Réduction des endomorphismes - Diagonalisation des matrices carrées

E ev sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Définitions

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A diagonale $\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists \begin{cases} P \in GL_n(\mathbb{K}) \\ D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale} \end{cases} \Big/ \begin{array}{l} D = P^{-1}AP \\ A = PDP^{-1} \end{array}$

  $\Leftrightarrow$ A **semblable** à une matrice diagonale

- diagonaliser A, c'est chercher une matrice inversible P et une matrice diagonale D / $A = PDP^{-1}$

- $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dim finie,

  u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exists$ une base $\mathcal{B}$ de E / $\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est diagonale

  diagonaliser u, c'est chercher $\mathcal{B}$ et la matrice

  $\Leftrightarrow$ $\text{mat}_{\mathcal{B}'}\, u$ est diagonalisable

un endomorphisme diagonal n'existe pas

$\text{mat}_{\mathcal{B}'}\, u$ diagonalisable $\Leftrightarrow \exists \begin{cases} P \in GL_n(\mathbb{K}) \\ D \text{ diagonale} \end{cases} / \ \text{mat}_{\mathcal{B}'} u = PDP^{-1}$

$\Leftrightarrow$ P matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$

$P^{-1}(\text{mat}_{\mathcal{B}'}\, u)\, P = D$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u = D}$

- triangulaire supérieure : $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ $\quad \begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$

- matrice trigonalisable (triangulable)

  rendre triangulaire

II Stabilité

1. F ss-ev de E, $u \in \mathcal{L}(E)$,

   F stable par u ($u(F) \subset F$), alors u induit un endomorphisme u' sur F

   $u' : \begin{vmatrix} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto u(x) \end{vmatrix}$

2. interprétation matricielle

   F stable par u,

   $\mathcal{B}$ base de F, complétée en une base $\mathcal{B}'$ de E, $\exists \begin{cases} A, C' \text{ carrées} \\ C \text{ qcq} \end{cases}$ /

   $$\text{mat}_{\mathcal{B}'}\, u = \left(\begin{array}{c:c} \boxed{A} & C \\ 0 & \boxed{C'} \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow \mathcal{B} \\ \updownarrow \end{array}$$

   et $\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u' = A$

Pp 1) $\det u = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & C' \end{vmatrix} = \det A \det C' = \det u' \det C'$

Pp 2) si $\begin{cases} F \text{ stable par } u \\ F \text{ possède un suppl. stable par } u \quad (F \oplus G = E,\ u(F) \subset F,\ u(G) \subset G) \\ \mathcal{B}' \text{ base adaptée à la décomposition} \end{cases}$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}\, u = \left(\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right) \qquad A, B \text{ carrées}$$

généralisation : $\begin{cases} E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k \quad \text{ss-ev stables par } u \\ \mathcal{B}' \text{ adaptée} \end{cases}$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}\, u = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

rem : si F est stable par u, F n'a pas forcément de suppl. stable.

ex : $E = \mathbb{R}_n[X]$ $\quad d : \begin{vmatrix} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P' \end{vmatrix}$ $\quad F = \mathbb{R}_0[X]$ (poly. cts)

F est stable par d

si F a un suppl. stable par d, $\exists H$ ssev de E / $E = F \oplus H = \mathbb{R}_0[X] \oplus H$

alors, d induit un endom. d' sur H $\quad$ $\mathrm{Ker}\, d' \subset \mathrm{Ker}\, d = \mathbb{R}_0[X]$

$\mathrm{Ker}\, d' \subset \mathbb{R}_0[X] \cap H = \{0\}$

donc d' est injective et surjective

car d' est un endom. dans un ev de dim finie donc d' est bijective

or, il existe au moins 1 poly. de degré n dans H

$(X^n \in E = \mathbb{R}_0[X] \oplus H \quad X^n = A + B)$

ce poly. n'a pas d'antécédant par d ni par d',

donc d' n'est pas surjective.

Pp 3) si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont stables par u

$\forall x \in \mathrm{Ker}\, u$, $u(x) = 0 \in \mathrm{Ker}\, u$: $\underline{u(\mathrm{Ker}\, u) \subset \mathrm{Ker}\, u}$

$\forall x \in \mathrm{Im}\, u$, $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$: $\underline{u(\mathrm{Im}\, u) \subset \mathrm{Im}\, u}$

si $\begin{cases} (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2, \\ u \text{ et } v \text{ commutent} \end{cases}$ alors $\mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}\, v$ sont stables par u

$\underline{\forall y \in \mathrm{Im}\, v}$, $\exists x \in E / y = v(x)$

$\Rightarrow u(y) = (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v[u(x)]$

donc $\underline{u(y) \in \mathrm{Im}\, v}$: $\underline{u(\mathrm{Im}\, v) \subset \mathrm{Im}\, v}$

$\underline{\forall x \in \mathrm{Ker}\, v}$, $v(u(x)) = u(v(x)) = u(0) = 0$

donc $\underline{u(x) \in \mathrm{Ker}\, v}$: $\underline{u(\mathrm{Ker}\, v) \subset \mathrm{Ker}\, v}$

3. sous espaces propres / polynôme caractéristique $\quad$ E $\mathbb{K}$ev, $u \in \mathcal{L}(E)$

a. Vecteur propre

$x \in E$, x est propre pour u si : $\begin{cases} x \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} / u(x) = \lambda x \end{cases}$

rem : dans ce cas, $\mathbb{K}x = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par u

$\forall y \in \mathrm{Vect}(x)$, $\exists \alpha \in \mathbb{K} / y = \alpha x$

$\underline{u(y)} = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda x$ $\underline{\in \mathrm{Vect}(x)}$

b. valeur propre

$\lambda \in \mathbb{K}$, λ est valeur propre de u s'il existe un vecteur propre x / $u(x) = \lambda x$

rem : si $u(x) = \lambda x$, $\lambda \neq 0$

alors, λ est **la** valeur propre associée à x

x est **un** vecteur propre associé à λ

$Sp(u)$: spectre de u = ensemble des valeurs propres de u

c. sous espaces propres

λ valeur propre pour u,

ensemble des $\underline{\text{vecteurs propres associés à } \lambda}$ $= \{x, x \in E / u(x) = \lambda x, x \neq 0\}$

$= \{x, x \in E / (u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = 0, x \neq 0\}$

$= \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \setminus \{0\}$

ss espace propre associé à λ : $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$

rem :
- E_λ ss-ev de E
- $\forall x \in E$, $x \in E_\lambda \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$
- si λ n'est pas valeur propre : $E_\lambda = \{0\}$
- $E_0 = \mathrm{Ker}\, u$
- λ valeur propre ou non, E_λ est stable par u

Pp) $\begin{cases} \lambda \text{ valeur propre de } u \\ v \in \mathcal{L}(E) / u \circ v = v \circ u \end{cases}$ alors E_λ est stable par v

$u \circ v = v \circ u \Rightarrow (u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ v = v \circ (u - \lambda \mathrm{Id}_E)$

donc $\underline{\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)}$ est $\underline{\text{stable par } v}$ $\quad$ (Pp 3))

donc E_λ aussi

th $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ $\underline{\text{valeurs propres distinctes de } u}$ $\Rightarrow E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$

$\underline{E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}}$: $\forall (x_1, x_2) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2}$,

$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow u(x_1 + x_2) = 0 = u(x_1) + u(x_2)$

$\Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_1 = 0 = (\lambda_1 - \lambda_2) x_1$ $\quad$ or $\lambda_1 \neq \lambda_2$

donc $x_1 = 0$ puis $x_2 = 0$

$\underline{\text{on suppose } E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}}$

$\forall (x, x_{k+1}) \in (E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}) \times E_{\lambda_{k+1}}, \quad \exists (x_1, \dots, x_k) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_k} \,/\, x = x_1 + \dots + x_k$

$x + x_{k+1} = 0 \Longrightarrow x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} = 0 \Longrightarrow u(x_1) + \dots + u(x_{k+1}) = 0$

$\Longrightarrow \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0$

$\Longrightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) x_1} + (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) x_2 + \dots\dots + \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1}) x_k} = 0$

or, $\underbrace{E_{\lambda_1}} \oplus \dots\dots \oplus \underbrace{E_{\lambda_k}}$

donc $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} x_1 = \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} x_2 = \dots = \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} x_k = 0$

donc $\underline{x_1 = \dots = x_k = 0}$ donc $x = 0$ puis $\underline{x_{k+1} = 0}$

Ainsi, $\underline{(E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}) \oplus E_{\lambda_{k+1}}}$

Pp 1) $\lambda \in Sp(u)$, E_λ stable par u donc u induit un endomorphisme u' sur E_λ
$\mathcal{B}'$ base de E_λ

alors, $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'} u' = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \ \lambda \end{pmatrix}$

autrement dit : $u' = \lambda \, Id_{E_\lambda}$

Pp 2) si $\begin{cases} Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \\ E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = E \\ \mathcal{B} \text{ base adaptée à la décompo.} \end{cases}$ alors

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix} \lambda_p & 0 \\ 0 & \lambda_p \end{matrix} \end{pmatrix}$$

dans ce cas, u est diagonalisable

Pp 3) si $\begin{cases} Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \\ \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i} = \dim E \end{cases}$ alors u est diagonalisable

$\left(\text{car } \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i} = \dim E \Longleftrightarrow E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = E\right)$

réciproquement,

u diagonalisable $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i} = \dim E$

- $\mathcal{B}$ base de diagonalisat° de u $\quad \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \overset{\xleftrightarrow{n_1}}{\alpha_1 \ \ddots \ \alpha_1} & \overset{\xleftrightarrow{n_2}}{\alpha_2 \dots \alpha_2} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \overset{\xleftrightarrow{n_q}}{\alpha_q \dots \alpha_q} \end{pmatrix}$

  $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n = \dim E$

  $rg(u - \lambda_1 I_E) = rg\begin{pmatrix} 0 \ddots 0 & & 0 \\ & \alpha_2 - \alpha_1 & \\ 0 & & \ddots \ \alpha_q - \alpha_1 \end{pmatrix} = n - n_1$

  $\dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda_1 I_E)) = n - (n - n_1) = n_1$

  donc $\lambda_1 \in Sp(u)$ et $\dim E_{\lambda_1} = n_1$

  de m̂, $\lambda_i \in Sp(u)$ et $\dim E_{\lambda_i} = n_i$

  donc $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda \underset{\smile}{\geqslant} \sum_{i=1}^{q} \dim E_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{q} n_i = n$

  il peut y avoir d'autres α_j

- mais $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda \subset E$ donc $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda \leqslant n$

  Ainsi, $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda = n$ $\quad$ (alors $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$: il n'y a pas d'autres α_j)

d. polynôme caractéristique

E de dim finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$

Pp) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in Sp(u) \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E) \neq \{0\}$

$\Longleftrightarrow u - \lambda Id_E$ non injectif

$\Longleftrightarrow \det(u - \lambda Id_E) = 0$

polynôme caractéristique : $\chi_u = \det(u - X I_E)$

si $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u$, $\chi_u = \det(A - X I_n) = \chi_A$

$Sp(u)$: ensemble des racines de χ_u

ex : $\begin{cases} \dim E = 4, \ E = F_1 \oplus F_2 \\ \dim F_1 = 2 \quad \text{base } (e_1, e_2) \\ \dim F_2 = 2 \quad \text{base } (e_3, e_4) \end{cases}$ $\quad u$: symétrie $/F_1$ $//^t F_2$

$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_u = \begin{vmatrix} 1 - X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - X \end{vmatrix} = (X^2 - 1)^2$

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} = \text{mat}_{\mathcal{B}}\, u$ $\qquad \chi_u = \chi_A = \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-X & & \\ a_{31} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-X \end{vmatrix}$

$\deg \chi_u = n$ $\qquad$ coeff. domi. $= (-1)^n$

coeff. du terme de deg $n-1 = (-1)^{n-1}\,\text{tr}(u) = (-1)^{n-1}\,\text{tr}\, A$

coeff. du terme cst $= \chi_u(0) = \det u = \det A$

ex. $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = \begin{vmatrix} a-X & c \\ b & d-X \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - bc = \underset{(-1)^2}{\uparrow} X^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{tr} A} X + \underbrace{(ad-bc)}_{\det A}$

conség. : • si $\begin{cases} \dim E = n \\ u \in \mathcal{L}(E) \end{cases}$ alors u a au plus n valeurs propres

• si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u a au moins 1 valeur propre

• si $\begin{cases} \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ n \text{ impair} \end{cases}$ alors u a au moins 1 valeur propre $\quad$ (car un polynôme de deg impair s'annule au moins 1 fois)

Pp) si $\begin{cases} F \text{ est un ss-ev de } E \text{ stable par } u \\ u' \text{ est l'endomorphisme de } F \text{ induit par } u \end{cases}$ alors $\chi_{u'} \mid \chi_u$

soit G un suppl. de F

$\mathcal{B}$ base adaptée à la décompo $F \oplus G = E$

($\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1$ base de F)

si u est stable par F, sa matrice dans $\mathcal{B}$ de E, plus grande que $\mathcal{B}$ de F, est triangulaire sup

$\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ $\quad$ où $A_{11} = \text{mat}_{\mathcal{B}_1} u'$

$\chi_u = \det(u - XI_n) = \begin{vmatrix} A_{11} - XI_r & A_{12} \\ 0 & A_{22} - XI_{n-r} \end{vmatrix}$

$= \det(A_{11} - XI_r)\det(A_{22} - XI_{n-r})$

$= \underline{\chi_{u'}\, \chi_{A_{22}}}$

Th $\;$ $\dim E = n$, $u \in \mathcal{L}(E)$

si λ est une valeur propre de E $\quad$ alors, $\dim E_\lambda \leqslant$ ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme caractéristique

E_λ stable par u, u' endom. induit par u sur E_λ : $u' = \lambda I_{E_\lambda}$

$\chi_{u'} = \begin{vmatrix} \lambda - X & & 0 \\ & \lambda - X & \\ 0 & & \ddots \; \lambda - X \end{vmatrix} = (\lambda - X)^{\dim E_\lambda}$ $\qquad$ $\chi_{u'} \mid \chi_u$

donc $(\lambda - X)^{\dim E_\lambda} \mid \chi_u$

donc λ est racine de χ_u à l'ordre $\dim E_\lambda$ au moins

$\overset{\dim E_\lambda}{E_\lambda} \oplus G = E$

$\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad \chi_u = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda - X & 0 \\ 0 \;\ddots & \lambda - X \end{matrix} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - XI_{n-r} \end{pmatrix} = (\lambda - X)^{\dim E_\lambda} \det(A_{22} - XI_{n-r})$

Th $\;$ u diagonalisable $\iff \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \text{pour toute } \left| \begin{matrix} \text{valeur propre } \lambda \text{ de } u, \\ \text{racine } \lambda \text{ de } \chi_u \end{matrix} \right. \end{cases}$

$\dim E_\lambda$ est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans χ_u

$\Rightarrow$ soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ valeurs propres 2 à 2 distinctes de u

$n_1 = \dim E_{\lambda_1}, \ldots, n_p = \dim E_{\lambda_p}$ $\qquad n_1 + \cdots + n_p = n = \dim E$

$\mathcal{B}$ adaptée à la décompo $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$

$\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\lambda_p \ddots \lambda_p}_{n_p} \end{pmatrix}$ $\qquad \chi_u = (\lambda_1 - X)^{n_1} \cdots (\lambda_p - X)^{n_p}$

$\Leftarrow$ χ_u scindé : $n_1 + \dots + n_p = \deg \chi_u = n = \dim E$

or, $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} \subset E$

et $\dim (E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}) = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p}$

$= n_1 + \dots + n_p = n$

donc $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = E$ d'où u diagonalisable

th $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \chi_A \text{ scindé} \\ \text{pour toute racine } \lambda \text{ de } \chi_A, \\ \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)) \text{ est l'ordre de} \\ \text{multiplicité de } \lambda \text{ dans } \chi_A \end{cases}$

rem : $\dim [\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)] = \operatorname{corang}(A - \lambda I_n) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} = \underset{\text{scindé}}{(1-X)^2}$ $S_p A = \{1\}$ racine double

$\operatorname{rg}(A - 1 I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ $\dim [\operatorname{Ker}(A - I)] = 2 - 1 = 1 < 2$

A n'est pas diagonalisable

$1 \leq \dim E_1 < 2 \Rightarrow \dim E_1 = 1$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\chi_B = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)$

1 d'ordre 1, valeur propre donc $1 \leq \dim E_1 \leq 1$

2 d'ordre 1, valeur propre donc $1 \leq \dim E_2 \leq 1$

$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E = 2$

donc B est diagonalisable

4. polynôme minimal

a. polynôme d'endomorphisme

$u \in \mathcal{L}(E)$, $u^2 = u \circ u$, $u^0 = I_E$

$P \in \mathbb{K}[X]$, $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$

on pose : $P(u) = a_0 u^0 + a_1 u^1 + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n \in \mathcal{L}(E)$

$P(u) = a_0 I + a_1 u + \dots + a_n u^n$

$\forall x \in E$, $\underbrace{(P(u))}_{\in \mathcal{L}(E)} \underbrace{(x)}_{\in E} = a_0(x) + a_1 u(x) + a_2 u^2(x) + \dots + a_n u^n(x)$

de même pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $P(A) = a_0 I_p + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

$\forall U \in \mathbb{K}^p$, $P(A) U = a_0 U + a_1 A U + a_2 A^2 U + \dots + a_n A^n U \in \mathbb{K}^p$

b. morphisme de K-algèbres

soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi_u : \begin{vmatrix} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{vmatrix}$ Φ_u est un morphisme d'algèbres

$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

- $\Phi_u(P+Q) = \Phi_u\left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) u^i = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i + \sum_{i=0}^{n} b_i u^i = \Phi_u(P) + \Phi_u(Q)$
- $\Phi_u(\lambda P) = \Phi_u\left(\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) = \Phi_u\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i u^i = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i u^i = \lambda \Phi_u(P)$
- $\Phi_u(PQ) = \Phi_u\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \sum_{j=0}^{n} b_j X^j\right) = \Phi_u\left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} a_i b_j X^{i+j}\right) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} a_i b_j \Phi_u(X^{i+j})$

$= \sum a_i b_j u^{i+j} = \sum a_i b_j u^i \circ u^j = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i u^i\right) \circ \left(\sum_{j=0}^{n} b_j u^j\right)$

$= P(u) \circ Q(u) = \Phi_u(P) \circ \Phi_u(Q)$

- $\Phi_u(X^0) = I_E$

de même $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

$\Phi_A : \begin{vmatrix} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{vmatrix}$ Φ_A est un morphisme d'algèbres

$P_p 1)$ $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = p$, $\mathcal{B}$ base de E, $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u$, $P \in \mathbb{K}[X]$ $P(A) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$

$\begin{cases} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(a_0 u^0) = a_0 I_E \\ \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(a_1 u^1) = a_1 A \\ \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(a_2 u^2) = a_2 A^2 \\ \vdots \\ \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(a_n u^n) = a_n A^n \end{cases}$

en faisant la somme :

$\operatorname{mat}(P(u)) = P(A)$

Pp2) $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$

Φ_u $PQ = QP$

$(PQ)(u) = (QP)(u) \Rightarrow \Phi_u(PQ) = \Phi_u(QP)$, morphisme

$\Phi_u(P) \circ \Phi_u(Q) = \Phi_u(Q) \circ \Phi_u(P)$

$P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$

de même, $P(A)\, Q(A) = Q(A)\, P(A)$

Pp3) dans $\mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Im}\, \Phi_u = \mathbb{K}[u]$ $\quad \mathrm{Im}\, \Phi_A = \mathbb{K}[A]$
sont des ss_algèbres commutatives de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

Pp4) $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$
si x est un vecteur propre de u, de valeur propre λ,
alors x .... $P(u)$ .... $P(\lambda)$

$$\begin{cases} a_0 u^0(x) = a_0 x \\ a_1 u^1(x) = a_1 u(x) = a_1 \lambda x \\ a_2 u^2(x) = a_2 u(\lambda x) = a_2 \lambda^2 x \\ \vdots \\ a_n u^n(x) = a_n u^{n-1}(\lambda x) = a_n \lambda^n x \end{cases}$$

$(u \circ u)(x) = u[u(x)] = u[\lambda x] = \lambda[\lambda x]$

$(P(u))(x) = P(\lambda).x$

"quelquechose de x = quelquechose $\times$ x"

Pp5) si F est un ssev de E stable par u
alors, F est stable par $P(u)$

$\forall x \in F$, $a_0 x \in F$

$a_1 u(x) \in F$ car $u(F) \subset F$

$a_2 u^2(x) \in F$ car $u[\underset{\in F}{u(x)}] \in F$ car $u(F) \subset F$

$\vdots$

$a_n u^n(x) \in F$

$(P(u))(x) \in F$ donc $(P(u))(F) \subset F$

Th (déjà vu) $u \in \mathcal{L}(E)$,
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valeurs propres distinctes de u $\Rightarrow E_{\lambda_1} \oplus \dots\dots \oplus E_{\lambda_n}$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_n}$, $x_1 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow \forall P \in \mathbb{K}[X]$, $(\overset{\in \mathcal{L}(E)}{P(u)})(x_1 + \dots + x_n) = 0$

$(P(u))(x_1) + \dots\dots + (P(u))(x_n) = 0$

on pose $P_1 = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq 1}} \dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_1 - \lambda_j}$ (poly. de Lagrange)

$P_1(u) = \dfrac{1}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq 1}} (\lambda_1 - \lambda_j)} \underbrace{(u - \lambda_2 I_E) \circ (u - \lambda_3 I_E) \circ \dots \circ}_{\text{commutent}} \underbrace{(u - \lambda_n I_E)}$

* λ_n valeur propre de u:
$u(x_n) = \lambda_n x_n \Rightarrow u(x_n) - \lambda_n x_n = 0$
$\Rightarrow (u - \lambda_n I_E)(x_n) = 0$

$(P_1(u))(x_n) = \dfrac{1}{\prod(\lambda_1 - \lambda_j)} [(u - \lambda_2 I_E) \circ \dots\dots \circ (u - \lambda_{n-1} I_E)] (\underbrace{(u - \lambda_n I_E)(x_n)}_{0}^{*}) = 0$

de même pour $(P_1(u))(x_{n-j})$: $\forall j \neq 1$, $P_1(u)(x_j) = 0$

par ex: $(P_1(u))(x_{n-1}) = \dfrac{1}{\prod(\lambda_1 - \lambda_j)} [(u - \lambda_2 I_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_n I_E)] (\underbrace{(u - \lambda_{n-1} I_E)(x_{n-1})}_{0}) = 0$

et $(P_1(u))(x_1) = \dfrac{1}{\prod(\lambda_1 - \lambda_j)} (u - \lambda_2 I_E) \circ \dots \circ \underbrace{(u - \lambda_n I_E)(x_1)}_{u(x_1) - \lambda_n x_1 = \lambda_1 x_1 - \lambda_n x_1} = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_n}{\prod(\lambda_1 - \lambda_j)} (u - \lambda_2 I_E) \circ \dots \circ \underbrace{(u - \lambda_{n-1})(x_1)}_{\lambda_1 x_1 - \lambda_{n-1} x_1}$

$= \dfrac{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) \dots (\lambda_1 - \lambda_2)}{\prod(\lambda_1 - \lambda_j)} x_1 = x_1$ $\quad$ or $(P_1(u))(x_1) = 0$
donc $x_1 = 0$

de m, $(P_2(u))(x_2) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq 2}} \dfrac{X - \lambda_j}{(\lambda_2 - \lambda_j)}$ donne $x_2 = 0$ $\quad$ Ainsi, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

C- polynôme minimal

idéal annulateur

Φ_u morphisme d'algèbres donc morphisme d'anneaux
son noyau est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

idéal annulateur de u : $I_u = \mathrm{Ker}\, \Phi_u = \{ P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(u) = 0 \}$

de même $I_A = \mathrm{Ker}\, \Phi_A$

rem : $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(A)$ donc $I_u = I_A$

polynôme minimal

si Φ_u n'est pas injective, alors $I_u \neq \{0\}$

donc $\exists\ \Pi_u$ polynôme normalisé unique / $I_u = \underbrace{\overset{\text{générateur}}{\Pi_u}\, \mathbb{K}[X]}_{\text{anneau principal}}$

alors, $\begin{cases} \Pi_u(u) = 0 \\ \forall P \in I_u,\ \Pi_u \mid P \end{cases}$ (de même pour Π_A)

si E de dim finie,
$\forall u \in \mathcal{L}(E)$, Φ_u n'est pas injective
donc **tout endomorphisme de E possède un polynôme minimal**

Φ_u morphisme d'algèbres donc morphisme d'ev
or, $\begin{cases} \dim \mathcal{L}(E) \text{ est finie} \\ \dim \mathbb{K}[X] \text{ n'est pas finie} \end{cases}$ donc Φ_u non injectif

rem : $\dim E = p \Rightarrow \dim \mathcal{L}(E) = p^2$

donc $(I_F, u, u^2, \dots, u^{p^2})$ famille de p^2+1 vecteurs de $\mathcal{L}(E)$, est liée

$\exists (a_0, \dots, a_{p^2}) \in \mathbb{K}^{p^2+1} \setminus \{(0,\dots,0)\}$ / $a_0 I_E + a_1 u + \dots + a_{p^2} u^{p^2} = 0$

$P(u)=0 \rightarrow$ donc $\underbrace{a_0 + a_1 X + \dots + a_{p^2} X^{p^2}}_{P,\ \deg P = p^2} \in I_u$ or, $\Pi_u \mid P \Rightarrow \deg \Pi_u \leq \deg P$

donc $\deg \Pi_u \leq p^2$

de m,
Toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ possède un polynôme minimal Π_A
et $\deg \Pi_A \leq p^2$

Pp 1) $\begin{cases} u \in \mathcal{L}(E) \\ \underbrace{P \in I_u}_{P(u)=0} \end{cases}$ λ valeur propre de $u \Longrightarrow P(\lambda) = 0$

soit x un vect. propre, associé à λ, de u
alors x est un vect. propre de $\underbrace{P(u)}_{0_{\mathcal{L}(E)}}$ associé à $P(\lambda)$

or, 0 est la seule valeur propre associée à $0_{\mathcal{L}(E)}$
donc $P(\lambda) = 0$

$\forall x \in E$, $P(u)(x) = 0 = P(\lambda).x$
$\rightarrow P(\lambda) = 0$

th E de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, Π_u polynôme mini de u
alors, $Sp(u)$ = ensemble des valeurs propres de u
racines de Π_u

car $\Pi_u \in I_u$

- $\Pi_u \in I_u$, $\lambda \in Sp(u) \Rightarrow \overset{*}{\Pi_u(\lambda) = 0} \Rightarrow \lambda$ racine de Π_u
- λ racine de $\Pi_u \Rightarrow X - \lambda \mid \Pi_u \Rightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X] / \Pi_u = (X-\lambda) Q$

Π_u mini $\Rightarrow Q \notin I_u \Rightarrow Q(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$
$\Rightarrow \exists x \in E / (Q(u))(x) \neq 0_E$

or, $(\Pi_u(u))(x) = 0_E$
$\left((u - \lambda I_E) \circ (Q(u))\right)(x) = 0_E$
$(u - \lambda I_E)(Q(u)(x)) = 0_E$
$(u - \lambda I_E)(y) = 0_E$ avec $y \neq 0_E$

donc y est un vect. propre de u par la valeur propre λ, donc $\lambda \in Sp(u)$

donc $Sp(u)$ = ens. des racines de P
si $P(u) = 0$

exemples : * $\dim E = p > 0$, u projection sur F // à G
$E = F \oplus G$

$u \circ u = u \Rightarrow u \circ u - u = 0 \Rightarrow X^2 - X \in I_u$
$\Rightarrow X(X-1) \in I_u$

$\Pi_u \in \{X, X-1, X(X-1), \cancel{1}\}$ car $\dim E \neq 0$

$\Pi_u = X \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} G = E \\ F = \{0\} \end{cases}$

$\Pi_u = X - 1 \Leftrightarrow u = I_E \Leftrightarrow \begin{cases} G = \{0\} \\ F = E \end{cases}$

$\Pi_u = X^2 - X \Leftrightarrow \begin{cases} G \neq \{0\} \\ F \neq \{0\} \end{cases}$

* endomorphisme nilpotent
$u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists k \in \mathbb{N}^* / \begin{cases} u^k = 0 \\ u^{k-1} \neq 0 \end{cases}$ k : indice de nilpotence
$k = \inf \{q \in \mathbb{N} / u^q = 0\}$

$X^k \in I_u$, $X^{k-1} \notin I_u$ $\Pi_u = X^k$

matrice d'un endomorphisme nilpotent

$\{0\} \subset \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset \dots \subset \operatorname{Ker} u^{k-1} \subset \operatorname{Ker} u^k = E$

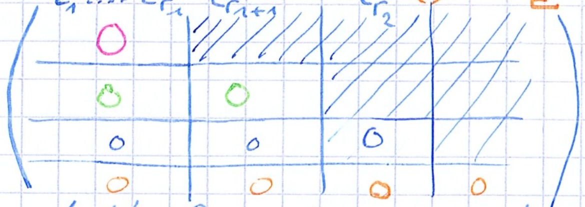
Pp) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 \Longrightarrow \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u^3$ (itérés du noyau)

- $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u^3$
- $\forall x \in \operatorname{Ker} u^3$, $u^3(x) = 0 = u^2(u(x))$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$
  donc $u(u(x)) = 0$ soit $u^2(x) = 0$ d'où $x \in \operatorname{Ker} u^2$ donc $\operatorname{Ker} u^3 \subset \operatorname{Ker} u^2$

donc $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker} u \subsetneq \operatorname{Ker} u^2 \subsetneq \dots \subsetneq \operatorname{Ker} u^k = E$

base incomp. : $\mathcal{B} = (\underbrace{\underbrace{\underbrace{e_1, \dots, e_{r_1}}_{\operatorname{Ker} u}, e_{r_1+1}, \dots\dots}_{\operatorname{Ker} u^2}, e_{r_2+1} \quad e_{r_k}, e_n}_{E})$

$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u =$



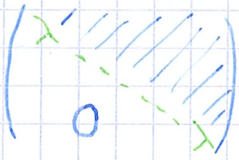
dans une base adaptée $\mathcal{B}$, $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u$ est triangulaire avec des 0 sur la diago

matrice d'un endomorphisme dont le polynôme minimal est $(X - \lambda)^k$

- $(u - \lambda I_E)^k$ est nilpotent
- dans une base adaptée $\mathcal{B}$

$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u - \lambda I_E) =$

$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u =$



5 _ décomposition des noyaux

a. arithmétique

Pp1) $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $D = P \wedge Q$, $\operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Ker} D(u)$

- Bezout : $\exists (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2 \ / \ AP + BQ = D$
  donc $A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u) = D(u)$
  $\forall x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$,
  $(D(u))(x) = (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x)$
  $= [A(u)][\underbrace{[P(u)](x)}_{0}] + [B(u)][\underbrace{[Q(u)](x)}_{0}] = 0$
  donc $x \in \operatorname{Ker} D(u)$ d'où $\operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) \subset \operatorname{Ker} D(u)$
- $\exists (P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2 \ / \ P = DP_1$ et $Q = DQ_2$
  $P(u) = D(u) \circ P_1(u)$ et $Q(u) = D(u)\, Q_2(u)$
  $\forall x \in \operatorname{Ker} D(u)$, $\begin{cases} [P(u)](x) = [P_1(u) \circ D(u)](x) = [P_1(u)][D(u)(x)] = 0 \\ [Q(u)](x) = [Q_2(u) \circ D(u)](x) = [Q_2(u)][D(u)(x)] = 0 \end{cases}$
  donc $x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$ d'où $\operatorname{Ker} D(u) \subset \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$

un polynôme) travaille sur
un endomorphisme
un vecteur)

Pp2) $P \wedge Q = 1 \Longrightarrow \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Ker} PQ(u)$

- $P \wedge Q = 1 \Rightarrow \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Ker} I_E = \{0\}$ $\left(\begin{matrix} u \in \operatorname{Ker} I_E \\ \Leftrightarrow Id(u) = u = 0 \end{matrix} \right)$
  donc $\operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$
- Bezout : $\exists (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2 \ / \ AP + BQ = 1$
  donc $A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u) = I_E$
  $\forall x \in E$, $A(u) \circ P(u)(x) + B(u) \circ Q(u)(x) = x$
  or, $\forall x \in \operatorname{Ker} PQ(u)$, $\begin{cases} Q(u)(x) \in \operatorname{Ker} P(u) \\ P(u)(x) \in \operatorname{Ker} Q(u) \end{cases}$
  donc $\begin{cases} B(u) \circ Q(u)(x) \in \operatorname{Ker} P(u) \\ A(u) \circ P(u)(x) \in \operatorname{Ker} Q(u) \end{cases}$
  car $P(u)[B(u) \circ Q(u)(x)] = P(u) \circ B(u) \circ Q(u)(x)$
  $= (PBQ)(u)(x) = (BPQ)(u)(x)$
  $= B(u)[PQ(u)(x)] = 0$
  donc $\forall x \in \operatorname{Ker} PQ(u)$, $\underbrace{A(u) \circ P(u)(x)}_{\in \operatorname{Ker} Q(u)} + \underbrace{B(u) \circ Q(u)(x)}_{\in \operatorname{Ker} P(u)} = x$
  d'où $\operatorname{Ker} PQ(u) \subset \operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u)$

$\forall x \in E, \begin{cases} P(u)(x) = 0 & \Rightarrow & P(u) \circ Q(u)(x) = 0 : \text{Ker}\, P(u) \in \text{Ker}\, PQ(u) \\ Q(u)(x) = 0 & \Rightarrow & P(u) \circ Q(u)(x) = 0 : \text{Ker}\, Q(u) \in \text{Ker}\, PQ(u) \end{cases}$

d'où $\text{Ker}\, P(u) + \text{Ker}\, Q(u) \subset \text{Ker}\, PQ(u)$

th de décomposition des noyaux

$Q_1, \dots, Q_k$ polynômes premiers entre eux, 2 à 2

$u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \text{Ker}\, Q_i(u) = \text{Ker}\left(\left(\prod_{1 \leq i \leq k} Q_i\right)(u)\right)$

Q_1 est premier avec $Q_2, \dots, Q_k$ donc avec $Q_2 \dots Q_k$

donc $\text{Ker}\, Q_1(u) \oplus \text{Ker}\left(\prod_{2 \leq i \leq k} Q_i\right)(u) = \text{Ker}\left(Q_1 \prod_{2 \leq i \leq k} Q_i(u)\right)$

de m̂, $\text{Ker}\, Q_2(u) \oplus \text{Ker}\left(\prod_{3 \leq i \leq k} Q_i\right)(u) = \text{Ker}\left(Q_2 \prod_{3 \leq i \leq k} Q_i(u)\right) = \text{Ker}\left(\prod_{2 \leq i \leq k} Q_i(u)\right)$

donc $\text{Ker}\, Q_1(u) \oplus \text{Ker}\, Q_2(u) \oplus \text{Ker}\left(\prod_{3 \leq i \leq k} Q_i\right)(u) = \text{Ker}\left(\prod_{1 \leq i \leq k} Q_i(u)\right)$

de m̂, ...

applications: th déjà vu

① $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valeurs propres de u distinctes $\Longrightarrow E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$

$Q_i = X - \lambda_i \qquad \text{Ker}\, Q_i(u) = E_{\lambda_i}$

$\lambda_i \neq \lambda_j$ donc Q_i et Q_j sont premiers entre eux

donc $\text{Ker}\, Q_1(u) \oplus \dots \oplus \text{Ker}\, Q_k(u) = \text{Ker}\left(\prod_{1 \leq i \leq k} Q_i\, u\right)$

soit $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$

② soit $Q \in I_u$, si une décomposition de Q en produit de polynômes 2 à 2 premiers entre eux est $Q = Q_1 \dots Q_k$

alors $Q(u) = 0 \qquad \text{Ker}\, Q(u) = E$

$E = \text{Ker}\, Q(u) = \text{Ker} \prod_{1 \leq i \leq k} Q_i(u) = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \text{Ker}\, Q_i(u)$

Pp 2) $Q = Q_1 \dots Q_k \in I_u$ avec $Q_1, \dots, Q_k$ 2 à 2 premiers entre eux

$\begin{cases} P_1 = Q_2 Q_3 \dots Q_k \\ P_2 = Q_1 Q_3 \dots Q_k \\ \vdots \\ P_k = Q_1 \dots Q_{k-1} \end{cases}$ alors, $P_1, \dots, P_k$ sont premiers entre eux dans leur ensemble

donc $\exists (A_1, \dots, A_k) \in \mathbb{K}[X]^k \,/\, A_1 P_1 + \dots + A_k P_k = 1$

donc $A_1(u) \circ P_1(u) + \dots + A_k(u) \circ P_k(u) = I_E$

$\forall x \in E, \quad A_1(u) \circ P_1(u)(x) + \dots + A_k(u) \circ P_k(u)(x) = x$

$Q_1(u)[A_1(u) \circ P_1(u)(x)] = A_1(u)\, [P_1 Q_1(u)(x)]$

$= A_1(u)\, [Q(u)(x)] = 0 \qquad (Q \in I_u)$

donc $A_1(u) \circ P_1(u)(x) \in \text{Ker}\, Q_1(u)$

de m̂, $A_i(u) \circ P_i(u)(x) \in \text{Ker}\, Q_i(u)$

ccl : $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $A_i(u) \circ P_i(u)$ est la projection sur $\text{Ker}\, Q_i(u)$ // à $\bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \text{Ker}\, Q_j(u)$

b. théorème fondamental

th E de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$

u diagonalisable $\Longleftrightarrow$ u annule un polynôme scindé à racines simples

$\Leftarrow$ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ racines 2 à 2 distinctes

μ coeff. domi. $\qquad Q = \mu \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$

$\begin{cases} \text{on pose } Q_i = X - \lambda_i \\ i \neq j \rightarrow Q_i \text{ et } Q_j \text{ premiers entre eux} \\ Q \in I_u \end{cases}$

$E = \text{Ker}\, Q(u) = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \text{Ker}\, Q_i(u) = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \text{Ker}(u - \lambda_i I_E)$

$Q(u) = 0$ et $E = \text{Ker}\{0\}$

or, $\begin{cases} \lambda_i \in Sp(u) \Rightarrow \text{Ker}(u - \lambda_i I_E) = E_{\lambda_i} \\ \lambda_i \notin Sp(u) \Rightarrow \text{Ker}(u - \lambda_i I_E) = \{0\} \end{cases}$

$E = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq k \\ \lambda_i \in Sp(u)}} E_{\lambda_i} \subset \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda$ donc $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda = E$ (p.55)

donc u est diagonalisable

$\Rightarrow x_1 \in E_{\lambda_1}$, $Q(u)(x_1) = (u-\lambda_1 I_E)\circ \dots \circ (u-\lambda_k I_E)(x_1)$

$= [(u-\lambda_2 I_2)\circ \dots \circ (u-\lambda_\lambda I_E)]\underbrace{(u-\lambda_1 I_E)(x)}_{0} = 0$

de m̂ $Q(u)(x_2)=0$ ....

donc $Q(u)$ est nul $\quad \bigoplus_{1\leq i\leq k} E_{\lambda_i} = E$

corollaires : ① E de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$

u diagonalisable $\iff$ son polynôme minimal est scindé à racines simples

$\Leftarrow$ si Π_u est scindé à racines simples, u annule un polynôme scindé à racines simples donc est diagonalisable $\quad (\Pi_u(u)=0)$

$\Rightarrow$ u annule un polynôme Q, scindé à racines simples : $Q \in I_u$, $\Pi_u \mid Q$ donc Π_u est scindé à racines simples

② $A \in \mathcal{M}_p(K)$, A diagonalisable $\iff$ A annule un polynôme scindé à racines simples

③ $\iff$ son polynôme minimal est ....

rem : $u \in \mathcal{L}(E)$, $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, u diagonalisable

$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$

p_i projection sur E_{λ_i}, $/\!/^t$ à $\bigoplus_{\substack{1\leq j\leq k \\ j\neq i}} E_{\lambda_j}$

$p_i \in \mathbb{K}[u]$

$u = \lambda_1 p_1 + \dots \lambda_k p_k$

$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq j \\ p_i & \text{si } i=j \end{cases}$

6_ théorème de Cayley_Hamilton

th $\begin{cases} E \text{ de dim finie} \\ u \in \mathcal{L}(E) \end{cases}$ alors χ_u polynôme annulateur :

$\chi_u(u) = 0$ ou $\Pi_u \mid \chi_u$ $\quad$ de m̂, $\chi_A(A) = 0$

- si $x=0$: $\chi_u(u)(x) = 0$
- si x est un vect.p. de u : $\exists \lambda \in \mathbb{K} / \begin{cases} u(x) = \lambda x \\ X-\lambda \mid \chi_u \end{cases}$: $\exists Q \in \mathbb{K}[X] / \chi_u = Q(X-\lambda)$

$\chi_u(u)(x) = (Q(u)\circ(u-\lambda I_E))(x) = Q(u)[(u-\lambda I_E)(x)] = Q(u)(0) = 0$

- si $x \in E$, $x\neq 0$, x non vecteur propre :

$(x, u(x))$ est libre $\quad (u(x) \neq \lambda x)$ $\quad$ (en dim. finie, k existe $1 \leq k < \dim E$)

$\exists k \in \mathbb{N} / \begin{cases} (x, u(x), \dots, u^k(x)) \text{ est libre} \\ (x, u(x), \dots, u^{k+1}(x)) \text{ est liée} \end{cases}$

$u^{k+1}(x) \in Vect(x, u(x), \dots, u^k(x)) = F$

$\exists (a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{K}^k / u^{k+1}(x) = -a_0 x - a_1 u(x) - \dots - a_k u^k(x)$

$u(F) \subset F$: F est stable par u $\quad (u(u^k(x)) \in Vect(x, u(x), \dots, u^k(x)))$

soit u' l'endomorphisme induit par u sur F, $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^k(x))$

$u'(x) = u(x)$

$u'(u(x)) = u^2(x)$

$u'(u^{k-1}(x)) = u^k(x)$

$u'(u^k(x)) = u^{k+1}(x)$

$$A' = \text{mat}_{\mathcal{B}}\, u' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & u(x) & & u^k(x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & & -a_0 \\ \textcircled{1} & 0 & & -a_1 \\ 0 & \textcircled{1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \textcircled{1} & -a_k \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ u(x) \\ \\ \\ u^k(x) \end{array}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \dots + X^k L_{k+1}$

polynôme caractéristique de A' :

$$\chi_{A'} = \begin{vmatrix} -X & & & & -a_0 \\ 1 & -X & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & -a_2 \\ & & \ddots & -X & \\ 0 & & & 1 & -a_k - X \end{vmatrix}$$

dvp / 1ère ligne.

$$\chi_{A'} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 - a_1 X - \dots - a_k X^{k+1} \\ 1 & -X & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & -X & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_k - X \end{vmatrix} = (-1)^k(-a_0 - a_1X - \dots - a_kX^k - X^{k+1}) \, 1$$

$= (-1)^{k+1}(X^{k+1} + a_k X^k + \dots + a_1 X + a_0)$

F est stable donc $\chi_{A'} \mid \chi_u$: $\exists Q \in \mathbb{K}[X] / \chi_u = Q\chi_{A'}$

$\chi_u(u) = Q(u) \circ \chi_{A'}(u)$

$\chi_u(u)(x) = Q(u)(\chi_{A'}(u)(x))$

$\chi_u(u)(x) = Q(u)\left((-1)^{k+1}\left(u^{k+1}(x) + a_k u^k(x) + \dots + a_1 u(x) + a_0\right)\right) = Q(u)(0) = 0$ E
Ainsi, $\forall x \in E$, $\chi_u(u)(x) = 0$ soit $\underline{\chi_u(u) = 0}$

exemples : $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{tr} A = a + d \quad \det A = ad - bc \quad \chi_A = \begin{vmatrix} a-X & c \\ b & d-X \end{vmatrix} = ad - aX - dX + X^2 - bc$
$= X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2+ad & ac+cd \\ ab+bd & ad+d^2 \end{pmatrix} \qquad (ad-bc)I_E = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$\underline{\chi_A(A)} = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_E = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

7. triangulation

E de dim finie

a. remarques

① $u \in \mathcal{L}(E)$, si u est triangulable, alors u a au moins 1 valeur propre

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & \\ 0 & \ddots \;\lambda \end{pmatrix} \qquad \underline{u(e_1) = \lambda e_1}$$

② $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, si A est triangulaire supérieure, $\exists P \in GL_p(\mathbb{K}) \,/\, P^{-1}AP$ triangulaire inférieure

base de E : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $u \in \mathcal{L}(E) \,/\, \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = A$

$A = \begin{pmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

$u(e_1) \in \operatorname{Vect}(e_1)$
$u(e_2) \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$
$\vdots$
$u(e_p) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$

$u(e_p) \in \operatorname{Vect}(e_p, e_{p-1}, \dots, e_1)$
$u(e_{p-1}) \in \operatorname{Vect}(e_{p-1}, \dots, e_1)$
$\vdots$
$u(e_2) \in \operatorname{Vect}(e_2, e_1)$
$u(e_1) \in \operatorname{Vect}(e_1)$

soit $\mathcal{B}' = (e_p, e_{p-1}, \dots, e_1)$, alors,

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'} u = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_p) & & & & u(e_1) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \ast & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ast & 0 & & \vdots \\ & \vdots & \ast & \ddots & 0 \\ \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \end{pmatrix} \begin{matrix} e_p \\ \\ \\ e_1 \end{matrix} \end{array}$$

pour P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$P = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \mathrm{Id} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_p) & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \\ e_p \end{matrix} \end{array} \qquad \underline{\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'} u = P^{-1}AP} \text{ est } \underline{\text{triangulaire inférieure}}$$

b. drapeau

$u \in \mathcal{L}(E)$ triangulable, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p) \,/\, \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u$ est triangulaire supérieure
alors,
$u(\operatorname{Vect}(e_1)) \subset \operatorname{Vect}(e_1)$
$u(\operatorname{Vect}(e_1, e_2)) \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$
$\vdots$
$u(\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)) \subset \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$

$F_1, \dots, F_p$, ss-ev de E, constituent un drapeau de E si : $\begin{cases} F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_p = E \\ \dim F_1 = 1 \\ \dim F_2 = 2 \\ \vdots \\ \dim F_p = p = \dim E \end{cases}$

th $u \in \mathcal{L}(E)$ est triangulable $\Longleftrightarrow$ $\exists$ un drapeau de E stable par u

C. **th**

$u \in \mathcal{L}(E)$ est triangulable $\Longleftrightarrow$ χ_u est scindé
dim E = p

$\Longleftarrow$ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ racines de χ_u de multiplicité $n_1, \dots, n_k$
alors, $n_1 + \dots + n_k = p$
$\chi_u = (-1)^{p} (X - \lambda_1)^{n_1} (X - \lambda_2)^{n_2} \dots (X - \lambda_k)^{n_k}$

p.56

pour $i \neq j$, $(X-\lambda_i)^{n_i} \wedge (X-\lambda_j)^{n_j} = 1$

donc $\mathrm{Ker}(\underbrace{\chi_u(u)}_{0}) = \mathrm{Ker}[(u-\lambda I_E)^{n_1}] \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}[(u-\lambda I_E)^{n_k}]$
$= E$

or, $\forall\ i \in \{1,\dots,k\}$, $\mathrm{Ker}\,[\underbrace{(u-\lambda_i I_E)}_{\in \mathbb{K}(u)}{}^{n_i}]$ est stable par u

donc u induit un endom. u_i sur $\mathrm{Ker}[(u-\lambda_i I_E)^{n_i}]$
et $(u_i - \lambda I_{\mathrm{Ker}(u-\lambda_i I_E)^{n_i}})^{n_i} = 0$

car $E_i = \mathrm{Ker}[(u-\lambda_i I_E)^{n_i}]$

$$u_i : \left| \begin{array}{l} E_i \longrightarrow E_i \\ x \longmapsto u(x) \end{array} \right.$$

$$(u_i - \lambda_i I_{E_i})^{n_i} : \left| \begin{array}{l} E_i \longrightarrow E_i \\ x \longmapsto (u-\lambda_i I_E)^{n_i}(x) \end{array} \right.$$

donc $u_i - \lambda_i I_{(\mathrm{Ker}(u-\lambda_i I_E)^{n_i}}$ est nilpotent

donc $\exists\ \mathcal{B}_i$ base de $\mathrm{Ker}[(u-\lambda_i I_E)^{n_i}]$ /

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_i} u = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

alors, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ est une base de E

et $$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{cc|c|c} \lambda_1 & & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \begin{array}{cc} \lambda_2 & \\ 0 & \lambda_2 \end{array} & \\ \hline & & & \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ distincts, $(n_1,\dots,n_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ / $n_1 + \dots + n_k = p$

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda_{a_1} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{a_p} \end{pmatrix} \qquad \chi_u = \begin{vmatrix} \lambda_{a_1}-X & & & \\ & \lambda_{a_2}-X & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{a_p}-X \end{vmatrix}$$

$$\chi_u = (\lambda_{a_1} - X) \dots (\lambda_{a_p} - X) = (\lambda_1 - X)^{n_1} \dots (\lambda_k - X)^{n_k}$$

corollaires : ① $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ valeurs propres à l'ordre $n_1,\dots,n_k$,
si u est triangulable alors $\exists\ \mathcal{B}$ base de E /

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

② si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est triangulable
③ A triangulable $\Longleftrightarrow$ χ_A scindé
④ toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est triangulable
⑤ u triangulable $\Longleftrightarrow$ u annule un polynôme scindé
⑥ A .... $\Longleftrightarrow$ A ...

8. applications

a. calcul de A^n

$\ast$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = (1-X)(4-X) + 2 = X^2 - 5X + 6 = \underline{(X-3)(X-2)}$ $\quad A$ est diagonalisable

- $E_2 : \begin{cases} x - 2y = 2x \\ x + 4y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow -x - 2y = 0 \qquad U_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$E_3 : \begin{cases} x - 2y = 3x \\ x + 4y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \qquad U_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Big\}\ \underline{P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$

- $\det P = -1$ $\qquad \underline{P^{-1}} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$

$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}}}$

$\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1}$

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^n \\ -2^n & -3^n \end{pmatrix} \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2.3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}}} = A^n$

$* \ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & -5 & 8 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{\chi_A} = -X^3 + 3X^2 - 4 = \underline{-(X+1)(X-2)^2}$

non proport. proportionnel

$E_{-1} : \begin{cases} 3x - y + 2z = -x \\ 7x - 5y + 8z = -y \\ 3x - 3y + 5z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ 7x - 4y + 8z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

$U_{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2 : \begin{cases} 3x - y + 2z = 2x \\ 7x - 5y + 8z = 2y \\ 3x - 3y + 5z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 7x - 7y + 8z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ $\quad U_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

A n'est pas diagonalisable car $\dim E_2 = 1 \neq 2$

A est triangulable (χ_A est scindé)

$1^{ère}$ triangulat° : $U_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (U_3 non combi. lin. de U_1, U_2)

$\underline{P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ $\qquad \underline{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$ $\qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \textcircled{3} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$2^{ème}$ triangulat° : on choisit "mieux" U_3 : $U_3 \in \operatorname{Ker}\left[(A - 2I)^2\right]$

$\begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ -18x + 18y - 18z = 0 \\ -9x + 9y - 9z = 0 \end{cases}$ *

$\iff -x + y - z = 0$

$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -18 & 18 & -18 \\ -9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ de rang 1 : * $U_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\qquad \underline{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$ $\qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^n = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1}$ $\qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = (2I + C)^n$ avec $\begin{cases} IC = CI \\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^n I + n 2^{n-1} C + 0 \ldots$ car $C^2 = 0$

$= \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

d'où $\underline{\underline{A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}}}$

$2^{ème}$ méth : div. eucli. de X^n par χ_A : ($\deg \chi_A = 3$ donc reste de $\deg \leq 2$)

$X^n = Q \chi_A + aX^2 + bX + c$

$X \leftarrow -1 : (-1)^n = a - b + c \qquad (1)$

$X \leftarrow 2 : 2^n = 4a + 2b + c \qquad (2)$

2 racine double : on dérive $nX^{n-1} = 2aX + b$
et 2 annule la dérivée

$X \leftarrow 2 : n 2^{n-1} = 4a + b \qquad (3)$

$(2) - (1) : \begin{cases} a - b + c = (-1)^n \\ 3a + 3b = 2^n - (-1)^n \\ 4a + b = n 2^{n-1} \end{cases}$ $\qquad (2) - 3(3) : \begin{cases} a - b + c = (-1)^n \\ -9a = 2^n - (-1)^n - 3n 2^{n-1} \\ 4a + b = n 2^{n-1} \end{cases}$

$a = \dfrac{3n \cdot 2^{n-1} - 2^n + (-1)^n}{9}$ $\qquad b = n 2^{n-1} - 4 \dfrac{3n 2^{n-1} - 2^n + (-1)^n}{9} = \dfrac{-3n 2^{n-1} + 4 \cdot 2^n - 4(-1)^n}{9}$

$c = (-1)^n + b - a$

$X \leftarrow A : \underline{\underline{A^n}} = Q(A) \chi_A(A) + aA^2 + bA + c = \underline{\underline{aA^2 + bA + c I_3}}$

b. récurrence linéaire

$* \begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$

$\underline{X_{n+1}} = \underline{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 5u_{n+1} - 6u_n \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \underline{A X_n}$

donc $X_n = A^n X_0$

$\underline{\chi_A} = X^2 - 5X + 6 = \underline{(X-2)(X-3)}$

A est diagonalisable et a 2 valeurs propres : 2 et 3

donc $\exists P \in GL_2(\mathbb{R}) \ / \ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$

donc $A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$ d'où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$ $\quad \begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_1 = 2\alpha + 3\beta \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$ $\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} u_0 & 1 \\ u_1 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 3u_0 - u_1 \\ \beta = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & u_0 \\ 2 & u_1 \end{vmatrix}}{1} = u_1 - 2u_0 \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \underline{\underline{u_n = (3u_0 - u_1) 2^n + (u_1 - 2u_0) 3^n}}$

* $\begin{cases} u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \\ (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$ $\quad \underline{X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}}_{X_n}$

$\underline{\chi_A} = -(X^3 - 5X^2 + 8X - 4) = \underline{-(X-1)(X-2)^2}$

valeurs propres : 1 , $\dim E_1 = 1$

2 ; $\dim E_2 \in \{1, 2\}$

$\operatorname{rg}(A - 2I) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 3 \end{pmatrix} \geqslant 2$ $\quad \dim E - \operatorname{rg}(A - 2I)$

donc $\dim E_2 = 1$

donc A n'est pas diagonalisable

mais, $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}) \ / \ P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$

2^{n-1} inclus dans γ

donc $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \underline{u_n} = \alpha + \beta 2^n + \gamma n 2^n = \underline{\underline{\alpha 1^n + (\beta + \gamma n)}} \ \underline{\underline{2^n}}$

$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_1 = \alpha + 2(\beta + \gamma) \\ u_2 = \alpha + 4(\beta + 2\gamma) \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 2$ $\quad \underline{\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} u_0 & 1 & 0 \\ u_1 & 2 & 2 \\ u_2 & 4 & 8 \end{vmatrix}}{2} = 4u_0 - 4u_1 + u_2}$ $\quad \underline{\gamma = u_0 - \frac{3}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2}$

$\underline{\beta = -3u_0 + 4u_1 - u_2}$

c- <u>système différentiel</u>

$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x + 4y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \end{cases}$ $\quad X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad X' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} X$

$\chi_A = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$

A est diagonalisable

U_1, U_2 vecteurs propres $\quad U_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad U_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

P matrice de passage de la base canonique à (U_1, U_2) $\quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ $\quad X' = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} X$ $\quad P^{-1} X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\boxed{P^{-1} X}}_{Y}$

$Y = P^{-1} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow Y' = P^{-1} X' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3b \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} a' - 2a = 0 \\ b' - 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = a(0) e^{2t} \\ b(t) = b(0) e^{3t} \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

donc $Y(t) = \begin{pmatrix} a(0) e^{2t} \\ b(0) e^{3t} \end{pmatrix}$ $\quad Y = P^{-1} X \Rightarrow X = PY \Rightarrow X(t) = P \begin{pmatrix} a(0) e^{2t} \\ b(0) e^{3t} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a(0) e^{2t} U_1 + b(0) e^{3t} U_2$ $\quad \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ X(t) = \alpha e^{2t} U_1 + \beta e^{3t} U_2$

Σ valeurs propres $=$ trace

soit A diagonalisable, $\exists \begin{cases} P \text{ inversible} \\ D \text{ diagonale} \end{cases} \ / \ A = P^{-1} D P$

$\chi_A = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$ a pr coeff en X^{n-1} : $a_{11} + \cdots + a_{nn} =$ trA

or, $\det A = \det D$

donc $\chi_A = \chi_D$

$\chi_D = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - X \end{vmatrix}$ a pr coeff en X^{n-1} : $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

et il y a unicité de la décomp. (coeff. égaux)