - \ln\left|-4+\sqrt{15}\right| = \ln\frac{-2+\sqrt{3}}{-4+\sqrt{15}}$

généralisation : **Th** soit u dérivable sur I, à valeurs dans $]-\infty, -1[$ ou $]1, +\infty[$
une primitive sur I de $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}$ est

$x \longmapsto \ln\left|u(x) + \sqrt{u^2(x)-1}\right|$

ex : $\ast$ $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{36x^2-25}} = \frac{1}{5}\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{6x}{5}\right)^2-1}} = \frac{1}{5}\,\frac{5}{6}\int_{-3}^{-1} \frac{6/5}{\sqrt{\left(\frac{6x}{5}\right)^2-1}} = \frac{1}{6}\left[\ln\left|\frac{6x}{5}+\sqrt{\left(\frac{6x}{5}\right)^2-1}\right|\right]_{-3}^{-1}$

on n'écrit pas $-\ln 5$ car c'est 1 cste

$$= \frac{1}{6}\left[\ln\left|\frac{6x+\sqrt{36x^2-25}}{5}\right|\right]_{-3}^{-1} = \frac{1}{6}\left[\ln\left|6x+\sqrt{36x^2-25}\right|\right]_{-3}^{-1}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\ln\left|-6+\sqrt{11}\right| - \ln\left|-18+\sqrt{299}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{-6+\sqrt{11}}{-18+\sqrt{299}} = \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{23}-\sqrt{13}}$$

$\ast$ $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x}} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2-1}} = \frac{1}{3}\int_{-2}^{-1} \frac{3}{\sqrt{(3x-1)^2-1}}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\left|3x-1+\sqrt{(3x-1)^2-1}\right|\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{3}\left[\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x}\right|\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\left|-4+\sqrt{15}\right| - \ln\left|-7+4\sqrt{3}\right|\right] = \frac{1}{3}\ln\frac{-4+\sqrt{15}}{-7+4\sqrt{3}}$$

Th pour $x \geq 1$, $\operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = x$
$\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{th}(\operatorname{argch} x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
pour $y \geq 0$, $\operatorname{argch}(\operatorname{ch} y) = y$

($\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) \geq 0$ donc $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{argch} x) - 1}$)

rem : pour $y \leq 0$, $\operatorname{argch}(\operatorname{ch} y) = \operatorname{argch}(\operatorname{ch}(-y)) = -y$
pour $z \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argch}(\operatorname{ch} z) = |z|$

3) Fonction argument tangente hyperbolique

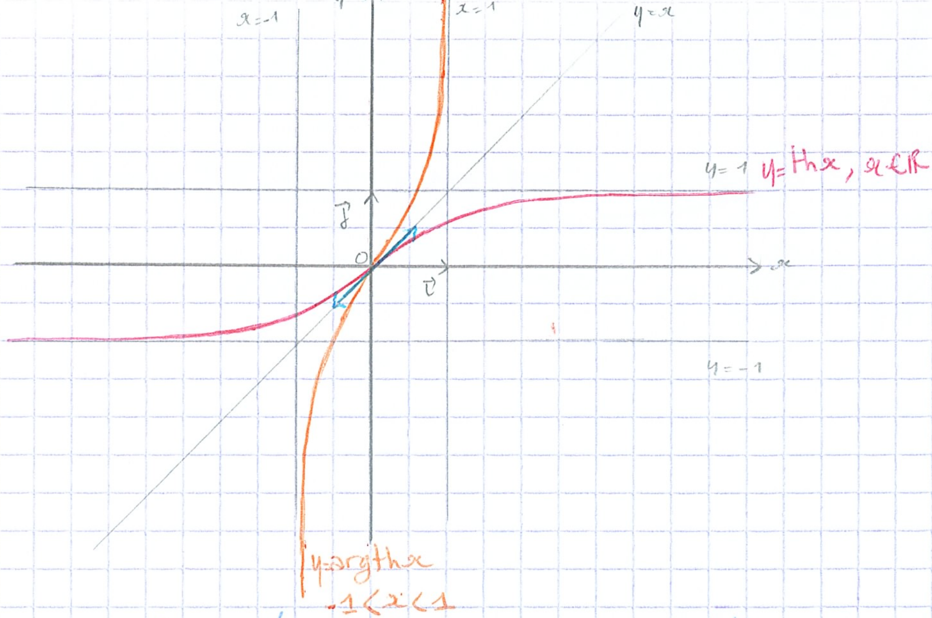
th est 1 bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$, th admet donc 1 bijection réciproque, appelée argument tangente hyperbolique, notée argth.

$$\operatorname{argth} : \begin{array}{l}]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y = \operatorname{argth} x \end{array} \qquad \operatorname{th} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[\\ y \longmapsto x = \operatorname{th} y \end{array}$$

$$\boxed{\begin{cases} y = \operatorname{argth} x \\ -1 < x < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{th} y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

Th argth est une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$, continue, strictement croissante sur $]-1,1[$.

C



* expression logarithmique de argth x :

soit $\begin{cases} y = \text{argth}\, x \\ -1 < x < 1 \end{cases}$, $x = \text{th}\, y = \dfrac{\text{sh}\, y}{\text{ch}\, y} = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$

$\Rightarrow x e^{2y} + x = e^{2y} - 1 \Rightarrow e^{2y}(1-x) = x + 1$

$\Rightarrow e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x} > 0$

$\Rightarrow 2y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

Th $\left[\text{pour } -1 < x < 1, \quad \text{argth}\, x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} \right]$

* dérivation de argth x :

argth est dérivable sur $]-1, 1[$, et :

$$(\text{argth})'(x) = \frac{1}{2} \, \frac{\frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \, \frac{1 - x + 1 + x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

Th [argth est définie, continue, dérivable sur $]-1, 1[$, et :
$$(\text{argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$
]

rem : 1 primitive sur $]-1, 1[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est $x \mapsto \text{argth}\, x$

$x \mapsto \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

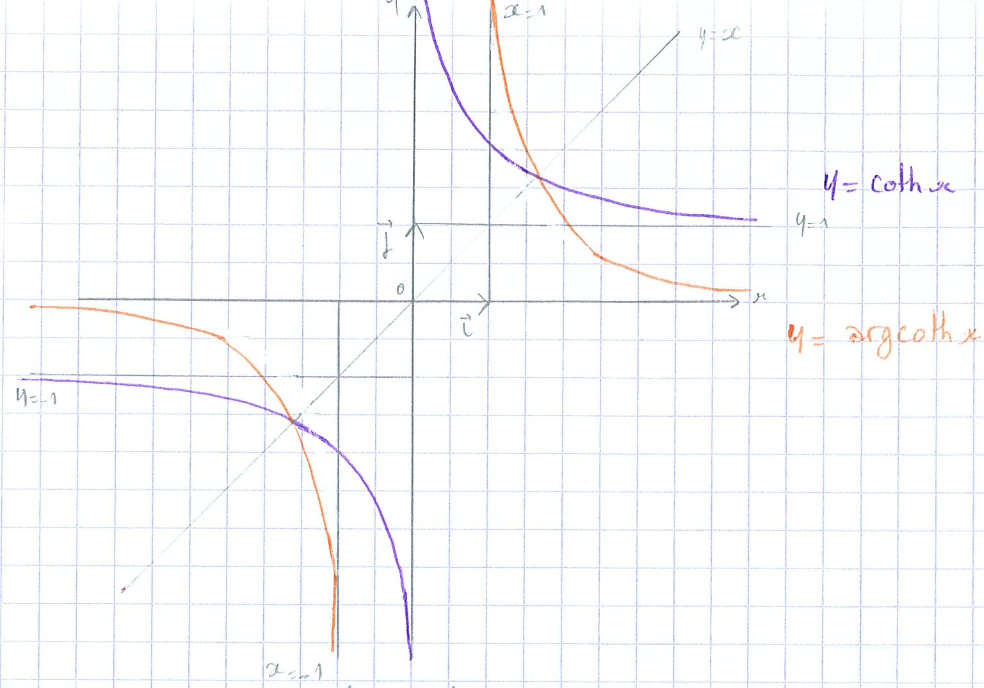
4) Fonction argument cotangente hyperbolique

coth est 1 bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, coth admet donc 1 bijection réciproque, appelée argument cotangente hyperbolique, notée argcoth.

argcoth : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ x \longmapsto y = \text{argcoth}\, x \end{array}$ coth : $\begin{array}{l}]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ y \longmapsto x = \text{coth}\, y \end{array}$

$$\boxed{\begin{cases} y = \text{argcoth}\, x \\ |x| > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \text{coth}\, y \\ y \neq 0 \end{cases}}$$

Th [argcoth est une bijection de $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^*$]



* expression logarithmique de argcoth x :

soit $\begin{cases} y = \operatorname{argcoth} x \\ |x|>1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \coth y \\ y \neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \dfrac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$

$\Rightarrow x e^{2y} - x = e^{2y} + 1 \rightarrow e^{2y}(1-x) = -(x+1)$

$\Rightarrow e^{2y} = \dfrac{1+x}{x-1}$

$\Rightarrow 2y = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$

Th $\left[\text{pour } |x|>1, \quad \operatorname{argcoth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}\right]$

* dérivation de argcoth x :

argcoth x est dérivable pour $|x|>1$, et :

$(\operatorname{argcoth})'(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}$

$= \dfrac{1}{1-x^2}$

Th $\left[\text{argcoth est définie, continue, dérivable pour } |x|>1, \text{ et : } (\operatorname{argcoth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = (\operatorname{argth})'(x)\right]$

(car $\ln|u| = \dfrac{u'}{u}$ donc $\ln u = \dfrac{u'}{u}$ et $\ln(-u) = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$

rem : $\operatorname{argcoth} x = C + \operatorname{argth} x$ est faux car les 2 intervalles sont différents

5) primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$

$f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est continue (donc possède des primitives) sur :

$]-\infty, -1[, \ ]-1, 1[, \ ]1, +\infty[$

Méthode → 1 →
Trouver des primitives

sur $]-1, 1[$, 1 primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est

$x \longmapsto \operatorname{argth} x \quad \left(x \longmapsto \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}\right)$

sur $]-\infty, -1[$, $]1, +\infty[$, 1 primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est

$x \longmapsto \operatorname{argcoth} x \quad \left(x \longmapsto \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}\right)$

2 → On décompose $\frac{1}{1-x^2}$ en somme de fractions rationnelles. C

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

$$1 = A(1+x) + B(1-x) = A + Ax + B - Bx \Rightarrow \begin{cases} 1 = A+B \\ 0 = A-B \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

donc $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$

sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$, 1 primitive de $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$ est

$$x \longmapsto -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|$$

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

ex :

* $I = \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{16-9x^2}$ $\qquad \frac{1}{16-9x^2} = \frac{1}{(4-3x)(4+3x)} = \frac{A}{4-3x} \; \frac{B}{4+3x}$

$$1 = 4A + 3Ax + 4B - 3Bx \Rightarrow \begin{cases} 1 = 4(A+B) \\ 0 = 3(A-B) \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{8}$$

$$I = \int_{-3}^{-2} \frac{1/8}{4-3x}\,dx + \int_{-3}^{-2} \frac{1/8}{4+3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}\int_{-3}^{-2} \frac{-3}{4-3x}\,dx + \frac{1}{3}\int_{-3}^{2} \frac{3}{4+3x}\,dx\right] = -\frac{1}{24}\left[\ln|4-3x|\right]_{-3}^{-2} + \frac{1}{24}\left[\ln|4+3x|\right]_{-3}^{-2}$$

$$= \frac{1}{24}\left[\ln\left|\frac{4+3x}{4-3x}\right|\right]_{-3}^{-2} = \frac{1}{24}\left[\ln\left|\frac{-2}{10}\right| - \ln\left|\frac{-5}{13}\right|\right] = \frac{1}{24}\left(\ln\frac{1}{5} - \ln\frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{1}{24}\ln\frac{13}{25}$$

* $J = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x-6}$ $\qquad \frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$

$$1 = Ax - 2A + Bx + 3B \Rightarrow \begin{cases} 1 = 3B - 2A \\ 0 = A+B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ 5B = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$J = \int_0^1 \frac{-1/5}{x+3}\,dx + \int_0^1 \frac{1/5}{x-2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{5}\left[\ln|x+3|\right]_0^1 + \frac{1}{5}\left[\ln|x-2|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{5}\left[\ln\left|\frac{1}{4}\right| - \ln\left|\frac{-2}{3}\right|\right] = \frac{1}{5}\left[\ln\frac{1}{4} - \ln\frac{2}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}$$

Trouver 1 primitive de $x \longmapsto \frac{1}{3x^2+4x-7}$

$$f(x) = \frac{1}{3x^2+4x-7} = \frac{1}{(x-1)(3x+7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{3x+7}$$

$$\begin{cases} 1 = 7A - B \\ 0 = 3A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -3A \\ A = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ B = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{x-1} - \frac{3}{10}\,\frac{1}{3x+7}$$

1 primitive sur $]-\infty, -\frac{7}{3}[$, $]-\frac{7}{3}, 1[$, $]1,+\infty[$ est :

$$x \longmapsto \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-1}{3x+7}\right|$$

6) autres exercices

$\boxed{a}$ simplifier $f(x) = \text{argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$

f est définie sur $\mathbb{R}$.

je pose $x = \text{sh}\,t$ $(t \in \mathbb{R})$

$f(x) = \text{argsh}\left(2\,\text{sh}\,t\sqrt{1+\text{sh}^2 t}\right) = \text{argsh}\left(2\,\text{sh}\,t\,\text{ch}\,t\right) = \text{argsh}(\text{sh}\,2t) = 2t$

$= 2\,\text{argsh}\,x$

$\boxed{b}$ résoudre $2\,\text{argsh}\,x - \text{argth}\,\frac{3}{5} = \text{argch}\,\frac{13}{5}$ (1)

(1) $\Rightarrow$ $\text{argsh}\,x = \frac{1}{2}\left(\text{argch}\,\frac{13}{5} + \text{argth}\,\frac{3}{5}\right)$

(1) $\Rightarrow$ $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{13}{5}+\sqrt{\frac{169}{25}-1}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{1+3/5}{1-3/5}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{13+12}{5} + \ln\left(\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{2}\right)^{1/2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\ln 5 + \ln 2\right] = \frac{1}{2}\ln 10 = \ln\sqrt{10}$

(1) $\Rightarrow$ $x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{10}$

(1) $\Rightarrow$ $x^2 = \left(\sqrt{10} - \sqrt{x^2+1}\right)^2 = 10 - 2\sqrt{10}\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1$

(1) $\Rightarrow$ $0 = 11 - 2\sqrt{10}\sqrt{x^2+1}$

(1) $\Rightarrow$ $\sqrt{x^2+1} = \frac{11}{2\sqrt{10}}$

(1) $\Rightarrow$ $x^2 = \left(\frac{11}{2\sqrt{10}}\right)^2 - 1 = \frac{121}{40} - \frac{40}{40} = \frac{81}{40}$

(1) $\Rightarrow$ $x = \sqrt{\frac{81}{40}}$ car $x > 0$ car $\text{argsh}\,x > 0$