Algèbre linéaire

$\mathbb{K}$ ss_corps de $\mathbb{C}$

I Combinaisons linéaires

1_ famille de scalaire à support fini

$I \neq \emptyset$ * $(a_i)_{i\in I}$ famille de vecteurs indexée par I (application de I dans $\mathbb{K}$

* support de $(a_i)_{i\in I}$ $= \{ i \in I / a_i \neq 0 \}$

* famille à support fini : dont le support est fini

$(\exists J \subset I$ (J fini) $/ \forall i \in I \_ J, a_i = 0$ $\quad$ J contient le support

notations : $\mathbb{K}^I$ ensemble des familles

$\mathbb{K}^{(I)}$ ensemble des familles de support fini

ex : $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: ensemble des suites

$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$: ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang

ensemble des polynômes

Pp) $\mathbb{K}^I$ et $\mathbb{K}^{(I)}$ sont des $\mathbb{K}$ev $\quad$ ($K^{(I)}$ ss_ev de K^I)

2_ combinaison linéaire

E un $\mathbb{K}$ev, $(x_i)_{i\in I}$ famille de vecteurs de E indexée par I

$(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$

si J est un sous_ensemble de I qui contient le support de $(a_i)_{i\in I}$

alors $\sum\limits_{i\in J} a_i x_i \in E$ $\quad$ (ne dépend pas de J)

notation : $\sum\limits_{i\in J} a_i x_i = \sum\limits_{i\in I} a_i x_i$ $\quad$ (on ne peut pas calculer une somme infinie ce qui est le cas de $\sum\limits_{i\in I}$)

rem : * L'ensemble des combi. lin. de $(x_i)_{i\in I}$ est un **ss_ev** de E

* $\Psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^{(I)} \longrightarrow E \\ (a_i)_{i\in I} \longmapsto \sum\limits_{i\in I} a_i x_i \end{array} \right.$ est linéaire $\quad$ (une combi. lin de combi. lin est une combi. lin)

car $x_i = a_{i_1} x'_1 + \dots + a_{i_n} x'_n$ combi. lin.

II Familles libres, génératrices _ bases

$(x_i)_{i\in I}$ famille de vecteurs de E

* $(x_i)_{i\in I}$ génératrice $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E, \exists (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} / x = \sum\limits_{i\in I} a_i x_i$

$(x_i)_{i\in I}$ libre $\Leftrightarrow$ $\forall (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum\limits_{i\in I} a_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, a_i =$

$(x_i)_{i\in I}$ base $\Leftrightarrow$ $(x_i)_{i\in I}$ libre **et** génératrice

Pp 1) $(x_i)_{i\in I}$ libre $\Leftrightarrow$ toute sous famille de $(x_i)_{i\in I}$ est libre

si $I = \mathbb{N}$, $\Leftrightarrow$ $\forall N \in \mathbb{N}, (x_i)_{0 \leq i \leq N}$ est libre

2) $(x_i)_{i\in I}$ génératrice $\Leftrightarrow$ Ψ surjective

libre $\Leftrightarrow$ Ψ injective

base $\Leftrightarrow$ Ψ bijective

|| * si $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E, $\forall x \in E$, $\exists ! (a_i)_{i\in I} / \Psi((a_i)_{i\in I}) =$

$(a_i)_{i\in I}$ est la famille des coordonnées de x dans la base $(x_i)_{i\in I}$

ex : base de $\mathbb{K}[X]$: $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$

base de $\mathbb{C}(X)$: $\left((X^n)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{1}{(X-\alpha)^k}\right)_{\substack{\alpha\in\mathbb{C} \\ k\in\mathbb{N}^*}} \right)$

III Espace vectoriel de dimension finie

|| E de dim. finie $\Leftrightarrow$ E possède une partie génératrice finie

Pp E ev de dim. finie,

1) Toute famille génératrice contient une famille génératrice finie

th de la base incomplète

si $\begin{cases} \mathcal{L} \text{ est une famille libre} \\ S \text{ .... génératrice} \end{cases}$ alors $\exists$ une base $\mathcal{B}$ de E / $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup$

Pp 2) Toutes les bases / sont finies
/ ont le même cardinal qui est la dimension de E

Pp 3) si $\dim E = n$,
toute famille libre a au plus n vecteurs
toute famille libre de n vecteurs est une base
toute famille génératrice a au moins n vecteurs
toute famille génératrice de n vecteurs est une base

IV Caractérisation des applications linéaires

Pp 1) E ev, $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ base de E
F ev, $(f_i)_{i \in I}$ famille de vecteurs de F

$\exists !$ application linéaire u / $\forall i \in I$, $u(x_i) = f_i$ (une appli. li est déterminée par l'image de la base)

unicité $\forall x \in E$, $\exists (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ / $x = \sum_{i \in I} a_i x_i$

J fini, support de $(a_i)_{i \in I} \subset I$ $\quad x = \sum_{i \in J} a_i x_i$

$u(x) = u\left(\sum_{i \in J} a_i x_i\right) = \sum_{i \in J} a_i f_i = \sum_{i \in I} a_i f_i$

existence $u : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ \sum_{i \in I} a_i x_i \longmapsto \sum_{i \in I} a_i f_i \end{array} \right.$ est-elle linéaire ?

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] & & F \\ & \mathbb{K}^{(I)} \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^{(I)} \longrightarrow E \\ (a_i)_{i \in I} \longmapsto \sum_{i \in I} a_i x_i \end{array} \right.$ est un isomorphisme

$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^{(I)} \longrightarrow F \\ (a_i)_{i \in I} \longmapsto \sum_{i} a_i f_i \end{array} \right.$ est linéaire

alors $u = \varphi \circ \psi^{-1}$ est une application linéaire

Pp 2) u injective $\Leftrightarrow$ $\varphi \circ \psi^{-1}$ injective
$\Leftrightarrow$ φ injective
$\Leftrightarrow$ $(f_i)_{i \in I}$ libre
u bijective $\Leftrightarrow$ $(f_i)_{i \in I}$ base de F

(u surjective $\Leftrightarrow$ .... surj ..
.... surj
.... géné)

rem : $(f_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$

V ...... en dimension finie : matrice d'une application linéaire

si $\begin{cases} \dim E = q \\ \dim F = p \end{cases}$ $\begin{array}{l} \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q) \text{ base de } E \\ \mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \text{ .... } F \end{array}$ $\Big\} \; u \in \mathcal{L}(E, F)$

u est caractérisée par : $\begin{cases} u(e_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \dots + a_{p1}\varepsilon_p \\ \vdots \\ u(e_q) = \end{cases}$

avec $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathbb{K}^{\{1,\dots,p\} \times \{1,\dots,q\}} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$

$$A = \underset{u(e_1)}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}}^{\varepsilon_1}$$

VI Produit d'espaces vectoriels

I ensemble non vide,
$\forall i \in I$, E_i ev sur $\mathbb{K}$ $\quad E = \prod_{i \in I} E_i = \{(x_i)_{i \in I} \,/\, \forall i \in I, x_i \in E_i\}$

E est un Kev pour les lois + et multiplication par un scalaire

Pp 1) $i_0 \in I$

$\Pi_{i_0} : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E_{i_0} \\ x = (x_i)_{i \in I} \longmapsto x_{i_0} \end{array} \right.$ est une application linéaire

$\Pi_1 : \left| \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \times E_3 \longrightarrow E_1 \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1 \end{array} \right.$

$P_{i_0} : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto (y_i)_{i \in I} \end{array} \right.$ $\forall i \in I / i \neq i_0,\ y_i = 0$
$i = i_0,\ y_{i_0} = x_{i_0}$

$P_1 : \left| \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \times E_3 \rightarrow E_1 \times E_2 \times E_3 \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, 0, 0) \end{array} \right.$

P_{i_0} permet de composer car les ensembles d'arrivée et de départ sont les mêmes :

$$P_{i_0} \circ P_{j_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } i_0 \neq j_0 \\ P_{i_0} & \text{si } i_0 = j_0 \end{cases}$$

Pp 2) I fini, $\forall i \in I$, E_i de dim finie $n_i \Longrightarrow$ E de dim finie
$\dim E = \sum_{i \in I} n_i = \sum_{i \in I} \dim E_i$

$I = \{1, 2, \dots, n\}$

$\begin{cases} \mathcal{B}_1 = (\underbrace{e_{11}}, \underbrace{e_{12}}, \dots, \underbrace{e_{1n_1}}) & \text{base de } E_1 \\ \mathcal{B}_2 = (\underbrace{e_{21}}, e_{22}, \dots, e_{2n_2}) & E_2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{B}_m = (e_{m,1}, e_{m2}, \dots, e_{mn_m}) & E_m \end{cases}$

$\mathcal{B} = \Big((\underbrace{e_{11}}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_m}), (\underbrace{e_{1,2}}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_m}), \dots, (\underbrace{e_{1n_1}}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_m}), (0_{E_1}, \underbrace{e_{21}}, 0_{E_3} \dots), \dots, (0_{E_1}, \dots, 0_{E_{m-1}}, e_{mn_m}) \Big)$

$\begin{cases} E_1 = \mathbb{R}^2 \\ E_2 = \mathbb{R}^3 \end{cases}$ $E_1 \times E_2 = \mathbb{R}^5 = \{(x,y), (a,b,c)\} = \{x, y, a, b, c\}$

VII Somme, somme directe d'une famille de sous-espaces vectoriels

1. $I = \{1, \dots, n\}$
$\forall i \in I$, E_i ss-ev de F
somme de la famille $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$: $\sum_{1 \leq i \leq p} E_i = \{x_1 + x_2 + \dots + x_p,\ x_1 \in E_1, \dots, x_p \in E_p\}$

Pp 1) $\sum_{1 \leq i \leq p} E_i$ est un **ss-ev** de F

Pp 2) $\Psi : \left| \begin{array}{l} \prod_{1 \leq i \leq p} E_i \longrightarrow F \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) \longmapsto x_1 + x_2 + \dots + x_p \end{array} \right.$ est linéaire $\operatorname{Im} \Psi = \sum_{1 \leq i \leq p} E_i$

Pp 3) si $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, E_i est de dim finie n_i,

alors $\sum_{1 \leq i \leq p} E_i$ est de dim finie et $\dim \sum_{1 \leq i \leq p} E_i \leqslant \sum_{1 \leq i \leq p} n_i$
($=$ si $\oplus E_i$)

2. Somme directe
$\sum_{1 \leq i \leq p} E_i$ directe $\Longleftrightarrow$ $\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{1 \leq i \leq p} E_i$, $x_1 + \dots + x_p = 0 \Longrightarrow x_1 = \dots = x_p = 0$

dans ce cas, on note : $\sum_{1 \leq i \leq p} E_i = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$

propriétés équivalentes :
1) la somme $\sum_{1 \leq i \leq p} E_i$ est directe
$\Longleftrightarrow$
2) Ψ est **injective** (car $(x_1, \dots, x_p)$ est libre)
$\Longleftrightarrow$
3) $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$, $\left(\sum_{k=1}^{i} E_k \right) \oplus E_{i+1}$ ou $\left(\sum_{k=1}^{i} E_k \right) \cap E_{i+1} = \{0\}$

$\begin{cases} E_1, E_2 \text{ ss-ev de } F, \\ E_1 \oplus E_2 \text{ ou } E_1 \cap E_2 = \{0\} : \end{cases}$

si $E_1 \oplus E_2$: soit $x \in E_1 \cap E_2$, $0 = \underbrace{x}_{\in E_1} + \underbrace{(-x)}_{\in E_2}$

donc $x = -x = 0$ $((x + (-x)) = 0 \Rightarrow x = -x = 0)$

si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, $\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x_1 + x_2 = 0$

$\underbrace{x_1}_{\in E_1} = \underbrace{-x_2}_{\in E_2} \in E_1 \cap E_2 = \{0\}$

donc $x_1 = x_2 = 0$ donc $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

donc $E_1 \oplus E_2$

$\Rightarrow$ on suppose $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$

$\forall x \in \left(\sum_{k=1}^{p-1} E_k \right) \cap E_p$, $\exists (x_1, \dots, x_{p-1}) \in E_1 \times \dots \times E_{p-1} /$

$x = x_1 + x_2 + \dots + x_{p-1} \Leftrightarrow \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \dots + \underbrace{x_{p-1}}_{\in E_{p-1}} + \underbrace{(-x)}_{\in E_p} = 0$

or $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$

donc $x_1 = \dots = x_{p-1} = x = 0$

même dém. pour $i \in \{1, \dots, p\}$

$\Leftarrow$ on suppose $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$, $\left(\sum_{1 \leq k \leq i} E_k \right) \cap E_{i+1} = \{0\}$

$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, $x_1 + \dots + x_p = 0 \Rightarrow \underbrace{x_1 + \dots + x_{p-1}}_{\in \sum_{1 \leq k \leq p-1} E_k \cap E_p = \{0\}} = -x_p$

$\Rightarrow x_p = 0 \Rightarrow \overbrace{x_1 + \dots + x_{p-1}}^{\text{idem}} = 0$

$\Rightarrow x_{p-1} = 0$

$\vdots$

$\Rightarrow x_1 = 0$

donc $x_1 + \dots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_p = 0$

$\Leftrightarrow$ 4) $\forall x \in \sum_{1 \leq i \leq p} E_i$, $\exists ! (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{1 \leq i \leq p} E_i$ / $x = x_1 + \dots + x_p$

3. Sous espaces supplémentaires

$E_1, E_2, \dots, E_p$ ss. ev de F supplémentaires $\Leftrightarrow$ $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i = F$

propriétés équivalentes :

1) $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i = F$

$\Leftrightarrow$ 2) Ψ est bijective

$\Leftrightarrow$ 3) $\forall x \in F$, $\exists ! (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{1 \leq i \leq p} E_i$ / $x = x_1 + \dots + x_p$

ex : $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q \neq 0$, $\deg Q = n$

$E_1 = Q\mathbb{K}[X]$: ss-ev de $\mathbb{K}[X]$ des multiples de Q

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \underbrace{AQ}_{\in Q\mathbb{K}[X]} + \underbrace{B}_{\in \mathbb{K}_{n-1}[X]}$: $\mathbb{K}[X] = Q\mathbb{K}[X] + \mathbb{K}_{n-1}[X]$

or $Q\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_{n-1}[X] = \{0\}$ (degré)

$\mathbb{K}[X] = Q\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$

Pp 1) si $\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, & E_i \text{ ev de dim finie} \\ \mathcal{B}_i \text{ base de } E_i \end{cases}$ alors $\mathcal{B} = \bigcup_{1 \leq i \leq p} \mathcal{B}_i$

$\sum_{1 \leq i \leq p} E_i = F \Leftrightarrow \mathcal{B}$ génératrice de F

$\bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i \Leftrightarrow \mathcal{B}$ libre

$\bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i = F \Leftrightarrow \mathcal{B}$ base de F

alors, $\dim F = \sum_{1 \leq i \leq p} \dim E_i$

Pp 2) si $\begin{cases} \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i = F \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \ u_i \in \mathcal{L}(E_i, G) \end{cases}$ alors $\exists !$ application $u \in \mathcal{L}(E, G)$ /

$\forall i \in \{1, \dots, p\}$, la restriction de u à E_i est u_i : $u_{/E_i} = u_i$

autrement dit, on connait u quand on connait une restriction.

$$\begin{tikzcd}
\overset{x}{E_i} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\psi^{-1}"'] & G \\
\underset{(x_1, \dots, x_p)}{\prod E_i} \arrow[r, "\pi_{i_0}"] & \underset{x_{i0}}{E_{i0}} \arrow[u, "u_i"']
\end{tikzcd}$$

$\underbrace{u}_{} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{u_i \circ}_{} \underbrace{\pi_{i_0}}_{} \circ \underbrace{\psi^{-1}}_{}$

$\Psi : \prod_{1 \leq i \leq p} E_i \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i = F$

$\Psi^{-1} : \begin{vmatrix} F & \longrightarrow & \prod E_i \\ x & \longmapsto & (x_1, \dots, x_p) \end{vmatrix}$

$$\pi_{i_0} : \left| \begin{array}{l} \prod E_i \longrightarrow E_{i_0} \\ (x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_{i_0} \end{array} \right.$$

$$(u_i \circ \pi_{i_0})(x_{i_0}) \in G$$
$$\in \mathcal{L}(\prod E_i, G)$$
$$u_i \circ \pi_{i_0} \circ \psi^{-1} \in \mathcal{L}(F, G)$$

$$\forall x_{i_0} \in E_{i_0}, \quad u(x_{i_0}) = \sum_{i=1}^{p} u_i \circ \pi_{i_0}(0, 0, \dots, x_{i_0}, 0, \dots, 0) = u_{i_0}(\pi_{i_0}(0, 0, \dots, x_{i_0}, \dots 0)) + 0$$
$$= u_{i_0}(x_{i_0})$$

Unicité : $\forall x \in E$,

$\exists (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ unique $/ \; x = x_1 + \dots + x_p$

$$u(x) = u(x_1) + \dots + u(x_p)$$
$$= u_1(x_1) + \dots + u_p(x_p)$$

4 - projections

associées à une décomposition $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$

$\forall x \in F, \quad x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \dots + \underbrace{x_p}_{\in E_p}$ décomposition unique

$$P_{i_0} : \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto x_{i_0} \end{array} \right.$$

alors $P_{i_0} = \overset{\text{on isole un } x_i}{\psi} \circ p_{i_0} \circ \overset{\text{décomposit°}}{\psi^{-1}}$ est un endomorphisme

$P_{i_0} \circ P_{i_0} = P_{i_0}$ est un projecteur

$\text{Ker}\, P_{i_0} \oplus \text{Im}\, P_{i_0} = F$

$$\begin{cases} \text{Im}\, P_{i_0} = P_{i_0}(F) = (\psi \circ P_{i_0} \circ \psi^{-1})(F) = (\psi \circ P_{i_0})(\underbrace{\psi^{-1}(F)}_{\prod_{1 \leq i \leq p} E_i}) \\ \qquad = \psi(\{0\} \times \{0\} \times \dots \times E_{i_0} \times \dots \times \{0\}) = E_{i_0} \\ \text{Ker}\, P_{i_0} = \{x \in F \,/\, P_{i_0}(x) = 0\} = E_1 \oplus \dots \oplus E_{i_0 - 1} \oplus E_{i_0 + 1} \oplus \dots \oplus E_p \end{cases}$$

$$P_{i_0} \circ P_{j_0} = \begin{cases} P_{i_0} & \text{si } i_0 = j_0 \\ 0 & \text{si } i_0 \neq j_0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{p} P_i = \text{Id}_F \qquad \left(\sum_{i=1}^{p} P_i(x) = x_1 + \dots + x_p = x\right)$$

$(P_i)_{1 \leq i \leq p}$ est la famille de projecteurs associée à $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$

réciproqᵗ : si $(q_i)_{1 \leq i \leq p}$ famille d'endomorphismes de $F \,/$

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2 \begin{cases} i = j \Rightarrow q_i \circ q_i = q_i \\ i \neq j \Rightarrow q_i \circ q_j = 0 \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{p} q_i = \text{Id}_F \end{cases}$$

alors $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \text{Im}\, q_i$

- $\forall x \in F, \quad x = \text{Id}_F(x) = q_1(x) + \dots + q_p(x) \in \sum_{i=1}^{p} \text{Im}\, q_i$

- ~~soit~~ $\forall (x_1, \dots, x_p) \in \text{Im}\, q_1 \times \dots \times \text{Im}\, q_p$,

$$x_1 + \dots + x_p = 0 \Longrightarrow q_1(x_1) + \dots + q_p(x_p) = 0$$
$$\Longrightarrow q_1(q_1(x_1)) + \underbrace{q_1(q_2(x_2))}_{0} + \dots + \underbrace{q_1(q_p(x_p))}_{0} = 0$$
$$\Longrightarrow q_1(q_1(x_1)) = 0$$
$$\Longrightarrow (q_1 \circ q_1)(x_1) = q_1(x_1) = 0$$
$$\Longrightarrow x_1 = 0$$

de même pour $x_2, \dots, x_p$

VIII Image et noyau d'une application linéaire

th E, F 2 K-ev, $u \in \mathcal{L}(E,F)$
E' supplémentaire de $\text{Ker}\, u$ (dans E)
u induit un isomorphisme de E' sur $\text{Im}\, u$

$E' \oplus \text{Ker}\, u = E$

$\forall x \in E', \; u(x) \in \text{Im}\, u \qquad u' : \left| \begin{array}{l} E' \longrightarrow \text{Im}\, u \\ x \longmapsto u(x) \end{array} \right.$

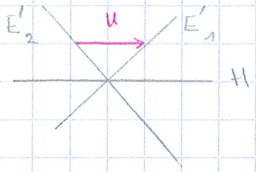
$u' \in \mathcal{L}(E', \text{Im}\, u)$

surjectivité : $\forall y \in \operatorname{Im} u$, $\exists x \in E \,/\, u(x) = y$
$\exists (x_1, x_2) \in E' \times \operatorname{Ker} u \,/\, x = x_1 + x_2$
$y = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1) = u'(x_1)$

injectivité : $\forall x \in E'$, $u'(x) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$
$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u$
$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u \cap E' = \{0\}$
$\Rightarrow x = 0$

applications

① soit H un ss_ev de E
si E'_1, E'_2 sont 2 ss.ev de E, suppl. de H $(H \oplus E'_1 = E = H \oplus E'_2)$
alors, E'_1 et E'_2 sont isomorphes



u project° sur E'_1 parallèlement à H : $\begin{cases} \operatorname{Ker} u = H \\ \operatorname{Im} u = E'_1 \end{cases}$

E'_2 est un suppl. de $\operatorname{Ker} u$
donc u induit un isom. de E'_2 sur $\operatorname{Im} u = E'_1$

② si $\begin{cases} H \text{ ss\_ev de } E \\ H \text{ possède un suppl. de dim finie} \end{cases}$ alors tous les suppl. de H sont de même dim finie : codimension de H
(codim H : dim d'un suppl.)

|| H ssev de E hyperplan $\Leftrightarrow$ codim $H = 1$

Pp) H hyperplan $\Leftrightarrow \exists$ une droite vectorielle $D \,/\, E = H \oplus D$
$\Leftrightarrow \exists\, x \in E, x \neq 0 \,/\, E = H \oplus \mathbb{K}x$

② E de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$
Th du rang
$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$
$= \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$

E' suppl. de $\operatorname{Ker} u$
$\dim \operatorname{Ker} u + \dim E' = \dim E$
or, u induit un isom. de E' sur $\operatorname{Im} u$
donc $\dim E' = \dim \operatorname{Im} u$

rem : codim $\operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Im} u$

Pp) u injective $\Leftrightarrow \operatorname{rg} u = \dim E$
u surjective $\Leftrightarrow \operatorname{rg} u = \dim F$
$\}$ u bijective $\Leftrightarrow \operatorname{rg} u = \dim E = \dim F$

③ interpolation de Lagrange

$n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n scalaires 2 à 2 distincts
$Q = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n) \in \mathbb{K}[X]$ $\deg Q = n$

$$u : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P \longmapsto (P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n)) \end{array} \right.$$

- u est linéaire
- $\operatorname{Ker} u = Q\,\mathbb{K}[X]$
- $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est un suppl. de $\operatorname{Ker} u$ (p.39)
donc u induit un isom de (p.40) $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\operatorname{Im} u = \mathbb{K}^n$

$P \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow P(\alpha_1) = \dots = P(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow P$ a pour racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$
$\Leftrightarrow P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)\, R$ $(R \in \mathbb{K}[X])$
donc $P = QR$ multiple de Q

donc $\forall (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, $\exists !\, P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \,/\, u'(P) = (\beta_1, \dots, \beta_n) = u(P)$

$$\begin{cases} P(\alpha_1) = \beta_1 \\ \vdots \\ P(\alpha_n) = \beta_n \end{cases}$$

④ E ev de dim n, $u \in \mathcal{L}(E)$ de rg r
$(e_{r+1}, \dots, e_n)$ base de $\operatorname{Ker} u$
Th de la base incomplète :

- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ base de E
$\operatorname{Vect}(\underbrace{u(e_1), \dots, u(e_r)}_{r \text{ vecteurs}}, \underset{0}{u(\cancel{e_{r+1}})}, \dots, \underset{0}{u(\cancel{e_n})}) = \underbrace{\operatorname{Im} u}_{\dim \operatorname{Im} u = r}$
donc $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$
- $\mathcal{B}' = (u(e_1), \dots, u(e_r), \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ base de E

$$\underset{B,B'}{\text{mat}}\ u = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & & 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \updownarrow r \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underleftrightarrow{\ r\ }$

IX Dualité

1. **forme linéaire** : appli. lin de E dans $\mathbb{K}$
espace dual : E^* : ensemble des formes linéaires : $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
forme bilinéaire canonique : $\left|\begin{array}{l} E^* \times E \longrightarrow \mathbb{K} \\ (\varphi, x) \longmapsto \varphi(x) \end{array}\right.$

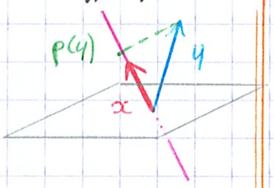
conséquences :
- E^* est un ev
- E de dim finie de base $\mathcal{B}$
  $\mathbb{K}$ de base $\mathcal{B}' = (1)$
  $\varphi \in E^*$, $\underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{\text{mat}}\ \varphi \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K}) = (\ldots\ldots)$
- E de dim finie, $\dim E = \dim E^*$

2. hyperplans

Pp 1) φ forme lin. non nulle $\Longrightarrow$ $\text{Ker}\,\varphi$ **hyperplan** de E

$\text{Im}\,\varphi \neq \{0\}$ or $\text{Im}\,\varphi = \mathbb{K}$
donc $\dim \text{Im}\,\varphi = \text{rg}\,\varphi = 1$ $\quad$ codim $\text{Ker}\,\varphi = 1$

Pp 2) **H hyperplan** de E $\Rightarrow$ H : noyau d'une forme linéaire non nulle



$\exists\, x \in E,\ x \neq 0 \ /\ E = H \oplus \mathbb{K}x$
p project° sur $\mathbb{K}x$ parallèlem^t à H, $\forall y \in E,\ p(y) \in \mathbb{K}x$
$\exists\, \lambda(y) \in \mathbb{K}(x) \ /\ p(y) = \lambda(y).x$
$\lambda : \left|\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ y \longmapsto \lambda(y) \end{array}\right.$ $\quad \lambda$ est linéaire :
$\forall (y_1, y_2) \in E^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,$
$p(\alpha y_1 + \beta y_2) = \begin{cases} \lambda(\alpha y_1 + \beta y_2).x \\ \alpha\, p(y_1) + \beta\, p(y_2) = \alpha[\lambda(y_1).x] + \beta[\lambda(y_2).x] \end{cases}$
$= [\alpha\lambda(y_1) + \beta\lambda(y_2)].x$
or $x \neq 0$, donc $\lambda(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\lambda(y_1) + \beta\lambda(y_2)$

$\text{Ker}\,\lambda$: $\forall y \in E,\ y \in \text{Ker}\,\lambda \Leftrightarrow \lambda(y) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda(y).x = 0 = p(y)$
$\Leftrightarrow y \in \text{Ker}\,p$
$\Leftrightarrow y \in H^*$

* p forme linéaire non nulle $\Rightarrow$ $\text{Ker}\,p$ hyperplan de E, H

donc $\exists$ une forme lin. non nulle λ $(\lambda(x) = 1)$ /
$H = \text{Ker}\,\lambda$

Pp 3) soient φ et ψ 2 formes lin. non nulles / $\text{Ker}\,\varphi = \text{Ker}\,\psi$
alors $\exists\, a \in \mathbb{K}^* \ /\ \psi = a\varphi$

existence $\quad H = \text{Ker}\,\psi = \text{Ker}\,\varphi$, codim $H = 1$
x vecteur non nul / $H \oplus \mathbb{K}x = E$
$x \notin H$ donc $\varphi(x) \neq 0$ et $\psi(x) \neq 0$
$a = \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} \in \mathbb{K}^*$

alors $\psi - a\varphi \in E^*$ et $\forall y \in H,\ (\psi - a\varphi)(y) = 0$
$\forall z \in \mathbb{K}x \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{K} \ /\ z = \alpha x$
$(\psi - a\varphi)(z) = (\psi - a\varphi)(\alpha x)$
$= \psi(\alpha x) - a\varphi(\alpha x)$
$= \alpha(\psi(x) - a\ \varphi(x))$
$= \alpha\left(\psi(x) - \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}\varphi(x)\right) = 0$

donc $\psi - a\varphi$ est nulle sur H, sur $\mathbb{K}.x$
donc sur $H \oplus \mathbb{K}x = E$
donc $\psi - a\varphi = 0$ $\quad$ donc $\psi = a\varphi$

unicité $\quad \psi = a\varphi \rightarrow \psi(x) = a\varphi(x) \Rightarrow a = \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$

équation(s) d'un hyperplan

H hyperplan de E, φ forme lin. de noyau H,

$\forall x \in E$, $x \in H \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$

donc "$\varphi(x) = 0$" est une équation de H (d'inconnue $x \in E$)

les autres sont "$\lambda \varphi(x) = 0$" avec $\lambda \neq 0$

X Calcul matriciel

1_ blocs

- $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ soit $\begin{cases} 1 \leq k \leq p \\ 1 \leq l \leq q \end{cases}$

$A_{11} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{K})$ $A_{12} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ l+1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{k,q-l}(\mathbb{K})$ $A_{21} = (a_{ij})_{\substack{k+1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq l}} \in \mathcal{M}_{p-k,l}(\mathbb{K})$ $A_{22} = (a_{ij})_{\substack{k+1 \leq i \leq p \\ l+1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p-k,q-l}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{array}{c|c|c} l & l+1 & \\ \hline A_{11} & A_{12} & k \\ \hline A_{21} & A_{22} & k+1 \end{array}$$

- combinaison linéaire : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} + \beta B_{11} & \alpha A_{12} + \beta B_{12} \\ \alpha A_{21} + \beta B_{21} & \alpha A_{22} + \beta B_{22} \end{pmatrix}$$

- produit : $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$ $\begin{array}{ccc} 1 \leq & l & \leq p \\ & k & q \\ & m & r \end{array}$

$A_{11} \in \mathcal{M}_{lk}(\mathbb{K})$
$A_{12} \in \mathcal{M}_{l,q-k}(\mathbb{K})$
$A_{21} \in \mathcal{M}_{p-l,k}(\mathbb{K})$
$A_{22} \in \mathcal{M}_{p-l,q-k}(\mathbb{K})$

$B_{11} \in \mathcal{M}_{k,m}(\mathbb{K})$
$B_{12} \in \mathcal{M}_{k,r-m}(\mathbb{K})$
$B_{21} \in \mathcal{M}_{q-k,m}(\mathbb{K})$
$B_{22} \in \mathcal{M}_{q-k,r-m}(\mathbb{K})$

$$B = \begin{array}{cc} & r \\ q \; \begin{array}{c} k \\ q-k \end{array} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{q} \\ k & q-k \end{array} \\ p & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

- déterminant des matrices triangulaires par blocs :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $1 \leq r < n$ $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} A_{11} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}) \\ A_{22} \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K}) \end{array}\right\}$ carrées
$A_{12} \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$

$A_{21} = 0 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$

$$\det(A) = \underbrace{\det(A_{11})}\,\underbrace{\det(A_{22})}$$

$\det(A_{22}) = \det A_{22}$

$$\det\left(\begin{array}{c|c} 1 & \cdots\cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_{22} \\ 0 & \end{array}\right) = \det A_{22} \qquad \det\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 1 & \cdots\cdots \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & A_{22} \\ 0 & 0 & \end{array}\right) = \det A_{22}$$

$$\det\left(\begin{array}{c|c} I_r & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right) = \det A_{22}$$

de même, $\det\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \det A_{11}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \\ \text{or } \begin{pmatrix} I_r & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_{11} + 0 & 0 + A_{12} \\ 0 & 0 + A_{22} \end{pmatrix} = A \end{array}$$

donc $\det\begin{pmatrix} I_r & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \det A$

Déterminants

E est un espace vectoriel de dimension finie n sur un sous corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$

1. formes n-linéaires alt ernées

a. définition

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \varphi : E^p \to \mathbb{K}$ est une forme p linéaire si

$\forall i \in \{1, 2, ..p\}, \forall (x_1, x_2, ..x_{i-1}, x_{i+1}, ..x_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$ l'application : $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \varphi(x_1, x_2, ..x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..x_p) \end{array} \right.$

est une forme linéaire

b. définition

si φ est une forme p linéaire, φ est alternée si

$\forall (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p, [\exists (i, j) \in \{1, 2, ..p\}^2, i \neq j$ et $x_i = x_j] \Rightarrow \varphi(x_1, ...x_p) = 0]$

c. propriétés équivalentes

pour toute forme p linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- φ est alternée
- $\forall (x_1, ...x_p) \in E^p$, pour toute transposition τ de $\{1,2,..p\}$, $\varphi(x_{\tau(1)}, ..., x_{\tau(p)}) = -\varphi(x_1, ..., x_p)$
- $\forall (x_1, ...x_p) \in E^p, \forall \sigma \in \sigma_p, \varphi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} ..., x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi((x_1, x_2, ..., x_p)$
- $\forall (x_1, ...x_p) \in E^p$, $(x_1, ..., x_p)$ liée $\Longrightarrow \varphi(x_1, ..., x_p) = 0$

d. propriétés (définition)

- si E est un espace vectoriel de dimension n, l'ensemble des formes n linéaires alternées sur E est un espace vectoriel de dimension 1 $A_n(E)$
- si $\mathcal{B} = (e_1, ...e_n)$ est une base de E il existe une unique forme n linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur $(e_1, ..., e_n)$, on l'appelle $\det_{\mathcal{B}}$
- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
- $\det_{\mathcal{B}}$ est une base de l'espace vectoriel des formes n linéaires alternées sur E
- pour toute forme n linéaire alternée Φ il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\Phi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$
- si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$

2. déterminants

a. déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base $\mathcal{B}$

$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 ..., u_n)$

b. déterminant d'un endomorphisme

- si $\mathcal{B} = (e_1, ...e_n)$ est une base de E si f est un endomorphisme de E, alors $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), ..., f(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$
- on pose $\det f = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), ..., f(e_n))$

c. déterminant d'une matrice carrée

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, C_2, ..., C_n$

- si B est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on pose $\det M = \det_B(C_1, C_2, ..., C_n)$
- si $m : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$ alors $mat_B m = M$ et $\det M = \det m$

3. propriétés

a.
- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(f \circ g) = \det f \det g$
- $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \det(MN) = \det M \det N$
- $\forall (u_1, u_2, ..u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, .., u_n) \neq 0 \Leftrightarrow (u_1, u_2, ..., u_n)$ famille libre $\Leftrightarrow (u_1, u_2, ... u_n)$ famille génératrice $\Leftrightarrow (u_1, u_2, ..., u_n)$ base
- $\forall f \in \mathcal{L}(E), \det f \neq 0 \iff f \in GL(E)$
- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det M \neq 0 \iff M \in GL_n(\mathbb{K})$

4. expressions

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- $\det A = \sum\limits_{\sigma \in \sigma_n} \prod\limits_{i=1}^{n} \varepsilon(\sigma) a_{i,\sigma(i)}$

- ○ $\det A = \sum_{\varphi \in \sigma_n} \prod_{j=1}^{n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(j),j}$

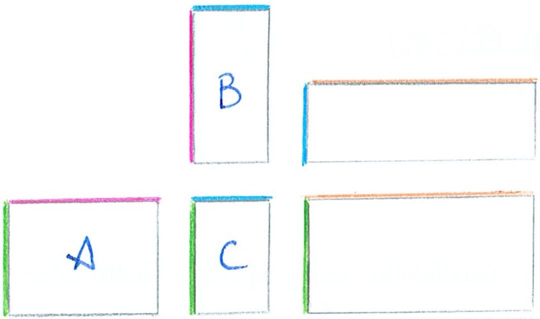
5. calculs

- transposition
  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det{}^t A = \det A$
- colonnes
  - ◇ on ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaires des autres colonnes
  - ◇ si on permute deux colonnes de A, son déterminant est changé en son opposé
  - ◇ si on permute plusieurs colonnes de A, son déterminant est multiplié par la signature de la permutation
  - ◇ si on multiplie une colonne de A par λ, son déterminant est multiplié par λ
  - ◇ si on multiplie toutes les colonnes de A par λ, son déterminant est multiplié par λ^n
- lignes
  mêmes propriétés
- cofacteurs
  - ◇ si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $(i_0, j_0) \in \{1, 2, .., n\}^2$
    si $X_{i_0,j_0} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice extraite de A obtenue en otant la ligne i_0 et la colonne j_0.
    on appelle cofacteur d'indices (i_0, j_0) le réel $c_{i_0,j_0} = (-1)^{n-i_0}(-1)^{n-j_0}\det(X_{i_0,j_0}) = (-1)^{i_0+j_0}\det(X_{i_0,j_0})$
  - ◇ développement par rapport à la première colonne : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}c_{i,1}$
  - ◇ développement par rapport à la $j^{ième}$ colonne : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}c_{i,j}$
  - ◇ développements par rapport à la $i^{ième}$ ligne : $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}c_{i,j}$
- comatrice
  - ◇ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice des cofacteurs de A est la comatrice de A, notée $\mathrm{com}(A)$
  - ◇ propriété : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A.({}^t\mathrm{com}A) = ({}^t\mathrm{com}A).A = (\det A)I_n$
  - ◇ application : si A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}({}^t\mathrm{com}A)$

6. autres applications des déterminants

- ○ recherche du rang d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice, d'une application linéaire
- ○ résolution d'un système linéaire (méthode de Cramer)
- ○ étude du rang et de la compatibilité d'un système linéaire
- ○ orientation des espaces vectoriels réels

....

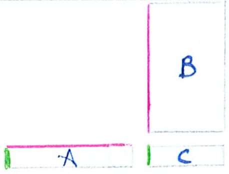


mat A mat B = mat C

→ nb de lignes de C = nb de lignes de A

→ nb de colonnes de C = nb de colonnes de B

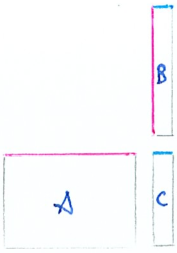
nb de colonnes de A = nb de lignes de B



donc

A matrice ligne ⇒ C matrice ligne

B matrice colonne ⇒ C matrice colonne



2. matrices semblables

$(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, A est semblable à B $\iff$ $\exists P \in Gl_n(\mathbb{K}) \,/\, B = P^{-1}AP$

Pp 1) relation d'équivalence

- A semblable à A : $A = I^{-1}AI$
- A semblable à B $\Rightarrow$ $\exists P \in Gl_n(\mathbb{K}) \,/\, B = P^{-1}AP$
  alors $P^{-1} \in Gl_n(\mathbb{K})$ et $A = PBP^{-1}$
  donc B est semblable à A
- A semblable à B, semblable à C $\Rightarrow$ $\exists (P,Q) \in Gl_n(\mathbb{K})^2 / B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$
  alors $(PQ) \in Gl_n(\mathbb{K})$ et $C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ)$
  donc A semblable à C

Pp 2) A et B semblables $\Longrightarrow$ $\det A = \det B$ (donc $\chi_A = \chi_B$)

⚠ pas de réciproque $\det\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = 0$ mais $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ non semblables

$\det\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = 0$

Pp 3) A et B semblables $\Longrightarrow$ $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B$

⚠ pas de réciproque $\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = 1$

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = 1$

Pp 4) A et B semblables $\iff$ $\exists \begin{cases} \text{un } \mathbb{K}\text{ev de dim } n \\ u \in \mathcal{L}(E) \\ \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ bases de } E \end{cases}$ / $\begin{cases} \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\, u = A \\ \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}\, u = B \end{cases}$

$\Rightarrow$ • $a : \begin{vmatrix} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto AX \end{vmatrix}$ $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$ base can de $\mathbb{K}^n$

$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\, a = A$

• $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ donc P est une matrice de chgt de base, de la base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$

alors $B = P^{-1}AP = \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}\, a$

$\Leftarrow$ soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $B = P^{-1}AP$ avec $P \in Gl_n(\mathbb{K})$

3. matrices équivalentes

Pp) $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, $r \in \mathbb{N}$,

A de rang r $\iff$ $\exists \begin{cases} P \in Gl_p(\mathbb{K}) \\ Q \in Gl_q(\mathbb{K}) \end{cases}$ / $A = P^{-1}\left(\begin{array}{c:c} I_r & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right) Q$

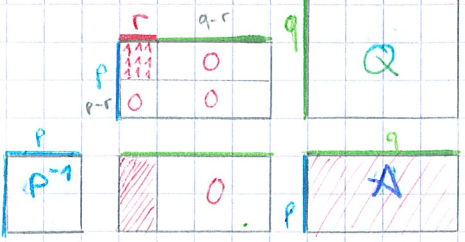
$\begin{cases} 0 \leq r \leq q \\ 0 \leq r \leq p \end{cases}$

|| A équivalente à B $\iff$ $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B$

Pp 1) relation d'équivalence

Pp 2) il y a $\min\{p+1, q+1\}$ classes d'équivalence ↗ rg est à valeurs dans $\{0, 1, \ldots\ldots, \min\{p,q\}\}$

Pp 3) A équivalente à B $\iff$ $\exists (P,Q) \in Gl_p(\mathbb{K}) \times Gl_q(\mathbb{K})$ / $B = P^{-1}AQ$



$\Longrightarrow$ $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (P_1, Q_1, P_2, Q_2) \in (Gl_p(\mathbb{K}) \times Gl_q(\mathbb{K}))^2$

$A = P_1^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1$ $\iff$ $P_1 A Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B = P_2^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 = \underbrace{P_2^{-1}(P_1}_{\in Gl_p(\mathbb{K})} A \underbrace{Q_1^{-1}) Q_2}_{\in Gl_q(\mathbb{K})} = (P_1^{-1}P_2)^{-1} A (Q_1^{-1}Q_2)$

$\Longleftarrow$ $\mathrm{rg} B = \mathrm{rg}(P^{-1}AQ) = \mathrm{rg} A$

XI Trace d'un endomorphisme

1. trace d'une matrice carrée

$\mathrm{tr} : \begin{vmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{vmatrix}$

Pp 1) $tr \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* = \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ (forme linéaire)
Pp 2) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad tr(AB) = tr(BA)$

$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ $\quad AB = C \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \quad BA = D$

$tr(AB) = tr\, C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$

$\underline{tr(BA)} = tr\, D = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \underline{tr(AB)}$

applications: ① $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in Gl_n(\mathbb{K}),$ $\quad tr(P^{-1}AP) = tr(PP^{-1}A) = tr\, A$

② $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, A et B semblables $\Longrightarrow tr\, A = tr\, B$

⚠ pas de réciproque $\quad tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$

car $tr\, B = tr(P^{-1}AP) = tr\, A$ $\quad tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

2. trace d'un endomorphisme

$\dim E = n$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = mat_{\mathcal{B}}\, u$, $B = mat_{\mathcal{B}'}\, u$

A et B sont semblables donc $tr\, A = tr\, B$ $\quad$ on pose $tr(u) = tr\, A = tr\, B$

pour calculer la trace d'un endom on calcule la trace de sa matrice dans une base quelconque.

Pp 1) tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$: $tr \in \mathcal{L}(E)^*$
Pp 2) $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$

ex: * $tr(Id_E) = tr(I_n) = n$

* $\begin{cases} E = F \oplus G \\ p \text{ proj. sur } F, \parallel^t \text{ à } G \end{cases}$ $\quad \begin{array}{cc|c} F & G & \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} & 0 & F \\ 0 & 0 & G \end{array}$ $\quad tr\, p = \dim F = rg\, p$

XII Dualité en dimension finie

E $\mathbb{K}$ev de dim finie $\geqslant 1$

1. Pp 1) $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists \varphi \in E^* / \varphi(x) = 1$

$x \neq 0$, th de la base incomp.
$(x, e_2, \dots, e_n)$ base de E $\quad H = Vect(e_2, \dots, e_n)$ (hyperplan)
$H \oplus \mathbb{K}x = E$
ψ forme lin. de noyau H
$x \notin H$ donc $\psi(x) \neq 0$ $\quad \varphi : \begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ y \longmapsto \frac{1}{\psi(x)} \psi(y) \end{vmatrix}$

$\varphi \in E^*$, $\underline{\varphi(x) = 1}$

Pp 2) $\forall \varphi \in E^* \setminus \{0\}, \exists x \in E / \varphi(x) = 1$

$\varphi \neq 0, \exists y \in E / \varphi(y) \neq 0$ $\quad x = \underbrace{\frac{1}{\varphi(y)}}_{\in \mathbb{K}\text{ scalaire}} \underbrace{y}_{\in E} \in E$ $\quad \varphi\left(\frac{1}{\varphi(y)} y\right) = \frac{1}{\varphi(y)} \varphi(y)$

$\underline{\varphi(x) = 1}$

Pp 3) $\forall \varphi \in E^*, [(\forall x \in E, \varphi(x) = 0) \longrightarrow \varphi = 0]$

Pp 4) $\forall x \in E, [(\forall \varphi \in E^*, \varphi(x) = 0) \Longrightarrow x = 0]$ (un vecteur x qui annule ttes les formes linéaires φ est le vecteur nul)

contraposée de Pp 1) $\quad$ 1) : $\forall x \neq 0, \exists \varphi \neq 0$
donc $\forall \varphi \neq 0, x = 0$

2. base duale

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E,
$\forall x \in E, \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n / \quad x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad e_i^* : \begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto x_i \end{vmatrix}$ ($i$ième composante de x)

Pp 1) e_i^* est une forme linéaire ($i$ème coordonnée)
Pp 2) $(e_1^*, \dots, e_n^*) = \mathcal{B}^*$ est une base de E^* : base duale de $\mathcal{B}$

rem: $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ ($i$ème coord. du $j$ème vecteur) contraposée de P_p 1) $\quad$ 1) : $\forall x \neq 0, \exists \varphi \neq 0$

donc $\forall \varphi \neq 0, x = 0$

2 - base duale

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E,

$\forall x \in E, \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \;/\; x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad e_i^* : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto x_i \end{array} \right.$ ($i$ème composante de x)

P_p 1) e_i^* est une forme linéaire ($i$ème coordonnée)

P_p 2) $(e_1^*, \dots, e_n^*) = \mathcal{B}^*$ est une base de E^* : base duale de $\mathcal{B}$

rem : $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ ($i$ème coord. du $j$ème vecteur)

- $\mathcal{B}^*$ est libre : $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$,

  $\alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^* = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^*)(e_1) = \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ (\alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^*)(e_n) = \alpha_n = 0 \end{cases}$

- card $\mathcal{B}$ = card $\mathcal{B}^*$ = n = dim E = dim E^*

donc $\mathcal{B}^*$ est une base de E^*

$_p$ 3) $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E $\quad \forall x \in E, \; x = e_1^*(x) e_1 + \dots + e_n^*(x) e_n = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$

$\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ base duale

$\forall \varphi \in E^*, \; \varphi = \varphi(e_1) e_1^* + \dots + \varphi(e_n) e_n^* = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$

$\varphi \in E^*$, je pose ψ /

$\psi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^* \in E^* \quad \begin{cases} \psi(e_1) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*(e_1) = \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \psi(e_n) = \varphi(e_n) \end{cases}$

φ et ψ coincident sur une base donc $\varphi = \psi$

ex : $E = \mathbb{K}_n[X] \quad \mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ base de E $\quad$ trouver la base duale de $\mathcal{B}$

$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \; P = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{P^{(i)}(0)}{i!} \right) X^i$

$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \; (X^i)^* : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K} \\ P \longmapsto \frac{P^{(i)}(0)}{i!} \end{array} \right.$

rem : e_1^* ne dépend pas que de e_1, mais de $e_1, \dots, e_n$

donc si on modifie e_1, e_1^* est modifié, mais aussi $e_2^*, \dots, e_n^*$

- expression matricielle

soit $\varphi \in E^*$, $L = \underset{\mathcal{B}, (1)}{\text{mat}}\, \varphi$ (matrice ligne) $= (\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n))$

Y : coordonnées de φ dans $\mathcal{B}^*$ (vecteur colonne)

or, $\varphi = \varphi(e_1) e_1^* + \dots + \varphi(e_n) e_n^*$

donc $Y = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{pmatrix}$ $\quad$ alors, $L = {}^tY \quad Y = {}^tL$

- changement de bases

P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

$x \in E$, $\begin{cases} X \text{ coord. de } x \text{ dans } \mathcal{B} \\ X' \dots\dots\dots\dots \mathcal{B}' \end{cases}$ $\qquad \varphi \in E^*$, $\begin{cases} Y \text{ coord. de } \varphi \text{ dans } \mathcal{B}^* \\ Y' \dots\dots\dots\dots \mathcal{B}'^* \end{cases}$

$\varphi(x) = \varphi(x)$

${}^tY X = {}^tY' X'$

or, ${}^tY P X' = {}^tY' X'$ $\quad$ donc $\forall X' \in \mathbb{K}^n, \; {}^tY P X' = {}^tY' X'$

donc ${}^tY P = {}^tY'$

${}^tP Y = Y'$

$Y = ({}^tP)^{-1} Y' = {}^t(P^{-1}) Y'$

$P_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*} = {}^t(P^{-1})$

3. base anté-duale

th $\mathcal{D}$ base de E^*

$\exists$ une base $\mathcal{B}$ de E, unique, dont la base duale est $\mathcal{D}$ $(\mathcal{B}^* = \mathcal{D})$

$\mathcal{B}$ est la base anté-duale de $\mathcal{D}$

$\mathcal{D} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ base de E^*

soit $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \end{array}$

alors,
- φ est linéaire
- $\forall x \in E,\ \varphi(x) = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ \varphi_i(x) = 0$

$\Rightarrow \forall \varphi \in E^*,\ \varphi(x) = 0$ $\quad \begin{pmatrix} \varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n \\ \varphi(x) = 0 + \dots + 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \varphi$ injective

donc φ est un isomorphisme

un vecteur qui annule ttes les formes linéaires est 0.
Pp 4) XII

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base canonique de $\mathbb{K}^n$

$\begin{cases} e_1 = \varphi^{-1}(\varepsilon_1) \\ \vdots \\ e_n = \varphi^{-1}(\varepsilon_n) \end{cases}$ $\quad \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \varphi(e_i) = \varepsilon_i$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(e_i) \\ \vdots \\ \varphi_i(e_i) \\ \vdots \\ \varphi_n(e_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ \varphi_j(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

donc $\mathcal{D}$ base duale de $\mathcal{B}$

unicité $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ base / $\mathcal{B}'^* = \mathcal{D}$

$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\quad \varphi_i(e_j) = \varphi_i(f_j)$

$\varphi_i(e_j - f_j) = 0$

$\forall \varphi \in E^*,\ \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \varphi(e_j - f_j) = 0$

$\Rightarrow e_j - f_j = 0$

d'où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$

4. applications aux ss_ev

Pp 1) F ss_ev de E, de dim p
L'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur F est un ss_ev de E^* de dimension $n-p$

$(e_1, \dots, e_p)$ base de F

th base incomp: $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ base de E

$\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ ―― E^*

$\forall \varphi \in E^*,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ /\ \varphi = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*$

φ s'annule sur $F \Leftrightarrow \varphi$ s'annule sur la base de F

$\Leftrightarrow \varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_p) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

$\Leftrightarrow \varphi \in \underbrace{\mathrm{Vect}\,(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)}_{\text{ss\_ev de } E^* \text{ de dim } n-p}$

φ s'annule sur un ev
$\Leftrightarrow$ ...... une base

Pp 2) Soit $(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$ une famille libre de $n-p$ formes linéaires
alors,
- $\bigcap\limits_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}\, \varphi_i$ est un ssev de E de dimension p
  (intersect° de ssev)
  $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi$
  $n = \dim \mathrm{Ker}\varphi + (n-(p+1)+1)$
- l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur ce ss_ev est : $\mathrm{Vect}\,(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$

- th base incomp: $\mathcal{D} = (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \overbrace{\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n}^{\text{libre}})$ base de E^*

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ anté-duale

$\forall x \in E,\ x = \varphi_1(x) e_1 + \dots + \varphi_n(x) e_n$

$x \in \bigcap\limits_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$

|| • d'après Pp 1)

conséquences:

C 1) Tout ss_ev F de dim p est l'intersect° de n_p noyaux de formes linéaires linéairement indépendantes

C 2) n_p hyperplans

C 3) $(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$ n_p formes linéaires linéairement indep.

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow K^{n-p} \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_{p+1}(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

- Φ est linéaire
- $F = \operatorname{Ker} \Phi = \bigcap\limits_{i=p+1} \operatorname{Ker} \varphi_i$ est de dim p
- Φ est surjective (th du rg)
- $\begin{cases} \varphi_{p+1}(x) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(x) = 0 \end{cases}$ système de n_p équations indep. du ss_ev F

XIII Calcul matriciel et systèmes linéaires

1_ matrices élémentaires

$(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $(i,j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}$, $E_{ij} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$

$E_{ij} = (e_{ab})_{\substack{1 \leq a \leq p \\ 1 \leq b \leq q}}$ $\quad \forall (a,b) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}$ $\quad e_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} a = i \\ b = j \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$E_{ij} = \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} \end{array} i$$

Pp) $\left((E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$

produit :

$E_{ij} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ $\quad E'_{kl} \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$ $\quad E_{ij} = (e_{ab})_{\substack{1 \leq a \leq p \\ 1 \leq b \leq q}}$

$E_{ij} E'_{kl} \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$ $\quad E_{ij} E'_{kl} = (m_{ad})_{\substack{1 \leq a \leq p \\ 1 \leq d \leq r}}$ $\quad E'_{kl} = (e'_{cd})_{\substack{1 \leq c \leq q \\ 1 \leq d \leq r}}$

$$m_{ad} = \sum_{b=1}^{q} \underbrace{e_{ab}}_{\text{nul sauf } e_{ij}} \underbrace{e'_{bd}}_{\text{nul sauf } e'_{kl}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq i \text{ ou } d \neq l \text{ ou } j \neq k \\ 1 & \text{si } \begin{cases} a = i \\ d = l \\ j = k \end{cases} \end{cases}$$

donc $E_{ij} E'_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ E''_{il} & \text{si } j = k \end{cases}$

2) opérations élémentaires sur les lignes

$A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, $i \in \{1, \dots, p\}$, $L_i = (a_{i1} \; a_{i2} \; \dots \; a_{iq})$ $i^{\text{ème}}$ ligne de A

$L_i \in \mathcal{M}_{1q}(\mathbb{K})$

${}^tL_i \in \mathcal{M}_{q1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^q$

$E_{i_0 j_0} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

$$E_{i_0 j_0} A = E_{i_0 j_0} \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E'_{ij} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{i_0 j_0} E'_{ij} = \sum_{1 \leq j \leq q} a_{j_0 j} E_{i_0 j_0} E'_{j_0 j} = \sum_{j} a_{j_0 j} E'_{i_0 j}$$

matrice nulle sauf la ligne i_0 qui est la ligne j_0 de A. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$L_{i_0} \longleftarrow L_{i_0} + \lambda L_{j_0}$

$(i_0, j_0) \in \{1, \dots, p\}^2$ $\quad i_0 \neq j_0$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\quad T_{i_0 j_0}(\lambda) = I_p + \lambda E_{i_0 j_0}$

$$T_{i_0 j_0}(\lambda) A = I_p A + \lambda E_{i_0 j_0} A = A + \lambda E_{i_0 j_0} A$$

$L_{i_0} \leftarrow \lambda L_{i_0}$ $\quad D_{i_0}(\lambda) = I_p + (\lambda - 1) E_{i_0 i_0}$

$L_{i_0} \leftrightarrow L_{j_0}$ $\quad P_{i_0 j_0}(\lambda) = I_p - E_{i_0 i_0} - E_{j_0 j_0} + E_{i_0 j_0} + E_{j_0 i_0}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i_0 & & j_0 & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i_0 \\ \\ j_0 \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

rem : $T_{i_0j_0}(\lambda)$ est inversible et $\left(T_{i_0j_0}(\lambda)\right)^{-1} = T_{i_0j_0}(-\lambda)$

$\lambda \neq 0$, $D_{i_0}(\lambda)$ est inversible et $\left(D_{i_0}(\lambda)\right)^{-1} = D_{i_0}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

$P_{i_0j_0}$ est inversible et $P_{i_0j_0}{}^{-1} = P_{i_0j_0}$ (involution)

application :
$M_1, M_2, \dots\dots, M_k$ k matrices du type $T_{i_0j_0}$, D_{i_0}, $P_{i_0j_0}$

si $B = M_k \dots M_1 A$, on obtient B à partir de A par les op. élém. sur les lignes correspondant à M_1, puis à $M_2, \dots$, puis à M_k

$\text{rg } B = \text{rg } A$

si $p = q$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

$$\det B = \left(\prod_{i=1}^{k} \det M_i\right) \det A$$

si $A \in Gl_q(\mathbb{K})$ alors $B \in Gl_q(\mathbb{K})$

et $B^{-1} = A^{-1} M_1^{-1} \dots M_k^{-1}$

$B^{-1} M_k \dots M_1 = A^{-1}$

si $B = I_p$, $M_k \dots M_1 = A^{-1}$

$$\det T_{i_0j_0}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & & & \lambda \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det D_{i_0}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = \lambda$$

$$\det P_{i_0j_0} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = -1$$ 1 permut°

3) pivot de Gauss

$A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ si la 1ère colonne de A n'est pas nulle, il existe une suite d'op. élém. sur les lignes de matrices $M_1, \dots, M_k$ /

$$M_k \dots M_1 A = \begin{pmatrix} b_{11} & \times\times\times\times \\ 0 & \\ \vdots & B_{22} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

après un nb fini d'op. on obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{1j_1} & \times\times\times & \times\times\times & \times\times\times \\ \vdots & \vdots & 0 & b_{2j_2} & \times\times\times & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & b_{rj_r} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rg } A = r$

sert au calcul du rg, du det, résolut° de syst. liné, inversion des matrices

op. sur les lignes → à gauche
colonnes droite

4) systèmes linéaires

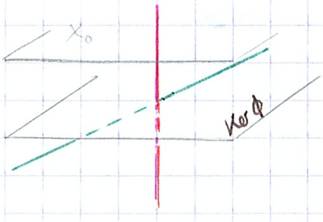
$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ $B = (b_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^p$

$AX = B$: syst. d'équa. lin. d'inconnue $X \in \mathbb{K}^q$

$AX = 0$: syst. homogène associé

- rang du syst. = rg A
- le syst. est compatible s'il a des solutions
  un syst. homo est tjrs compatible (solut° nulle)
- $\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^q \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ X \longmapsto AX \end{array} \right.$ Φ est linéaire
  Ker Φ est l'ensemble des sol. du syst. homo
- si le syst. $AX = B$ est compatible,
  X_0 est une s.p, l'ensemble des sol. est $X_0 + \text{Ker } \Phi$

$AX_0 = B$ $\Rightarrow$ $AX = AX_0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0$
$\Leftrightarrow X - X_0 \in \text{Ker } \Phi$
$\Leftrightarrow X \in X_0 + \text{Ker } \Phi = \{X_0 + Y, \ Y \in \text{Ker } \Phi\}$



$X_0 + \text{Ker } \Phi$ est un ss-ev affine de $\mathbb{K}^q$ d'ev directeur Ker Φ

* • soient $C_1, \dots\dots, C_q$ colonnes de A

- $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_q)$
- $\operatorname{Im} \Phi = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_q)$
- le syst. $AX = B$ est compatible $\Leftrightarrow$ $B \in \operatorname{Im} \Phi$
  $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg}(C_1, \dots, C_q) = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_q, B)$

* • soient $L_1, \dots, L_p$ lignes de A

- $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(L_1, \dots, L_p)$
  φ_i forme linéaire de $\mathbb{K}^q$ / $\varphi_i(X) = L_i X$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$
- si $H_i = \operatorname{Ker} \varphi_i$ $\operatorname{Ker} \Phi = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \operatorname{Ker} \varphi_i$
- $F_i = \varphi_i^{-1}(b_i)$ hyperplan affine (sauf si $L_i = 0$)
  le syst. est compatible $\Leftrightarrow$ $\bigcap_{1 \leq i \leq p} F_i \neq \phi$

* Cong. $\underline{\text{si } \operatorname{rg} A = r}$

si $\begin{cases} L_1, \dots, L_r \\ C_1, \dots, C_r \end{cases}$ sont linéˀ. indep.

$$AX = B \Leftrightarrow \overset{\text{éq. principales}}{} \begin{pmatrix} \overset{r}{A_{11}} & \overset{q-r}{A_{12}} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_{p-r} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

inc. principales

éq. non principales p-r inc. non principales

$$A_{11} X_1 + A_{12} X_2 = B_1 \Longrightarrow A_{11} X_1 = B_1 - A_{12} X_2$$

$$\Longrightarrow X_1 = A_{11}^{-1} (B_1 - A_{12} X_2)$$

compatibilité : $A_{21} X_1 + A_{22} X_2 = B_2$ $B_2 = A_{21}(A_{11}^{-1}(B_1 - A_{12} X_2)) + A_{22} X_2$