Espaces vectoriels normés

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Normes

1. E $\mathbb{K}$ ev, $N : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto N(x) \end{cases}$ est une norme $\iff \begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E, & N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x) \\ \forall x \in E, & N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ \forall (x,y) \in E^2, & N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \end{cases}$

notation : $N(x) = \|x\|$, $N_1(x) = \|x\|_1$

Pp 1) $N(0) = 0$ $\quad$ $\forall x \in E$, $N(0) = N(0x) = |0|\, N(x) = 0$

2) $\forall x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ $\quad$ $0 = N(x - x) = N(x + (-x)) \leqslant N(x) + N(-x) = N(x) + |-1|\, N(x)$

$0 \leqslant 2N(x) \Rightarrow N(x) \geqslant 0$

3) $\forall (x,y) \in E^2$, $N(x-y) \geqslant |N(x) - N(y)|$

$x = (x-y) + y$ $\qquad$ $y = (y-x) + x$

$N(x) \leqslant N(x-y) + N(y)$ $\qquad$ $N(y) \leqslant N(y-x) + N(x)$

$N(x) - N(y) \leqslant N(x-y)$ $\qquad$ $N(y) - N(x) \leqslant N(x-y)$

$\max\{N(x) - N(y), N(y) - N(x)\} \leqslant N(x-y)$

d'où $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$

exemples : * $E = \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$

$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$

* $E = C^0([0,1], \mathbb{K})$, $f : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto f(t) \end{cases}$

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ $\qquad$ $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$ $\qquad$ $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in [0,1]\}$

2. vecteurs unitaires

- $u \in E$, u unitaire $\iff \|u\| = 1$
- $x \in E$, $x \neq 0$, $\frac{1}{\|x\|} x$ est l'unique vecteur unitaire $\mathbb{R}^+$ colinéaire à x

3. boules

$x_0 \in E$, $r \geqslant 0$

boule ouverte de centre x_0, rayon r : $B(x_0, r) = \{ y \in E \,/\, \|x_0 - y\| < r \}$

fermée B_f $\qquad$ $\leqslant$

ex : $E = \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x_0 = (0,0) \\ r = 1 \end{cases}$ $\quad$ $B_1(0,1) = \{ y \,/\, \|y\|_1 < 1 \}$

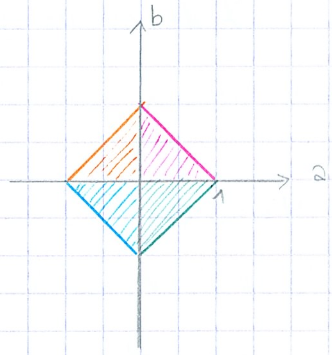
$y(a,b)$ $\qquad$ $|a| + |b| < 1$

$\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$: $a + b < 1$

$\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases}$: $a - b < 1$

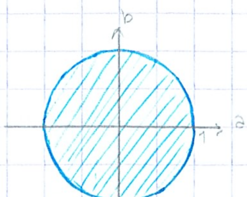
$\begin{cases} a \leqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$ $-a + b < 1$

$\begin{cases} a \leqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases}$: $-a - b < 1$



$B_2(0,1) = \{ y \,/\, \|y\|_2 < 1 \}$

$\sqrt{|a|^2 + |b|^2} < 1$



$B_\infty(0,1) = \{ y \,/\, \|y\|_\infty < 1 \}$

$\max\{|a|, |b|\} < 1$

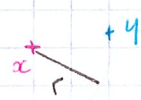
$\iff \begin{cases} |a| < 1 \\ |b| < 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -1 < b < 1 \end{cases}$

rem : ① $\forall (x,y) \in E^2$, $x \neq y \Longrightarrow \exists\, r > 0 \,/\, y \notin B(x, r)$

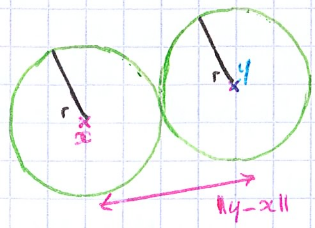
$y \neq x$, on pose $r = \|y - x\| > 0$

$\|y - x\| \geqslant r \Rightarrow y \notin B(x, r)$



boule ouverte : contour exclu

② $\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \Rightarrow \exists r>0 \,/\, B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$



on pose $r = \frac{1}{2}\|y-x\|$

$\forall z \in B(x,r)$, $\|z-y\| = \|z-x+x-y\|$

$\geq \big|\|z-x\| - \|x-y\|\big|$

$\geq \|x-y\| - \|z-x\|$

$\|z-x\| < r$ ⇢ $> 2r - r \;\; >r$

donc $z \notin B(y,r)$

③ si $\begin{cases} B_1 \text{ boule ouverte} \\ x \in B_1 \end{cases}$ alors, $\exists r'>0 \,/\, B(x,r') \subset B_1$

$\exists y \in E,\ \exists r \in \mathbb{R}^{+*} \,/\, B_1 = B(y,r)$

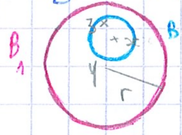
$x \in B_1 \Rightarrow B_1 \neq 0 \Rightarrow r>0$

on pose $r' = r - \|x-y\|$

$\forall z \in B(x,r')$, $\|z-y\| = \|z-x+x-y\| \leq \|z-x\| + \|x-y\|$

$< r' + \|x-y\|$

$< r - \|x-y\| + \|x-y\| \;\; < r$



donc $z \in B(y,r) = B_1$

④ si $\begin{cases} B_{1f} \text{ boule fermée} \\ x \notin B_{1f} \end{cases}$ alors, $\exists r'>0 \,/\, B(x,r') \cap B_{1f} = \emptyset$

$\exists y \in E,\ \exists r \in \mathbb{R}^+ \,/\, B_1 = B_f(y,r)$

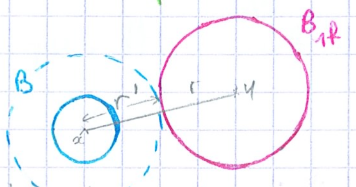
on pose $r' = \|x-y\| - r > 0$

$\forall z \in B(x,r')$, $\|y-z\| = \|y-x+x-z\| \geq \big|\|y-x\| - \|x-z\|\big|$

$\geq \|y-x\| - \|x-z\|$

$\geq \|y-x\| - r'$

$\geq \|y-x\| - \|x-y\| + r \geq$



si B_1 est ouverte, on peut prendre x sur le contour et ça ne marche plus

donc $z \notin B_1$

II Distance associée à une norme

1_ $X \neq \emptyset$ ensemble qcq, $d : \begin{vmatrix} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto d(x,y) \end{vmatrix}$ est une distance $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in X^2,\ d(x,y) = d(y,x)$

$\quad\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\forall (x,y,z) \in X^3,$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

(X,d) est un espace métrique

d distance sur X, $\forall (x,y) \in X^2,\ d(x,y) \geq 0$

$d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x)$

$0 \leq 2\, d(x,y)$ donc $d(x,y) \geq 0$

$\forall (x,y,z) \in X^3,\ d(x,z) \geq \big| d(x,y) - d(y,z) \big|$

$(E, \|\ \|)$ ev. normé, si $d : \begin{vmatrix} E^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \|x-y\| \end{vmatrix}$ alors, d est une distance sur E (associée à la norme $\|\ \|$)

rem : d associée à $\|\ \|$ vérifie : $\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$

$\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x+z, y+z) = d(x,y)$

2_ distance d'un point à une partie

(X,d) espace métrique, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $x \in X$,

$\{d(x,a),\ a \in A\}$: ss_ensemble de $\mathbb{R}$ non vide, minoré (par 0)

donc possède une borne inf.

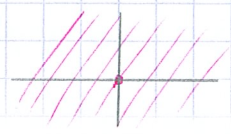
$d(x,A) = \inf\{d(x,a),\ a \in A\}$

rem : $*$ la borne inf est atteinte ou pas : $\exists a \in A \,/\, d(x,A) = d(x,a)$ (ou pas)

$*$ $x \in A \Longrightarrow d(x,A) = 0$ ⚠ pas de réciproque

ex : $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\ \|_2$ et de la distance associée

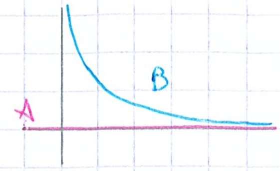
$A = E \setminus \{0\}$



$x = 0$ $\begin{cases} x \notin A \\ d(x,A) = 0 \end{cases}$

généralisation : A, B parties non vides de X,
$\{d(a,b),\ a \in A, b \in B\}$ partie non vide, minorée de $\mathbb{R}$
$d(A,B) = \inf\{d(a,b),\ a \in A,\ b \in B\}$

rem : $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A,B) = 0$ ⚠ pas de réciproque
$A = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$
$B = \{(x, \frac{1}{x}),\ x \in \mathbb{R}^*\}$



3 - norme associée à un produit scalaire

E ev réel, $\varphi : \begin{vmatrix} E^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto (x|y) \end{vmatrix}$ produit scalaire $\Leftrightarrow$ φ $\begin{vmatrix} \text{bilinéaire} \\ \text{symétrique} \\ \text{définie positive} \end{vmatrix}$

dans ce cas, $\|\ \| : \begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{(x|x)} \end{vmatrix}$ est une norme (norme euclidienne associée à un produit scal.)

rem : $E = \mathbb{R}^n$, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ norme eucli

$E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ $\quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2(t)\,dt\right)^{1/2}$ $\quad (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$

Pp 1) Cauchy-Schwarz
$\forall (x,y) \in E^2$, $|(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$

2) $\forall x \in E$, $\|x\| = \sup\{(x|y),\ y \in E,\ \|y\| = 1\}$

- $\forall y \in E$, $\|y\| = 1 \Rightarrow (x|y) \leqslant \|x\|$
donc $\|x\| \geqslant \sup\{(x|y),\ y \in E,\ \|y\| = 1\}$
- si $x = 0$, $\|x\| = 0 = \sup\{(x|y),\ y \in E,\ \|y\| = 1\}$
$x \neq 0$, $y_0 = \frac{1}{\|x\|}x$, $y_0 \in E$, $\|y_0\| = 1$

$(x|y_0) = \left(x \middle| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{\|x\|^2}{\|x\|}$

$\|x\| = (x|y_0) \leqslant \sup\{(x|y),\ y \in E, \|y\| = 1\}$
d'où $\|x\| = \sup\{(x|y),\ y \in E,\ \|y\| = 1\}$

4 - bornée

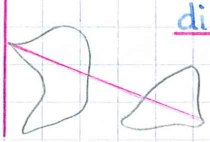
$(E, \|\ \|)$ ev normé. $A \subset E$ bornée $\Leftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall (x,y) \in A^2$, $\|x - y\| \leqslant M$ (1)

Pp) $A \subset E$ bornée $\Leftrightarrow$ $\exists B \,/\, A \subset B$ (2)
$\Leftrightarrow$ $\exists r \geqslant 0 \,/\, A \subset B_f(0,r)$ (3)
$\Leftrightarrow$ $\exists r \geqslant 0 \,/\, \forall x \in A$, $x \leqslant r$ (4)

si $A = \emptyset$, ttes les proposit° sont vraies, on suppose $A \neq \emptyset$
(3)$\Leftrightarrow$(4)
(1)$\Rightarrow$(2) : on fixe $x_0 \in A$, $\forall y \in A$, $\|x_0 - y\| \leqslant M$
$A \subset B_f(x_0, M)$
(2)$\Rightarrow$(3) : $\exists x_0 \in E, \exists r' \in \mathbb{R} \,/\, A \subset B(x_0, r') \subset B_f(x_0, r')$
on pose $r = \|x_0\| + r'$
$\forall z \in A$, $\|z\| = \|z - x_0 + x_0\| \leqslant \|z - x_0\| + \|x_0\|$
$\leqslant r' + \|x_0\| \leqslant r$
$z \in B_f(x_0, r)$
(3)$\Rightarrow$(1) : $\exists r \geqslant 0, \exists x_0 \in E \,/\, A \subset B_f(x_0, r)$
$\forall (x,y) \in A$, $\|x - y\| = \|x - x_0 + x_0 - y\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0 - y\|$
$\leqslant 2r$

A partie bornée non vide de E,
$\{\|x - y\|,\ (x,y) \in A^2\}$ partie non vide, majorée, de $\mathbb{R}$ donc possède une borne sup appelée diamètre

diamètre de $A = \sup\{\|x - y\|,\ (x,y) \in A^2\}$ (atteinte ou pas)



X ensemble non vide qcq, $(E, \|\ \|)$ ev normé, $f : X \longrightarrow E$
f est bornée $\Leftrightarrow$ $f(X)$ partie bornée de E
$\Leftrightarrow$ $\exists r \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in X$, $f(x) \leqslant r$

$\mathcal{B}(X,E)$: ensemble des applications bornées de X dans E

Pp 1) $\mathcal{B}(X,E)$ est un ss_ev de E^*

E^* est un ev

- $\mathcal{B}(X,E) \subset E^*$
- f = cste est bornée $\Rightarrow$ $\mathcal{B}(X,E) \neq \emptyset$
- $\forall (f,g) \in \mathcal{B}(X,E)^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\exists (\Pi_1,\Pi_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in X$, $\begin{cases} \|f(x)\| \leq \Pi_1 \\ \|g(x)\| \leq \Pi_2 \end{cases}$

$\forall x \in X$, $\|(\lambda f+\mu g)(x)\| = \|\lambda f(x) + \mu g(x)\| \leq |\lambda| \|f(x)\| + |\mu| \|g(x)\| \leq |\lambda| \Pi_1 + |\mu| \Pi_2$

2) $\begin{vmatrix} \mathcal{B}(X,E) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \sup\{\|f(x)\|, x \in X\} \end{vmatrix}$ est une norme

- $\forall f \in \mathcal{B}(X,E)$, $f(X)$ est bornée
  $\{\|f(x)\|, x \in X\}$ est majorée
  donc $\sup\{\|f(x)\|, x \in X\}$ existe

on pose $\|f\|_\infty = \sup\{f(x) / x \in X\}$

- $\forall f \in \mathcal{B}(X,E)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
  $\{\lambda f(x), x \in X\} = \lambda \{f(x) / x \in X\}$
  $\{\|\lambda f(x)\|, x \in X\} = \{|\lambda| \|f(x)\| / x \in X\} = |\lambda| \{\|f(x)\|, x \in X\}$
  $\sup\{\|\lambda f(x)\|, x \in X\} = |\lambda| \sup\{\|f(x)\|, x \in X\}$
  $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$
- $\forall f \in \mathcal{B}(X,E)$, $\|f\|_\infty = 0$ $\Rightarrow$ $\sup\{\|f(x)\|, x \in X\} = 0$
  $\Rightarrow$ $\forall x \in X$, $\|f(x)\| = 0$
  $\Rightarrow$ $\forall x \in X$, $f(x) = 0$
  $\Rightarrow$ $f = 0$
- $\forall (f,g) \in \mathcal{B}(X,E)^2$,
  $\forall x \in E$, $\|f(x)+g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ majorat° par qqc qui ne dépend pas de x
  donc $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

ex : $X = \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue
$\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ ev des suites réelles bornées
$\begin{vmatrix} \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\} \end{vmatrix}$ est une norme

5 _ applications lipschitziennes

$f : E \to F$, $k \in \mathbb{R}$, E,F ev normés
f est k_lipschitzienne $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x-y\|_E$
f est lipschitzienne $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}$ / f est k_lipschitzienne

ex : $f : \begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x\| \end{vmatrix}$ $\forall (x,y) \in E^2$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ donc f est 1_lips.

A partie non vide de E $f : \begin{vmatrix} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x,A) \end{vmatrix}$

$\forall (x,y) \in E^2 \forall a \in A$, $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$
$\Leftrightarrow$ $d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a) \leq d(y,A) \leq d(x,y)$
de m̂, $d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$
donc $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ f est 1_lips.

Pp 1) $\begin{cases} f : E \to F \quad k_1\text{-lips} \\ g : F \to G \quad k_2\text{-lips} \end{cases}$ alors $g \circ f$ est $k_1 k_2$ – lips

$\forall (x,y) \in E^2$, $\|g \circ f(x) - g \circ f(y)\| = \|g[f(x)] - g[f(y)]\| \leq k_2 \|f(x) - f(y)\|$
$\leq k_2 k_1 \|x-y\|$

2) $\begin{cases} A \text{ partie bornée de } E \\ f : E \to F \text{ lips} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $f(A)$ est une partie bornée de E

A bornée $\Rightarrow$ $\exists x_0 \in E$, $\exists r > 0$ / $A \subset B_E(x_0, r)$
$\forall x \in A$, $\|x - x_0\| \leq r$
$\|f(x) - f(x_0)\| \leq k \|x - x_0\| \leq kr$
$f(x) \in B_F(f(x_0), kr)$ d'où $f(A) \subset B_f(f(x_0), kr)$

6 _ isométries

f est une isométrie $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\|_F = \|x-y\|_E$

Pp 1) Toute isométrie est 1-lips
2) injective

$\forall (x,y)\in E^2,\ x\neq y \Rightarrow \|x-y\|>0 \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|>0 \Rightarrow f(x)\neq f(y)$

7- construction de normes

a. norme induite

$(E, \|\ \|)$ ev normé, F ss-ev de E

norme induite par la norme de E : $\left| \begin{array}{l} F \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x\|_E \end{array} \right.$

rem : A partie non vide de E, $\left| \begin{array}{l} A\times A \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \|x-y\| \end{array} \right.$ est une distance (distance induite par la norme de E sur A)

b. espaces produits

$n\in\mathbb{N}$, $(E_1, \|\ \|_1), (E_2,\|\ \|_2), \dots, (E_n, \|\ \|_n)$ n ev normés

$E = \prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$

$\left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2, \dots, \|x_n\|_n\} = \|(x_1,\dots,x_n)\| \end{array} \right.$ est une norme sur E (norme produit)

rem : $p_1 : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E_1 \\ (x_1,\dots,x_n) \longmapsto x_1 \end{array} \right.$ est 1 lips

$\forall (x,y)\in E^2,\ x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)$

$\|x-y\| = \max\{\|x_1-y_1\|_1, \dots, \|x_n-y_n\|_n\} \geq \|x_1-y_1\|_1 \geq \|p_1(x)-p_1(y)\|$

8. suites dans un ev normé

u suite d'éléments de E ($u\in E^{\mathbb{N}}$), $\ell \in E$,

- u converge vers ℓ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow \|u_n-\ell\| < \varepsilon$ (1)
  - $\Leftrightarrow$ ………… $\Rightarrow \|u_n-\ell\| \leq \varepsilon$ (2)
  - $\Leftrightarrow$ ………… $\Rightarrow u_n \in B(\ell,\varepsilon)$ (3)
  - $\Leftrightarrow$ ………… $\Rightarrow u_n \in B_f(\ell,\varepsilon)$ (4)

- u converge $\Leftrightarrow$ $\exists \ell\in E$ / u converge vers ℓ
  u diverge $\Leftrightarrow$ u ne converge pas :
  $\forall \ell\in E, \exists\varepsilon>0 / \forall n_0\in\mathbb{N}, \exists n\in\mathbb{N} / n\geq n_0$ et $\|u_n-\ell\|\geq\varepsilon$

Pp 1) unicité : si u converge vers ℓ et ℓ', alors $\ell=\ell'$

supposons $\ell'\neq\ell$, $\exists\varepsilon>0 / B(\ell,\varepsilon)\cap B(\ell',\varepsilon)=\emptyset$

$\exists n_0\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow u_n\in B(\ell,\varepsilon)$
$\exists n_1\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_1 \Rightarrow u_n\in B(\ell',\varepsilon)$ $\Big\}$ $n_2=\max\{n_0,n_1\}$

$u_{n_2}\in B(\ell,\varepsilon)\cap B(\ell',\varepsilon)=\emptyset$

alors, ℓ est la limite de u : $\lim u = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

2) toute suite convergente est bornée

$\lim u = \ell$, $\varepsilon=1$

$\exists n_0\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow u_n\in B(\ell,1)$ * $\Rightarrow \|u_n\|\leq\|\ell\|+1$

* $\Rightarrow \|u_n-\ell\|<1$
$\Rightarrow |\|u_n\|-\|\ell\||<1$
$\Rightarrow \|u_n\|-\|\ell\|<1$

$M=\max\{\underbrace{\|u_0\|, \|u_1\|, \dots, \|u_{n_0}\|}_{\text{ensemble fini de } n_0+1 \text{ éléments : on peut majorer } u_n \text{ pour } 0\leq n\leq n_0}, \underbrace{\|\ell\|+1}_{\text{majoration due à la boule}}\}$

$\forall n\in\mathbb{N}, \|u_n\|\leq M$

soient $(u,v)\in(E^{\mathbb{N}})^2$, $\lambda\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(\ell,\ell')\in E^2$, $\alpha\in\mathbb{K}$,

si $\begin{cases} u \text{ converge vers } \ell \\ v \text{ ………… } \ell' \end{cases}$ alors $u+v$ converge vers $\ell+\ell'$

si λ ………… α alors λu converge vers $\alpha\ell$

si u converge vers ℓ alors $\|u\|=(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$
car $|\|u_n\|-\|\ell\|| < \|u_n-\ell\|$

$\|\ \|$ car "2 fois" u

$\begin{cases} u \text{ converge vers } 0 \\ u \text{ bornée} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\|u\|$ converge vers 0

$\begin{cases} \lambda \text{ converge vers } 0 \\ u \text{ bornée} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ λu ………… 0

$\begin{cases} u \text{ converge vers } 0 \\ \lambda \text{ bornée} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ λu ………… 0

$\ell^\infty(E)$: ensemble des suites bornées, d'éléments de E.
ss-ev de $E^{\mathbb{N}}$

$\|\ \|_\infty : \begin{array}{l} \ell^\infty(E) \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \sup\{\|u_n\|, n\in\mathbb{N}\}\end{array}$ est définie et c'est une norme

L'ensemble des suites convergentes est un ss-ev de $\ell^\infty(E)$.

comparaison de 2 normes

N et N' 2 normes sur E

toute suite convergeant vers 0 pour N converge vers 0 pour N' $\iff \exists \alpha\in\mathbb{R}^{+*} / N' \leqslant \alpha N$

$\Leftarrow$ soit $u\in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 pour N :

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant n_0 \Rightarrow N(u_n)<\varepsilon$

$\Rightarrow \alpha N(u_n) < \alpha\varepsilon$

$\Rightarrow N'(u_n) < \alpha\varepsilon$

$\Rightarrow$ contraposée : il n'existe pas $\alpha\in\mathbb{R}^{+*} / N'\leqslant\alpha N$:

$\forall \alpha\in\mathbb{R}^{+*}, \exists x\in E / N'(x) > \alpha N(x)$

$n>0, \alpha=n^2, \exists x_n\in E / N'(x_n) > n^2 N(x_n) > 0$

je pose $u_n = \dfrac{1}{n N(x_n)} x_n$

$N(u_n) = \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$ donc u converge vers 0 pour N

$N'(u_n) = \dfrac{N'(x_n)}{nN(x_n)} > \dfrac{n^2}{n} > n$ donc u n'est pas bornée pour N' donc ne converge pas pour N'

N et équivalente à N' $\iff \exists(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^{+*})^2 / \beta N\leqslant N' \leqslant \alpha N$

Pp 1) relation d'équivalence : $N\sim N'$

- $1N \leqslant N \leqslant 1N$
- $\beta N\leqslant N'\leqslant\alpha N \Rightarrow \frac{1}{\alpha}N' \leqslant N \leqslant \frac{1}{\beta}N'$
- $\begin{cases}\beta N\leqslant N'\leqslant\alpha N\\ \beta' N'\leqslant N''\leqslant\alpha' N'\end{cases} \Rightarrow \beta\beta' N \leqslant N'' \leqslant \alpha\alpha' N$

2) $N\sim N' \iff$ toute suite convergeant vers 0 pour une des normes converge vers 0 pour l'autre

3) $\beta N\leqslant N'\leqslant\alpha N \iff B_{fN'}(0,\beta) \subset B_{fN}(0,1) \subset B_{fN'}(0,\alpha)$

$\Rightarrow \forall x\in E$, $x\in B_{fN'}(0,\beta) \Rightarrow N'(x)\leqslant\beta \Rightarrow N(x)\leqslant 1 \Rightarrow x\in B_{fN}(0,1)$

$x\in B_{fN}(0,1) \Rightarrow N(x)\leqslant 1 \Rightarrow \alpha N(x)\leqslant\alpha \Rightarrow N'(x)\leqslant\alpha$

$\Rightarrow x\in B_{fN'}(0,\alpha)$

$\Leftarrow \forall x\in E$, si $x=0$, alors, $\beta N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \alpha N(x)$

si $x\neq 0$, $\dfrac{\beta}{N'(x)}x \in B_{fN'}(0,\beta)$ donc $\dfrac{\beta}{N'(x)}x\in B_{fN}(0,1)$

donc $N\left(\dfrac{\beta}{N'(x)}x\right)\leqslant 1 \iff \dfrac{\beta N(x)}{N'(x)}\leqslant 1 \iff \beta N(x)\leqslant N'(x)$

de m̂, $N'(x)\leqslant\alpha N(x)$

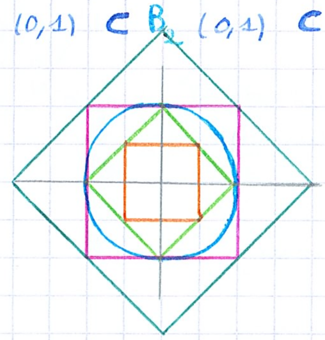
ex $E=\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$

$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$

Ces 3 normes sont-elles équivalentes ? (x,y scalaires)

on a $B_1(0,\frac{1}{2}) \subset B_1(0,1) \subset B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1) \subset B_1(0,2)$



$\max\{x^2,y^2\} \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\max\{x^2,y^2\}$

$\iff \max\{|x|,|y|\} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{2}\max\{|x|,|y|\}$

et $\max\{|x|,|y|\} \leqslant |x|+|y| \leqslant 2\max\{|x|,|y|\}$

$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty$: $\|\ \|_\infty \sim \|\ \|_1$

$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|(x,y)\|_\infty$: $\|\ \|_\infty \sim \|\ \|_2$

valeur d'adhérence d'une suite

λ valeur d'adhérence de u $\iff \exists$ une suite extraite de u convergeant vers λ

$\iff \forall\varepsilon>0, \forall n_0\in\mathbb{N}, \exists n_1\in\mathbb{N} / n_1\geqslant n_0$ et $\|u_{n_1}-\lambda\|<\varepsilon$

$\iff$ ……………… $u_{n_1}\in \overset{\circ}{B}(\lambda,\varepsilon)$

th si u converge vers ℓ alors ℓ est l'unique valeur d'adhérence de u

corollaire (contraposée) si u a 2 valeurs d'adhérence alors u diverge

Comparaison de 2 suites

$\begin{cases}(u,v)\in (E^{\mathbb{N}})^2 \\ \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\end{cases}$ u est **dominée** par α si $\|u\|$ est dominée par α : $\exists K\in\mathbb{R}, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow \|u_n\|\leq K|\alpha_n|$

u est **négligeable** devant α si $\|u\|$ est négligeable devant α : $\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow \|u_n\|\leq \varepsilon|\alpha_n|$

u est **équivalente** à v si $u-v$ est négligeable devant u.
↳ relat° d'équivalence

notation : $u\in O(\alpha)$ $\quad u_n = O(\alpha_n)$ $\quad u = O(\alpha)$
$u\in o(\alpha)$ $\quad u_n = o(\alpha_n)$ $\quad u = o(\alpha)$
$u \sim v$

Pp 1) $u\in O(\alpha) \iff \exists \begin{cases} w \text{ suite bornée} \\ n_0\in\mathbb{N}\end{cases} / \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow u_n = \alpha_n w_n$

$\Leftarrow$ soit $K\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}, |w_n|\leq K$
alors, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow \|u_n\| = |\alpha_n|\,\|w_n\| \leq K|\alpha_n|$
donc $u\in O(\alpha)$

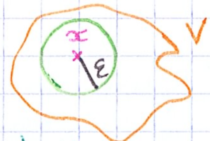
$\Rightarrow$ $\exists n_0\in\mathbb{N}, \exists K\in\mathbb{R} / \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow \|u_n\|\leq K|\alpha_n|$
$\forall n\in\mathbb{N}$, je pose $w_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n<n_0 \\ 0 & \text{si } n\geq n_0 \text{ et } \alpha_n = 0 \quad (u_n=0) \\ \dfrac{1}{\alpha_n}u_n & \text{si } n\geq n_0 \text{ et } \alpha_n\neq 0\end{cases}$

2) idem avec $u\in o(\alpha)$, rien avec $\sim$

9_ topologie d'un e v normé

a_ voisinage

$\begin{cases} x\in E \\ V\subset E\end{cases}$ V voisinage de x $\iff \exists\, \varepsilon>0 / B(x,\varepsilon)\subset V$



notation : $\mathcal{V}_x$: ensemble des voisinages de x

Pp 1) $\mathcal{V}_x$ est stable par réunion
2) $\mathcal{V}_x$ est stable par intersection finie

1) $I\neq\emptyset$, $\forall i\in I$, $V_i\in\mathcal{V}_x$
soit $i_0\in I$, $V_{i_0}\in\mathcal{V}_x$: $\exists\,\varepsilon>0 / B(x,\varepsilon)\subset V_{i_0}$
donc $B(x,\varepsilon)\subset \bigcup_{i\in I} V_i$ — vrai pour tous les i
donc $\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{V}_x$ ← $\bigcup_{i\in I} V_i$ voisinage de x

2) I fini, $I=\{1,\dots,n\}$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $V_i\in\mathcal{V}_x$:
$\exists\,\varepsilon_i>0 / B(x,\varepsilon_i)\subset V_i$
soit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ alors $\varepsilon>0$
et $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $\varepsilon\leq\varepsilon_i$ donc $B(x,\varepsilon)\subset B(x,\varepsilon_i)\subset V_i$
donc $B(x,\varepsilon)\subset \bigcap_{1\leq i\leq n} V_i$

rem : $E=\mathbb{R}$, $\|\ \| = |\ |$
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $V_n =]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$, $V_n\in\mathcal{V}_0$ or, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n = \{0\} \notin \mathcal{V}_0$

3) $\forall x\in E, \forall r>0$, $\begin{cases} B(x,r)\in\mathcal{V}_x \\ B_f(x,r)\in\mathcal{V}_x\end{cases}$

b_ ouvert

O partie de E, O un ouvert $\iff \forall x\in O$, $O\in\mathcal{V}_x$
$\iff$ O est un voisinage de chacun de ses pts :
$\forall x\in O, \exists\,\varepsilon>0 / B(x,\varepsilon)\subset O$

Pp 1) $\emptyset$ est un ouvert
2) E est un ouvert
3) Toute réunion d'ouverts est un ouvert

$I \neq \emptyset$ ensemble qcq
$\forall i \in I$, O_i ouvert de E, $\Omega = \bigcup_{i\in I} O_i$
$\forall x \in \Omega$, $\exists i_0 \in I / x \in O_{i_0} \in \mathcal{V}_x$: $\exists \varepsilon>0 / B(x,\varepsilon) \subset O_{i_0}$
$B(x,\varepsilon) \subset \bigcup_{i\in I} O_i = \Omega$; $B(x,\varepsilon)\subset\Omega \Leftrightarrow \Omega$ voisinage de x
donc $\Omega \in \mathcal{V}_x$

4) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert
$I=\{1,\dots,n\}$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, O_i ouvert de E, $\Omega=\bigcap_{1\le i\le n} O_i$
$\forall x\in\Omega$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $x\in O_i \in \mathcal{V}_x$
donc $\bigcap_{1\le i\le n} O_i \in \mathcal{V}_x$ donc $\Omega\in\mathcal{V}_x$

notation : $\mathcal{O}$: ensemble des ouverts de E

→ une boule ouverte est un ouvert :
$\forall x\in E, \forall r>0$, $B(x,r)\in\mathcal{O}$

③ p. 68

$\mathcal{O}$ ouvert $\Rightarrow \forall y\in B(x,r)$, $\exists r'>0 / B(y,r')\subset B(x,r)$
donc $B(x,r)$ est une boule ouverte.

C - fermé

F partie de E, F un fermé $\Longleftrightarrow$ $E\setminus F = C_E F$ un ouvert

Pp 1) $\emptyset$ est un fermé
2) E est un fermé
3) Toute intersection de fermés est un fermé
$I\neq\emptyset$, $\forall i\in I$, F_i fermé, $C_E F_i = E\setminus F_i \in \mathcal{O}$
$C_E \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} \underbrace{C_E F_i}_{\text{ouverts}} \in \mathcal{O}$ donc $\bigcap_{i\in I}F_i$ est fermé
4) Toute réunion finie de fermés est un fermé
$I=\{1,\dots,n\}$, $\forall i\in I$, F_i fermé
$C_E \bigcup_{1\le i\le n} F_i = \bigcap_{1\le i\le n}\underbrace{C_E F_i}_{\text{ouverts}}\in\mathcal{O}$ donc $\bigcup_{1\le i\le n}F_i$ est fermé

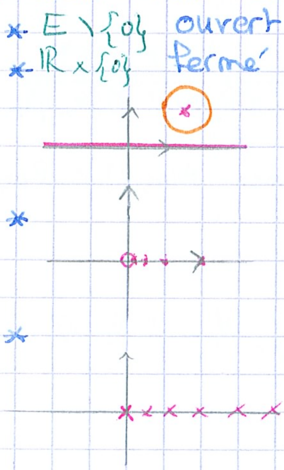
→ une boule fermée est un fermé :
$\forall x\in E, \forall r>0$, $B_f(x,r)$ fermé

④ p. 68

$\forall y\in E$, $y\notin B_f(x,r)$, $\exists r'>0 / B(y,r')\cap B_f(x,r)=\emptyset$
$B(y,r')\subset C_E B_f(x,r)$
donc $C_E B_f(x,r)$ est un ouvert
donc $B_f(x,r)$ est un fermé

→ $\{x\}$ est un fermé
$\forall y\neq x$, $B(y,\|x-y\|)\cap\{x\}=\emptyset$
$B(y,\|x-y\|)\subset C_E\{x\}$ $\quad C_E\{x\}$ ouvert
$\forall y\in C_E\{x\}$, $\exists \|x-y\|>0 / B(y,\|x-y\|)\subset C_E\{x\}$

ex : $E=\mathbb{R}^2$ muni de $\|\ \|_2$
* $E\setminus\{0\}$ ouvert
* $\mathbb{R}\times\{0\}$ fermé

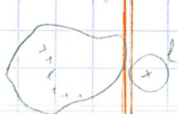


$X=\{(\frac{1}{n},0), n\in\mathbb{N}^*\}$ $\quad 0\notin X$ $\quad$ $(\exists\varepsilon>0, B(0,\varepsilon)\cap X\neq\emptyset$ non fermé
$(\forall\varepsilon>0, B((1,0),\varepsilon)\not\subset X$ non ouvert

* X cv vers $(0,0)\notin X$
* X ouvert : $\exists \varepsilon>0 / B\subset X$ $\quad$ X non ouvert : $\forall\varepsilon>0, B\not\subset X$

$Y=\{(\frac{1}{n},0), n\in\mathbb{N}^*\}\cup\{(0,0)\}$
fermé car $0\in X$

Pp) F ss-ensemble de E fermé $\Longleftrightarrow$ toute suite d'élts de F qui converge dans E a sa limite dans F



$\Rightarrow$ on suppose que F est fermé
soit $u\in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers l :
$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall n\in\mathbb{N}, n\ge n_0 \Rightarrow u_n\in B(l,\varepsilon)$
si $l\notin F$, $l\in C_E F$, un ouvert

$\exists\, \varepsilon>0 \;/\; B(\ell,\varepsilon) \subset C_E F$ donc $B(\ell,\varepsilon)\cap F=\emptyset$ $\quad u_n \in F^{\mathbb{N}}$ $\quad F$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow u_n \in B(\ell,\varepsilon)\cap F=\emptyset$

impossible donc $\ell \in F$

contraposée de $B\Rightarrow A$: non $A \Rightarrow$ non B

$\Leftarrow$ On suppose que F n'est pas fermé

$C_E F$ n'est pas ouvert

$\exists\, \ell \in C_E F \;/\; C_E F \notin \mathcal{V}_\ell$

$\forall \varepsilon>0,\ B(\ell,\varepsilon) \not\subset C_E F$

$B(\ell,\varepsilon)\cap F \neq \emptyset$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \varepsilon=\frac{1}{n},\ B(\ell,\frac{1}{n})\cap F\neq\emptyset$ soit $u_n \in B(\ell,\frac{1}{n})\cap F$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'élts de F

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_n-\ell\| < \frac{1}{n}$ donc u converge vers ℓ, or $\ell\notin F$ $\quad \ell\in C_E F$

donc u n'a pas sa limite dans F

d- topologie relative

A partie non vide de E

$x\in A$, U ss-ensemble de A,

U voisinage de x pour la topologie relative de A

$\Leftrightarrow \exists\, V$ voisinage de x dans E / $U=V\cap A$

$\mathcal{V}_{A,x}=\{V\cap A,\ V\in\mathcal{V}_x\}$: ensemble des voisinages de x dans A

$\Omega\subset A$, Ω un ouvert pour la topologie relative de A

$\Leftrightarrow \exists\, O$ ouvert de E / $\Omega=O\cap A$

$\mathcal{O}_A=\{O\cap A,\ O\in\mathcal{O}\}$

$G\subset A$, G un fermé pour la topologie relative de A

$\Leftrightarrow \exists\, F$ fermé de E / $G=F\cap A$

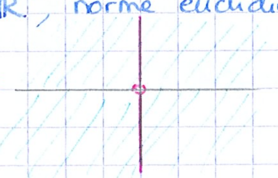
ex : * $E=\mathbb{R}$, pour $|\ |$, $A=[0,1[$ $\qquad [0,\frac{1}{2}]=[0,1[\,\cap\,[0,\frac{1}{2}]$ fermé

(relatif à A)

$[0,\frac{1}{2}[\,=[0,1[\,\cap\,]-1,\frac{1}{2}[$ ouvert

* $E=\mathbb{R}^2$, norme euclidienne, $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^2$ privé de l'axe $x'Ox$

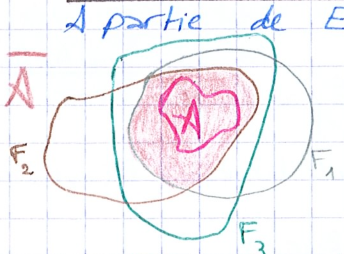


$\{(0,y),\ y\in\mathbb{R}^*\}=A\cap\{(0,y),\ y\in\mathbb{R}\}$ fermé

e- adhérence d'une partie

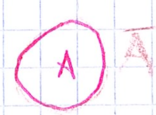
A partie de E,

$\bar{A}$: adhérence de A : intersection de tous les fermés de E qui contiennent A



$\bar{A}=\bigcap\limits_{\substack{F \text{ fermé} \\ A\subset F}} F$

$\hookrightarrow$ il y a une infinité de fermés donc $\bar{A}$ est "collé" à A.



Pp 1) $\bar{A}$ est fermé (intersection qcq de fermés)

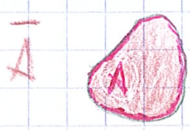
2) $A\subset\bar{A}$

3) pour tout fermé F de E, si $A\subset F$ alors $\bar{A}\subset F$

$\longrightarrow$ $\bar{A}$ est le plus petit fermé de E qui contient A

caractérisation :

① $\forall x\in E,\quad x\in\bar{A} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$



$\Rightarrow$ si $x\in\bar{A}$, supposons : $\exists\,\varepsilon>0,\ B(x,\varepsilon)\cap A=\emptyset$

$A\subset C_E B(x,\varepsilon)$: fermé

$\Rightarrow \bar{A}\subset C_E B(x,\varepsilon)$ (d'après 3), $\bar{A}$ le plus petit)

$\Rightarrow x\notin\bar{A}$ impossible donc $\forall\varepsilon>0,\ B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$

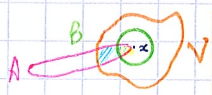
contraposée $\Leftarrow$ si $x\notin\bar{A}$, $\exists\, F$ fermé de E, $x\notin F$, $A\subset F$ $\quad (F=\bar{A})$

alors, $C_E F$: ouvert qui contient x

donc $\exists\,\varepsilon>0 \;/\; B(x,\varepsilon)\subset C_E F$

$\exists \varepsilon > 0 \,/\, B(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$ donc $\exists \varepsilon>0 \,/\, B(x,\varepsilon)\cap A = \emptyset$ d'où $\forall \varepsilon>0, B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$
$\Rightarrow x \in \bar{A}$

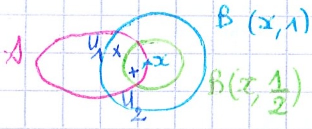
② $\forall x \in E, \quad x \in \bar{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}_x, \quad V \cap A \neq \emptyset$



$\Rightarrow$ si $x \in \bar{A}$, $\exists \varepsilon > 0 \,/\, B(x,\varepsilon) \subset V$
or, $B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$
donc $V \cap A \neq \emptyset$

$\Leftarrow$ si $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $V\cap A \neq \emptyset$, on a $\forall \varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon) \in \mathcal{V}_x$
donc $B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$

③ caractérisation séquentielle :
$\forall x \in E, \quad x \in \bar{A} \iff \exists$ une suite d'él^{ts} de A qui converge vers x



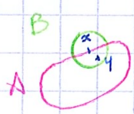
$\Rightarrow$ si $x \in \bar{A}$, alors, $\forall \varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, je pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\quad B(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$
$u_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap A$
donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'él^{ts} de A
et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n - x\| < \frac{1}{n} \longrightarrow 0$
donc u converge vers x

$\Leftarrow$ si $x \notin \bar{A}$, alors $\exists \varepsilon>0 \,/\, B(x,\varepsilon)\cap A = \emptyset$
soit u une suite d'él^{ts} de A qui converge vers y,
avec le m̂ ε : $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - y\| < \varepsilon$

$(y \in \bar{A})$ (contraposée)

$\Rightarrow \|x - u_n + y - x\| < \varepsilon$
$\Rightarrow \big|\|x-u_n\| - \|y-x\|\big| < \varepsilon$
$\Rightarrow \|x-u_n\| - \varepsilon < \|y - x\|$
$\Rightarrow 0 < \|y-x\| \Rightarrow x \neq y$
$u_n \notin B(x,\varepsilon)$

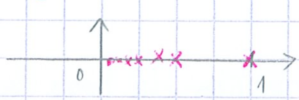
④ $x \in \bar{A} \iff d(x,A) = 0$



$\Rightarrow$ si $x \in \bar{A}$, alors $\forall \varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$
$\forall \varepsilon>0$, $\exists y \in B(x,\varepsilon)\cap A$
donc $d(x,A) \leq \|y-x\| < \varepsilon$
donc $d(x,A) = 0$

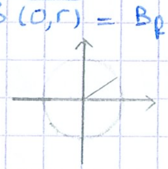
$\Leftarrow$ si $d(x,A) = 0$, alors $\forall \varepsilon>0$, $\exists y \in A \,/\, \|x-y\| < \varepsilon$
$B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$
donc $x \in \bar{A}$

ex : * $E = \mathbb{R}$, $|\ |$, $A = [0,1[$ alors $\bar{A} = [0,1]$
* $E = \mathbb{R}^2$, $\|\ \|_2$, $A = \{(\frac{1}{n},0), n \in \mathbb{N}^*\}$



$0 \in \bar{A}$ ($\exists$ une suite d'él^{ts} de A qui converge vers 0)
donc $A \cup \{0\} \subset \bar{A}$
or, $A \cup \{0\}$ est fermé donc $\bar{A} \subset A\cup\{0\}$
d'où $\bar{A} = A \cup \{0\}$

* $\overline{B(0,r)} = B_f(0,r)$



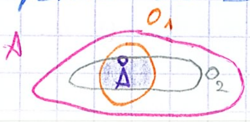
$\forall x \in B_f$, si $x \neq 0$, $\forall \varepsilon>0$, $x - \frac{\varepsilon}{2\|x\|}x = y \in B(0,r)$
$\|x-y\| = \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad y \in B(0,r)\cap B(x,\varepsilon)$
si $x = 0$, $x \in B(0,r)$
donc $B_f(0,r) \subset \overline{B(0,r)}$
or, $B(0,r) \subset B_f(0,r) \subset \overline{B(0,r)}$
et $B_f(0,r)$ fermé donc $B_f(0,r) = \overline{B(0,r)}$

D partie de E, D dense dans $E \iff \bar{D} = E$
$\rightarrow \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$
$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x - \sqrt{2}$
$v_n = u_n + \sqrt{2}$

f- intérieur d'une partie

A partie de E,

$\mathring{A}$: intérieur de A : réunion de tous les ouverts inclus dans A
$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} O$$



Pp 1) $\mathring{A}$ est ouvert (réunion qcq d'ouverts)

2) $\mathring{A} \subset A$

3) pour tout ouvert O de E, si $O \subset A$ alors $O \subset \mathring{A}$

$\longrightarrow$ $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A

caractérisation :

① $\forall x \in E, \quad x \in \mathring{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}_x$

$\Rightarrow$ $x \in \mathring{A} \rightarrow \exists$ un ouvert O / $\begin{cases} x \in O \\ O \subset A \end{cases}$

$\Rightarrow \exists \ \varepsilon > 0 \ / \ x \in B(x, \varepsilon) \subset O \subset A$

$\Rightarrow A \in \mathcal{V}_x$

$\Leftarrow$ $A \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \exists \ \varepsilon > 0 \ / \ B(x, \varepsilon) \subset A$

$\Rightarrow \exists \ \varepsilon > 0 / \ x \in B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} O$

$\Rightarrow x \in \mathring{A}$

② $\forall x \in E, \quad x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists \ \varepsilon > 0 \ / \ B(x, \varepsilon) \subset A$

ex: $* E = \mathbb{R}, \ |\,|, \quad A = [0, 1[$ alors $\mathring{A} =]0, 1[$

$* \quad \overset{\circ}{\overline{B_f(0,r)}} = B(0,r) \qquad \overset{\circ}{\overline{B_f(0,0)}} = \emptyset$

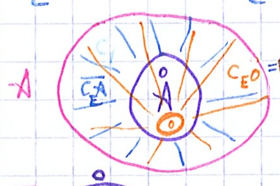
Pp 1) $\mathring{A} = A \Leftrightarrow A$ ouvert

$\overline{A} = A \Leftrightarrow A$ fermé

2) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

3) $C_E(\mathring{A}) = \overline{C_E A} \qquad (E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A})$



$C_E \mathring{A} = C_E \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} O = \bigcap_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} C_E O = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ C_E A \subset F}} F = \overline{C_E A}$

4) $C_E \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{C_E A}} \qquad (E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}})$

$\overline{A} = \{x \in E / \forall r > 0, \ B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$

$\overbrace{\hspace{4em}}^{\text{négat° de}}$

$x \in C_E \overline{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \ / \ B(x, r) \cap A = \emptyset$

$\Leftrightarrow \exists r > 0 / \ B(x, r) \subset C_E A$

$\Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{C_E A}}$

5) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

$\mathring{A} \subset A \subset B$ donc $\underset{\text{ouvert}}{\mathring{A}} \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ (Pp 3))

$A \subset B \subset \overline{B}$ donc $\underset{\text{fermé}}{\overline{A}} \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ (Pp 3))

6) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

- $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \Rightarrow \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \\ A \cap B \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$
- récip. $\forall x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\begin{cases} x \in \mathring{A} \\ x \in \mathring{B} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \exists \ r_1 > 0 \ / \ B(x, r_1) \subset A \\ \exists \ r_2 > 0 \ / \ B(x, r_2) \subset B \end{cases}$

pour $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$, $\begin{cases} B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset A \\ B(x, r) \subset B(x, r_2) \subset B \end{cases}$

$\Rightarrow B(x, r) \subset A \cap B \Rightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = C_E(C_E \overline{A \cup B}) = C_E \overset{\circ}{\widehat{C_E A \cup B}} = C_E \overset{\circ}{\widehat{C_E A \cap C_E B}}$

$= C_E\left(\overset{\circ}{\widehat{C_E A}} \cap \overset{\circ}{\widehat{C_E B}}\right) = C_E \overset{\circ}{\widehat{C_E A}} \cup C_E \overset{\circ}{\widehat{C_E B}}$

$= \overline{C_E C_E A} \cup \overline{C_E C_E B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathring{A} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \\ \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \end{cases} \rightarrow \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

il n'y a qu'inclusion, par ex.

$E = \mathbb{R}$, $\begin{cases} A = \mathbb{Q} \\ B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ $\begin{cases} \mathring{A} = \emptyset \\ \mathring{B} = \emptyset \end{cases}$ $\mathring{A} \cup \mathring{B} = \emptyset$ mais $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{cases} \rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

9 - Frontières

A partie de E $(\mathring{A} \subset A \subset \bar{A})$

$A \setminus B = C_A B = A \cap C_E B$

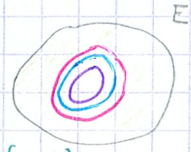
$Fr(A)$: frontière de A $\qquad Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = C_{\bar{A}} \mathring{A} = \bar{A} \cap C_E \mathring{A} = \bar{A} \cap \overline{C_E A}$

Pp 1) $Fr(A)$ est fermé

2) $\bar{A} = \mathring{A} \cup Fr(A) = A \cup Fr(A)$

$\mathring{A} = \bar{A} \setminus Fr(A) = A \setminus Fr(A)$

$E = \mathring{A} \cup Fr(A) \cup \overline{C_E A}$ $\quad C_E \bar{A}$



ex : $E = \mathbb{R}$, $|\,|$, $\quad Fr([0,1]) = [0,1] \setminus]0,1[= \{0,1\}$

$Fr(\mathbb{Q}) = \bar{\mathbb{Q}} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \emptyset^* = \mathbb{R}$ $\qquad \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

E ev normé $\quad Fr(B(0,1)) = B_f(0,1) \setminus B(0,1) = \{x \in E \,/\, \|x\| = 1\}$

sphère $S(0,1)$ (pour la norme 1)

10 - étude locale d'une application (limite, continuités)

E, F ev normés, X partie non vide de E, $f : X \to F$

a - limite

$x_0 \in \bar{X}$, $\ell \in F$, $\quad f$ admet la limite ℓ en x_0

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall x \in X, \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, f(B(x_0, \eta) \cap X) \subset B(\ell, \varepsilon)$

Pp) si f admet pour limite ℓ et ℓ' en x_0, alors $\ell = \ell'$

$(\forall \varepsilon > 0, B(\ell, \varepsilon) \cap B(\ell', \varepsilon) \neq \emptyset) \Rightarrow \ell = \ell'$

ℓ est **la** limite de f en $x_0 \in \bar{X}$

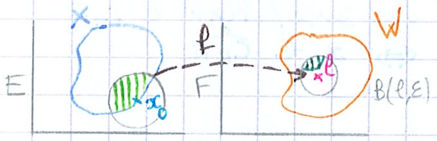
Pp 1) si f admet une limite en x_0, alors f est localement bornée au voisinage de x_0

si $\lim_{x_0} f = \ell$,
$\varepsilon = 1$, $\quad \exists \eta > 0 \,/\, f(B(x_0, \eta) \cap X) \subset B(\ell, 1)$

$f(B(x_0, \eta) \cap X)$ est bornée

or $B(x_0, \eta) \cap X$ est un voisinage de x pour la topologie de X

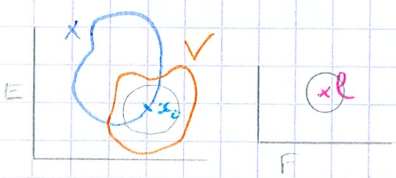
2) f admet la limite ℓ en $x_0 \Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_{x_0} \,/\, f(V \cap X) \subset W$



$\Rightarrow \forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists \varepsilon > 0 \,/\, B(\ell, \varepsilon) \subset W$

$\exists \eta > 0 \,/\, f(B(x_0, \eta) \cap X) \subset B(\ell, \varepsilon)$

soit $V = B(x_0, \eta) \subset \mathcal{V}_{x_0}$



$\Leftarrow \forall \varepsilon > 0, B(\ell, \varepsilon) \in \mathcal{V}_\ell$

$\exists V \in \mathcal{V}_{x_0} \,/\, f(V \cap X) \subset B(\ell, \varepsilon)$

$\exists \eta > 0 \,/\, B(x_0, \eta) \subset V$

$f(B(x_0, \eta) \cap X) \subset f(V \cap X) \subset B(\ell, \varepsilon) \subset W$

3) f admet la limite ℓ en $x_0 \Leftrightarrow$ pour toute suite u d'élts de X qui converge vers x_0, la suite $f \circ u$ converge vers ℓ

$(f \circ u = (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}})$

$\Rightarrow$ soit $u \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0

$\lim_{x_0} f = \ell$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall x \in B(x_0, \eta) \cap X, \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in B(x_0, \eta) \cap X$

$\Rightarrow \|f(u_n) - \ell\| < \varepsilon$

donc $f \circ u$ converge vers ℓ

$\Leftarrow$ contraposée

si f n'admet pas la limite ℓ en x_0,

$\exists \varepsilon > 0 \,/\, \forall \eta > 0, \exists x \in B(x_0, \eta) \cap X \,/\, \|f(x) - \ell\| \geq \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}, \eta = \frac{1}{n+1}, \quad \exists u_n \in B(x_0, \eta) \,/\, \|f(u_n) - \ell\| \geq \varepsilon$

u est une suite d'élts de X qui converge vers x_0

car $\|u_n - x_0\| \leq \frac{1}{n+1}$
donc $f\circ u$ ne converge pas vers ℓ ($\|f(u_n)-\ell\| \geq \varepsilon$)

4) X partie de E $\left\{\begin{array}{l} f : X \to E \\ g : Y \to F \end{array}\right.$
Y .... F

$g\circ f : X \cap f^{-1}(Y) \longrightarrow G$
(car $f(x) \in Y \iff x \in f^{-1}(Y)$)

*ou $f(X) \subset Y$
$x_0 \in \overline{X}$

si $\left\{\begin{array}{l} x_0 \in \overline{X \cap f^{-1}(Y)}\ ^* \\ f \text{ admet la lim } \ell \text{ en } x_0 : \lim_{x_0} f = \ell \\ g \text{ .... } \ell' \text{ en } \ell : \lim_{\ell} g = \ell' \end{array}\right.$ alors $\lim_{x_0} g\circ f = \ell'$

$\lim_{\ell} g = \ell'$: $\forall W' \in \mathcal{V}_{\ell'}$, $\exists W \in \mathcal{V}_{\ell}$ / $g(W \cap Y) \subset W'$
$\lim_{x_0} f = \ell$: $\exists V \in \mathcal{V}_{x_0}$ / $f(V \cap X) \subset W$
donc $f(V \cap (X \cap f^{-1}(Y))) \subset W \cap Y$
$g[f(V \cap (X \cap f^{-1}(Y)))] \subset W'$
$g\circ f\,(V \cap (X \cap f^{-1}(Y))) \subset W'$

opérations algébriques

$\left\{\begin{array}{l} f, g \text{ appli de } X \subset E \text{ dans } F, \quad \lambda : X \to \mathbb{K} \\ x_0 \in \overline{X}, \quad (\ell, \ell') \in F^2, \quad \alpha \in \mathbb{K} \end{array}\right.$

Pp 1) $\lim_{x_0} f = \ell \implies \lim_{x_0} \|f\| = \|\ell\|$

$g : \left|\begin{array}{l} F \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \|y\| \end{array}\right.$ $\lim_{\ell} g = \|\ell\|$ $\|f\| = g\circ f$
et $\lim_{x_0} g\circ f = \lim_{\ell} g = \|\ell\|$

2) $\lim_{x_0} f = 0 \iff \lim_{x_0} \|f\| = 0$

3) si $\left\{\begin{array}{l} \lim_{x_0} f = \ell \\ \lim_{x_0} g = \ell' \end{array}\right.$ alors $\lim_{x_0}(f+g)$ existe et vaut $\ell + \ell'$

4) si $\left\{\begin{array}{l} \lim_{x_0} f = \ell \\ \lim_{x_0} \lambda = \alpha \end{array}\right.$ alors $\lim_{x_0} \lambda f$ existe et vaut $\lambda \ell$

5) si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ localem}^t \text{ bornée au voisinage de } x_0 \\ \lim_{x_0} \lambda = 0 \end{array}\right.$ alors $\lim_{x_0} \lambda f = 0$

6) si $\left\{\begin{array}{l} \lim_{x_0} f = 0 \\ \lambda \text{ localem}^t \text{ bornée au voisinage de } x_0 \end{array}\right.$ ....

b - extensions

$E = \mathbb{R}$, $x_0 = +\infty$, X partie non bornée de $\mathbb{R}$, $f : X \to E$, $\ell \in F$
$\lim_{+\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in X, x > A \implies \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$
$f(]A, +\infty[\cap X) \subset B(\ell, \varepsilon)$

$E = \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$, $X \subset E$, $x_0 \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{R}$
$\lim_{x_0} f = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 / \forall x \in X, \|x - x_0\| < \eta \implies f(x) > A$
$f(B(x_0, \eta) \cap X) \subset]A, +\infty[$

c - comparaisons

$X \subset E$, $\left\{\begin{array}{l} f, g : X \to F, \\ \varphi : X \to \mathbb{K} \end{array}\right.$ $x_0 \in \overline{X}$

domination : f est localement dominée par φ au voisinage de x_0 (négligeable devant φ)
négligeabilité
$\iff \exists V \in \mathcal{V}_{x_0}, \exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in X \cap V, \|f(x)\| \leq M |\varphi(x)|$
$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_{x_0}$ ... $\leq \varepsilon$

$f \in O_{x_0}(\varphi)$ (o)
$f(x) = O_{x_0}(\varphi(x))$ (o)

$\iff \exists U \in \mathcal{V}_{x_0}, \exists h \in F^{U \cap X}$ bornée / $\forall x \in X \cap U, f(x) = h(x)\varphi(x)$
$\lim_{x_0} h = 0$

équivalence : f est équivalente à g en $x_0 \iff f - g \in o_{x_0}(\|f\|)$

d- continuité

- $x_0 \in X$: f est continue en x_0 si $\lim_{x_0} f = f(x_0)$
- f est continue sur X si f est continue en chaque pt de X
- $A \subset X$ non vide, f est continue sur A si la restriction de f à A est continue

Pp 1) f continue en x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall x \in X, \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\forall W \in \mathcal{V}_{f(x_0)}, \exists V \in \mathcal{V}_{x_0} \,/\, f(V \cap X) \subset W$

$\Rightarrow$ f localement bornée au voisinage de x_0

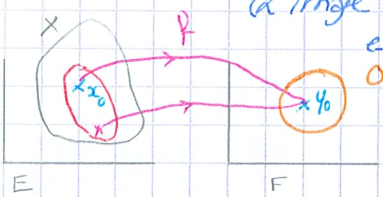
$\Leftrightarrow$ $\forall u \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0, $f \circ u$ converge (vers $f(x_0)$)

2) $\begin{cases} f : X \to E \\ g : Y \to F \end{cases}$, $\begin{cases} x_0 \in X, \\ f(x_0) \in Y \end{cases}$ si $\begin{cases} f \text{ continue en } x_0 \\ g \text{ .... } f(x_0) \end{cases}$ alors $g \circ f$ continue en x_0 ($x_0 \in X \cap f^{-1}(Y)$)

si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } X \\ g \text{ .... } Y \end{cases}$ alors $g \circ f$ est continue sur $X \cap f^{-1}(Y)$

3) $f : X \to F$, f continue sur X $\Leftrightarrow$ pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X (topo rel.)

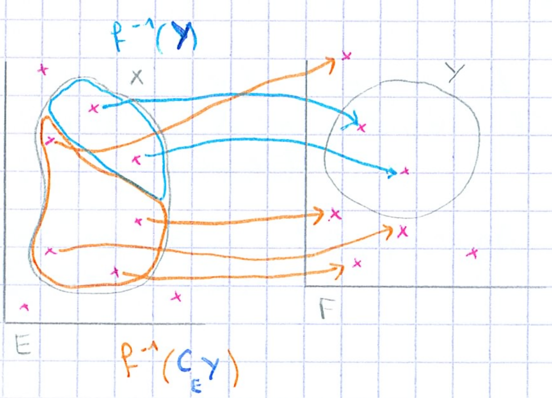
(L'image réciproque de tt ouvert est un ouvert)



$\Rightarrow$ soit O un ouvert de X,
soit $x_0 \in f^{-1}(O)$, $y_0 = f(x_0) \in O$
$O \in \mathcal{V}_{y_0}$
f continue en x_0 : $\exists V \in \mathcal{V}_{x_0} \,/\, f(V \cap X) \subset O$
$V \cap X \subset f^{-1}(O)$
donc $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x_0 (topo de X) (car il contient V, voisinage de x_0)
donc de chacun de ses pts
donc $f^{-1}(O)$ est ouvert

$\Leftarrow$ soit $x_0 \in X$, $f(x_0) = y_0 \in F$
$\forall W \in \mathcal{V}_{y_0}$, $\exists O$ ouvert $/ \ y_0 \in O \subset W$
or $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X,
$x_0 \in f^{-1}(O)$ car $y_0 = f(x_0) \in O$
donc $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x_0 (topo de X) :
$\exists V \in \mathcal{V}_{x_0} \,/\, f^{-1}(O) = V \cap X$
et $f(V \cap X) \subset O \subset W$ (Pp 1)

4) f continue sur X $\Leftrightarrow$ pr tt fermé G de F, $f^{-1}(G)$ est un fermé de X (topo rel)



$\begin{cases} f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(C_E Y) = \emptyset \\ f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(C_E Y) = X \end{cases}$

f continue sur X $\Leftrightarrow$ pr tt ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ ouvert de X
$\Leftrightarrow$ pr tt fermé G de F, $f^{-1}(G)$ fermé de X

$G = C_F O = C_F Y$ $\quad f^{-1}(G) = C_X\left[f^{-1}(C_F G)\right]$

ex d'application

det : $\begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \longmapsto \det M \end{array}$

det est continue pour une norme $\|\ \|$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (admis)

- $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ or $\mathbb{R}^*$ est ouvert
donc $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert

$SL_n(\mathbb{R})$: ens. des matrices de det $= 1$

- $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1) = \det^{-1}(\{1\})$ or $\{1\}$ est fermé
donc $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé

ex : $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x\| \end{array}$ est continue car $\forall x_0 \in E, \forall x \in F$, $\big|\|x\| - \|x_0\|\big| \leq \|x - x_0\|$

F

* $f : X \to F$ f lips $\Longrightarrow$ f continue

$\forall x_0 \in X, \forall x \in X, \|f(x_0) - f(x)\| \leq K \|x_0 - x\|$ $\rightarrow$ donc en majorant $\|x_0 - x\|$, on majore $\|f(x_0) - f(x)\|$

Pp) $\begin{cases} f, g : X \to E, & x_0 \in X \\ \lambda : X \to \mathbb{K} \end{cases}$

f continue en x_0 (resp. sur X) $\Longrightarrow$ $\|f\|$ continue en x_0 (resp sur X)

f, g .... $\Longrightarrow$ $f+g$ ....

f, λ .... $\Longrightarrow$ λf ....

Pp) $f, g : X \to F$ continues sur X (1), $A \subset X$,

si $\begin{cases} \forall x \in A, & f(x) = g(x) \ (2) \\ A \text{ dense dans } X \ (3) \end{cases}$ alors, $\forall x \in X$, $f(x) = g(x)$

soit $x_0 \in X$,

$\exists u \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 (3) car $x_0 \in X = \bar{A}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = g(u_n)$ (2)

$\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} f(u_n) = f(x_0) \ (1) \\ \lim\limits_{+\infty} g(u_n) = g(x_0) \end{cases}$ d'où $f(x_0) = g(x_0)$

ex d'application : Trouver les appli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues / $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$

- si f est solut° : • $f(0+0) = f(0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$

  je pose $f(1) = a$, $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2a$

  $f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3a$

  réc : $\forall n \in \boxed{\mathbb{N}}$ $f(n) = na$

  • $f(n-n) = f(n) + f(-n) = f(0) = 0$ $\Longrightarrow$ $f(-n) = -f(n)$

  $\forall n \in \boxed{\mathbb{Z}}$ $f(n) = na$

  • $p \in \mathbb{N}^*$, $a = f(\underbrace{\tfrac{1}{p} + \dots + \tfrac{1}{p}}_{p \text{ fois}}) = p f(\tfrac{1}{p})$ $\Longleftrightarrow$ $f(\tfrac{1}{p}) = \tfrac{a}{p}$

  $\forall q \in \mathbb{Z}$, $f(\tfrac{q}{p}) = q f(\tfrac{1}{p}) = a \tfrac{q}{p}$

  $\forall x \in \boxed{\mathbb{Q}}$ $f(x) = xa$

  soit $g : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xa \end{array}$ $\begin{cases} f, g \text{ sont continues sur } \mathbb{R} \\ \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = g(x) \end{cases}$ donc $\forall x \in \boxed{\mathbb{R}}$, $f(x) = xa$

- récip : si $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xa \end{array}$, alors ......

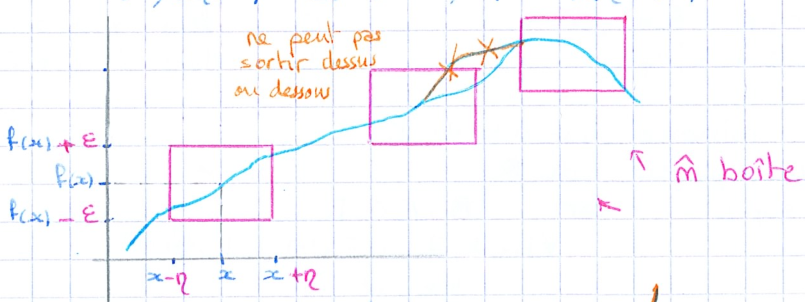
c. Continuité uniforme

f uniformément continue sur X $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (x, x') \in X^2$,

$\|x - x'\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$

Pp) f unif^{mt} continue sur X $\Longrightarrow$ f continue sur X

$E = F = \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2$, $|x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$



(une fois ε choisie, ∃ η qui est le m̂ pr ttes les boîtes)

$f : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ n'est pas unif^t continue

$\varepsilon = 1$, $\forall \eta > 0$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\eta} & \in \mathbb{R} \\ x' = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} & \in \mathbb{R} \end{cases}$

$|x' - x| = \frac{\eta}{2} < \eta$ $f(x') - f(x) = \frac{1}{\eta^2} + 1 + \frac{\eta^2}{4} - \frac{1}{\eta^2} = 1 + \frac{\eta^2}{4} > 1$

Pp 1) Toute application lips est unif^t continue

2) $\begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x\| \end{vmatrix}$ est unif^t continue (car 1 lips)

3) f, g unif^t continues, $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $f+g$, αf unif^t continues

4) $\begin{cases} f : X \to F \\ g : Y \to G \end{cases}$ $Y \subset F$ si f et g sont unif^t continues
alors $g \circ f$ est .... sur $X \cap f^{-1}(Y)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ / $\forall (y, y') \in Y^2$, $\|y - y'\| < \eta \Rightarrow \|g(y) - g(y')\| < \varepsilon$
$\exists \alpha > 0$ / $\forall (x, x') \in X^2$, $\|x - x'\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \eta$
$\forall (x, x') \in (X \cap f^{-1}(Y))^2$, $\|x - x'\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \eta$
$\Rightarrow \|g[f(x)] - g[f(x')]\| < \varepsilon$

11 - applications linéaires continues

a - $E \neq \{0\}$, F ss_ev

Pp) $f : E \to F$ ap. linéaire, les prop. suivantes sont équivalentes :

(1) f continue sur E
(2) f continue en 0
(3) $\exists M \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq M \|x\|$
(4) $\exists M \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in B_f(0, 1)^*$, $\|f(x)\| \leq M$ $\qquad \|x - 0\| \leq 1$
(5) f lips
(6) f unif^t continue

(2) $\Rightarrow$ (3) f conti en 0 : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in E$, $\|x\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\| \leq \varepsilon$
$\varepsilon = 1$: $\exists \eta > 0 / \forall x \in E$, $\|x\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\| \leq 1$
f linéaire : • $\forall x \in E \setminus \{0\}$, je pose $x' = \frac{\eta}{\|x\|} x$ $\quad \|x'\| = \eta \Rightarrow \|f(x')\| \leq 1$

donc $f\left(\frac{\eta}{\|x\|} x\right) = \frac{|\eta|}{\|x\|} f(x) = \frac{\eta}{\|x\|} f(x) \leq 1 \iff f(x) \leq \frac{1}{\eta} \|x\|$

• si $x = 0$, $\|f(x)\| = 0 \leq \frac{1}{\eta} \|x\|$

(4) $\Rightarrow$ (5) $\forall (x, y) \in E^2$,
si $x \neq y$: $\left\|\frac{1}{\|x-y\|}(x-y)\right\| = 1$, $\left\|f\left(\frac{1}{\|x-y\|}(x-y)\right)\right\| = \left|\frac{1}{\|x-y\|} f(x-y)\right| \leq M$ $\quad$ (4)
$\Rightarrow \|f(x-y)\| \leq M \|x - y\| \iff \|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$
si $x = y$: $\|f(x) - f(y)\| = 0 \leq M \|x - y\|$

$\mathcal{L}_c(E, F)$: ensemble des ap. linéaires continues de E dans F
$\mathcal{L}_c(E)$: .... endomorphismes continus de E.
E' : formes linéaires continues E^* (dual topologique)

rem : * dépend des normes
* ce sont des ev sur $\mathbb{K}$

b - norme d'une application linéaire continue

soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$,
$A = \{M \in \mathbb{R} / \forall x \in E, \|f(x)\| \leq M \|x\|\}$ $\qquad C = \{\|f(x)\| / x \in E, \|x\| = 1\}$
$B = \left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} / x \in E \setminus \{0\}\right\}$ $\qquad D = \{\|f(x)\| / x \in E, \|x\| \leq 1\}$

Pp 1) A partie non vide, minorée (par 0) de $\mathbb{R}$
2) B, C, D parties non vides, majorées de $\mathbb{R}$
3) $\sup B = \sup C \leq \sup D$ car $B = C \subset D$

$\forall b \in B, \exists x \in E \setminus \{0\} / b = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, soit $x' = \frac{x}{\|x\|}$,
$\|x'\| = 1$
donc $\|f(x')\| = \left\|f\left(\frac{1}{\|x\|} x\right)\right\| = \left\|\frac{1}{\|x\|} f(x)\right\| = b \in C$
donc $B \subset C$

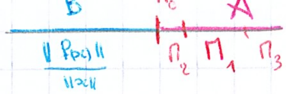
$\forall c \in C$, $\exists x \in E$ / $\|x\| = 1$ et $c = \|f(x)\|$
$x \neq 0$, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = c \in B$ donc $C \subset B$

4) $\sup B = \sup C = \sup D$

$\forall d \in D$, $\exists x \in E$ / $\|x\| \leq 1$ et $d = \|f(x)\|$
si $x = 0$, $d = 0$ $=1$ $\qquad$ or, $\frac{1}{\|x\|} d \geq d$
si $x \neq 0$, $\left\|f\left(\frac{1}{\|x\|} x\right)\right\| = \frac{1}{\|x\|} d \in C$ $\qquad$ donc $\sup C \geq \sup D$

5) $\mathcal{A}$: ensemble des majorants de B

6) $\sup B = \sup C = \sup D = \inf \mathcal{A} = |||f|||$



F

P_p 1) $|||\ |||$: $\left| \begin{array}{l} \mathcal{L}_c(E,F) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto |||f||| \end{array}\right.$ est une norme : norme de $\mathcal{L}_c(E,F)$ subordonnée aux normes de E et de F

B : • $\forall f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$\left\{ \frac{\|\lambda f(x)\|}{\|x\|} \ / \ x \in E\setminus\{0\} \right\} = \left\{ |\lambda| \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \ / \ x \in E\setminus\{0\} \right\} = |\lambda| \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \ / \ x \in E\setminus\{0\} \right\}$

$\sup \{ \quad \} = |\lambda| \sup \{ \quad \}$ $\Leftrightarrow$ $|||\lambda f||| = |\lambda| \ |||f|||$

C : • $\forall (f,g) \in \mathcal{L}_c(E,F)^2$,

$\forall x \in E$, $\|x\| = 1$ $\|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq |||f||| + |||g|||$

donc $|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||$ (vrai pr tt $x \in E$)

B : • soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$,

$|||f||| = 0 \Rightarrow \forall x \in E\setminus\{0\}, \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow \forall x \in E\setminus\{0\}, \|f(x)\| = 0$

$\Rightarrow \forall x \in E, \|f(x)\| = 0 \Rightarrow \forall x \in E, f(x) = 0$

$\Rightarrow f = 0$

2) * $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq |||f||| \ \|x\|$

* $|||f|||$ est le plus petit réel ayant cette propriété

* $\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}_c(E,F) \\ g \in \mathcal{L}_c(F,G) \end{array} \right.$ $|||g \circ f||| \leq |||g||| \ |||f|||$

$\forall x \in E$, $\|g\circ f(x)\| = \|g(f(x))\| \leq |||g||| \ \|f(x)\|$

$\leq |||g||| \ |||f||| \ \|x\|$

rem : N_1, N_2 normes sur E

$N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow$ $Id_1 : \left| \begin{array}{l} (E,N_1) \longrightarrow (E,N_2) \\ x \longmapsto x \end{array}\right.$ et $Id_2 : \left| \begin{array}{l} (E,N_2) \longrightarrow (E,N_1) \\ x \longmapsto x \end{array}\right.$ sont continues

$Id_1 = Id_2$

$\Rightarrow$ $\exists (\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \ / \ \forall x \in E$, $\alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x)$

$N_1(Id_2(x)) \leq \beta N_2(x)$

donc Id_2 est continue (Pp 2) du 11.)

et $N_{21}(Id_2) \leq \beta$

de m̂, $\forall x \in E$, $N_2(x) \leq \frac{1}{\alpha} N_1(x)$

donc Id_1 est continue

et $N_{12}(Id_1) \leq \frac{1}{\alpha}$,

$\Leftarrow$ Id_1 continue : $\forall x \in E$, $N_2(Id_1(x)) \leq N_{12}(Id_1) N_1(x)$

Id_2 continue : $N_1(Id_2(x)) \leq N_{21}(Id_2) N_2(x)$

$Id_1 \neq 0$, $Id_2 \neq 0$ $N_{12}(Id_1) > 0$, $N_{21}(Id_2) > 0$

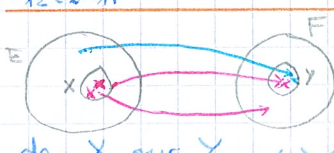
$\forall x \in E$, $\frac{1}{N_{12}(Id_1)} N_2(x) \leq N_1(x) \leq N_{21}(Id_2) N_2(x)$

X ss-ensemble de E.

Y — — — F

$f : X \longrightarrow F$ (pas forcém^t linéaire)

f réalise un homéomorphisme de X sur Y $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ réalise une bijection de } X \text{ sur } Y \\ f \text{ continue} \\ f^{-1} \text{ continue} \quad f^{-1} : Y \to E \end{array}\right.$



conséq : $N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow Id : \left| \begin{array}{l} (E,N_1) \longrightarrow (E,N_2) \\ x \longmapsto x \end{array}\right.$ homéomorphisme

(2 ensembles homéomorphes ont m̂ topologie (m̂ ouverts, fermés, adhérences ...))

d_ utilisation des suites

$f \in \mathcal{L}(E,F)$

P_p 1) f continue $\Leftrightarrow$ $\exists K \in \mathbb{R} \ / \ \forall u \in E^{\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| = 1$, $\|f(u_n)\| \leq K$

$\rightarrow$ sert à Πq f n'est pas continue

(3) : $\exists K \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in E\setminus\{0\}, \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq K \leftarrow B$

$\Rightarrow$ si f est continue : $K = |||f|||$ donc $\sup B = K = |||f|||$ puis *

$\Leftarrow$ si f n'est pas continue : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in E, \|x\| = 1 \ / \ \|f(x)\| \geq M$ ← contrap. de P_p 3) du 11

$n \in \mathbb{R}$, $u_n \in E$, $\|u_n\| = 1$ $\|f(u_n)\| \geq n$

critère : on construit une suite de réels de norme 1 dont l'image n'est pas bornée

$(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, K n'existe pas

* $\sup C = |||f||| = K = \{ \|f(x)\| \ / \ x \in E, \|x\| = 1 \}$

donc $\forall x \in E \ / \ \|x\| = 1$, $\|f(x)\| \leq K$

2) si $\begin{cases} \exists K \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq K\|x\| & (1) \\ \exists u \in E^{\mathbb{N}} \,/\, \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| = 1 & (2) \\ \lim_{+\infty} \|f(u_n)\| = K \end{cases} \end{cases}$ alors $\begin{cases} f \text{ est continue} \\ |||f||| = K \end{cases}$

Pp 3) du 1.1

(1) : f continue, $|||f||| \leq K$ — A : ens des majorants K, $|||f||| = \inf A$

(2) : $|||f||| \geq K$

e - applications bilinéaires continues

E, F, G ev normés, $E \times F$ muni de la norme produit : $\forall (x,y) \in E\times F$, $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$

$f : \begin{vmatrix} E\times F \longrightarrow G \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{vmatrix}$ bilinéaire (y fixé : f linéaire pour x; x fixé : f linéaire pour y) — f non linéaire : $f(\alpha(x,y)) = \alpha^2 f(x,y)$

les prop. suivantes sont équivalentes :

(1) f continue

(2) f continue en 0

(3) $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall (x,y) \in E\times F$, $\|f(x,y)\| \leq M \|x\| \|y\|$

(2) ⇒ (3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall (x,y) \in E\times F$, $\|(x,y)\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x,y)\| \leq \varepsilon$

$\varepsilon = 1$ $\exists \eta > 0 \,/\, \ldots\ldots\ldots\ldots 1$

- $\forall (x,y) \in E\times F \,/\, x \neq 0$ et $y \neq 0$, $\|(x,y)\| > 0$

$\left\|\left(\frac{\eta x}{\|x\|}, \frac{\eta y}{\|y\|}\right)\right\| = \max\{\eta, \eta\} = \eta$

$\left\|f\left(\frac{\eta x}{\|x\|}, \frac{\eta y}{\|y\|}\right)\right\| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\eta^2}{\|x\|\,\|y\|} \|f(x,y)\| \leq 1$

$\Leftrightarrow \|f(x,y)\| \leq \frac{1}{\eta^2} \|x\| \|y\|$

- si $x = 0$ ou $y = 0$, $\|f(x,y)\| = 0 \leq \frac{1}{\eta^2}\|x\|\|y\|$

(3) ⇒ (2) $\forall ((x,y),(x',y')) \in (E\times F)^2$,

$\|f(x,y) - f(x',y')\| = \|f(x,y) - f(x,y') + f(x,y') - f(x',y')\|$

$\leq \|f(x,y) - f(x,y')\| + \|f(x,y') - f(x',y')\|$

$\leq \|f(x, y-y')\| + \|f(x-x', y')\|$

$\leq M\|x\|\|y-y'\| + M\|x-x'\|\|y'\|$

$\leq M\|x\|\|y-y'\| + M\|x-x'\|(\|y'-y\| + \|y\|)$

$\leq \underbrace{M\|x\|}_{cste}\underbrace{\|(x,y)-(x,y')\|}_{\text{à rendre aussi petit qu'on veut}} + M\|y\|\,\|(x,y)-(x',y)\| + M\|y\|\,\|(x,y)-(x',y)\|^2$

ex : $\begin{vmatrix} \mathbb{K}\times E \longrightarrow E \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \end{vmatrix}$ est bilin. continue — $\|\lambda x\| \leq 1\,|\lambda|\,\|x\|$ car $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_c(E,F) \times \mathcal{L}_c(F,G) \longrightarrow \mathcal{L}_c(E,G) \\ (f, g) \longmapsto g\circ f \end{vmatrix}$ est bilin. continue — $|||g\circ f||| \leq |||f|||\,|||g|||$

généralisation aux ap. multilinéaires

1.2 - compacité

a - $X \subset E$, X est compact ⟺ tte suite d'élts de X admet une valeur d'adhérence dans X

Tout ensemble fini est compact

$X = \{x_i, 1 \leq i \leq m\}$ ensemble fini, $u \in X^{\mathbb{N}}$

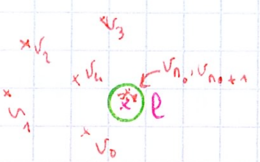
$\mathbb{N} = \bigcup_{1\leq i\leq m} \{n \in \mathbb{N} \,/\, u_n = x_{i_0}\}$ est infini

donc x_{i_0} est une valeur d'adhérence pour u

les intervalles fermés bornés sont compacts

BW : u bornée ⇒ u a au moins 1 val. d'adh

soit $v \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ, $X = \{v_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact



soit $u \in X^{\mathbb{N}}$

1er cas : ℓ valeur d'adh pour u, alors u a 1 val. d'adh ds X

2ème cas : ℓ n'est pas val. d'adh pour u :

$\exists \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0 \Rightarrow u_m \notin B(\ell, \varepsilon)$

v converge vers ℓ :

pour le m̂ $\varepsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow v_n \in B(\ell, \varepsilon)$

donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0 \Rightarrow u_m \in \{v_0, \ldots, v_{n_0-1}\}$

$(u_m)_{m \geq m_0}$ est une suite qui prend ses valeurs dans un ensemble fini, donc compact donc a une val. d'adh dans $\{v_0, \dots, v_{n_0-1}\}$, donc dans X

P_p 1) X compact $\Longrightarrow$ X fermé borné

- $x \in \bar{X}$, $u \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x
  X compact : u a une val. d'adh. dans X
  u converge donc a une unique val. d'adh : sa limite x
  donc $x \in X$: $\bar{X} \subset X$ or $X \subset \bar{X}$
  d'où $X = \bar{X}$ fermé

contraposée
- supposons X non borné : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in X / \|u_n\| \geq n$
  pr tte extractrice φ, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$
  donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n)}\| \geq \varphi(n) \geq n$
  donc $u \circ \varphi$ n'est pas bornée donc ne converge pas
  donc u n'a pas de val. d'adh, donc X n'est pas compact. Ainsi X compact $\Rightarrow$ X borné

2) $\begin{cases} X \text{ compact}, \\ Y \subset X \end{cases}$ Y compact $\Longleftrightarrow$ Y fermé

$\Rightarrow$ Y compact $\Rightarrow$ Y fermé

$\Leftarrow$ $u \in Y^{\mathbb{N}}$, donc $u \in X^{\mathbb{N}}$, u a une val. d'adh ds X (X compact)
$\exists \begin{cases} \varphi \text{ extractrice} / u \circ \varphi \text{ converge vers } x \\ x \in X \end{cases}$

$u \in Y^{\mathbb{N}}$ donc $u_\varphi \in Y^{\mathbb{N}}$
caract. séq : $u \in A^{\mathbb{N}}$ converge vers x $\Longleftrightarrow$ $x \in \bar{A}$

donc $u \circ \varphi \in Y^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \bar{Y} = Y$ (Y fermé)
donc u a une val. d'adh. ds Y.

3) Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés de $\mathbb{R}$

P_p 1) $\Rightarrow$ X compact (de $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ X fermé borné (de $\mathbb{R}$)
P_p 2) $\Leftarrow$ si X est fermé borné, $\exists a \in \mathbb{R}^+ / X \subset [-a, a]$
donc X est fermé inclus ds un compact
donc X est compact

compact car int. fermé borné

rem : un compact de $\mathbb{R}$ contient ses bornes.
X compact de $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \sup X \in X \\ \inf X \in X \end{cases}$

4) si $\begin{cases} X \text{ compact} \\ f : X \longrightarrow F \text{ continue} \end{cases}$ alors $f(X)$ compact dans F
(L'image directe d'un compact par une appli. continue est compacte)

soit $u \in f(X)^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists v_n \in X / f(v_n) = u_n$ ($f \circ v = u$)
donc $v \in X^{\mathbb{N}}$ a une val. d'adh. x dans X (X compact)
soit φ extractrice / $v \circ \varphi$ converge vers x
f continue en x donc $f \circ (v \circ \varphi)$ converge vers $f(x)$
donc $u \circ \varphi$ converge vers $f(x) \in f(X)$, donc $f(x)$ val d'adh
donc $f(X)$ compact

corollaire 1) $Y = f(X)$, + hyp 4)

si f est injective alors f réalise un homéo de X sur Y
$\tilde{f}$ est surjective (on a restreint l'ensemble d'arrivée à Y)
donc bijective, continue

$\tilde{f} : \begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ continue

pr tt fermé Ω de X, Ω est fermé dans un compact,
donc Ω est compact or $(\tilde{f}^{-1})^{-1}(\Omega) = \tilde{f}(\Omega)$ donc fermé

réciproque de $\tilde{f}^{-1}$

fermé $(\tilde{f}^{-1})^{-1}(\Omega)$ fermé

compact (car $\begin{cases} \Omega \text{ compact} \\ f \text{ continue} \end{cases}$)

donc $(\tilde{f}^{-1})(\Omega)$ est fermé donc $\tilde{f}^{-1}$ est continue

2) $\begin{cases} X \neq \emptyset \text{ compact de } \mathbb{R} \\ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \end{cases}$ $\Longrightarrow$ f est bornée et atteint ses bornes

P_p 4) P_p 1) $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc $f(X)$ est borné
P_p 3) et $\begin{cases} \sup f(X) \in f(X) \\ \inf f(X) \in f(X) \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} \exists (\alpha, \beta) \in X^2 / f(\alpha) = \sup f(X) \\ f(\beta) = \inf f(X) \\ \forall x \in X, f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha) \end{array} \right)$

5) Les compacts de $\mathbb{C}$ sont les fermés bornés

X fermé borné de $\mathbb{C}$: $\exists r \in \mathbb{R} / X \subset B(0, r)$
$u \in X^{\mathbb{N}}$ est bornée donc a une val d'adh (BW)
$\exists \varphi / u \circ \varphi$ converge

$u \circ \varphi \in X^{\mathbb{N}}$ converge dans $\underbrace{\overline{X} = X}_{X \text{ fermé}}$ donc u a une val. d'adh ds X

b. produit de compacts

$E_1, \dots, E_n$ ev normés $\begin{cases} X_1 \subset E_1, & X_1 \neq \emptyset \\ \vdots & \\ X_n \subset E_n & X_n \neq \emptyset \end{cases}$ $X_1 \times \dots \times X_n \subset \underbrace{E_1 \times \dots \times E_n}_{\text{norme produit}}$

$X_1 \times \dots \times X_n$ compact dans E $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} X_1 \text{ compact dans } E_1 \\ \vdots \\ X_n \text{ compact dans } E_n \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\pi_i : \begin{vmatrix} E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow E_i \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i \end{vmatrix}$

π_i est linéaire, 1-lips* ($\|x_i\| \leq \underbrace{\max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} = \|(x_1, \dots, x_n)\|}_{\text{norme produit}}$)

$\|\pi_i(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|$

donc π_i est continue

donc $\underbrace{\pi_i(X_1 \times \dots \times X_n) = X_i}_{\text{car } X_1 \neq \emptyset, \dots, X_n \neq \emptyset}$ est compact

* $\|\pi_i(x_1, \dots, x_n) - \pi_i(y_1, \dots, y_n)\| = \|x_i - y_i\| \leq 1 \cdot \|x_i - y_i\|$

$\Leftarrow$ réc. sur n :

$n = 1$ X_1 compact de E_1

$n = 2$ $\begin{cases} X_1 \text{ compact de } E_1 \\ X_2 \dots\dots \; E_2 \end{cases}$, $u \in (X_1 \times X_2)^{\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (a_n, b_n)$, $\begin{cases} a_n \in X_1 \\ b_n \in X_2 \end{cases}$

X_1 compact : $\exists \varphi, \ell_1 \in X_1$ / $a \circ \varphi$ converge vers ℓ_1

$b \circ \varphi \in X_2^{\mathbb{N}}$: $\exists \psi, \ell_2 \in X_2$ / $b \circ \varphi \circ \psi$ converge vers ℓ_2

$a \circ \varphi \circ \psi$ extraite de $a \circ \varphi$ converge vers ℓ_1

donc $u \circ \varphi \circ \psi$ converge vers (ℓ_1, ℓ_2)

u a une val. d'adh ds $X_1 \times X_2$

hyp de réc : si $X_1, \dots, X_{n-1}$ sont des compacts non vides de $E_1 \times \dots \times E_{n-1}$

alors $X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ est un compact de $E_1 \times \dots \times E_{n-1}$

$\begin{cases} X_1 \times \dots \times X_{n-1} \text{ compact ds } E_1 \times \dots \times E_{n-1} \\ X_n \dots\dots\dots\dots \; E_n \end{cases}$

donc $X_1 \times \dots \times X_n$ compact ds $(E_1 \times \dots \times E_{n-1}) \times E_n = E_1 \times \dots \times E_n$ (m̂ norme)

c. théorème de Heine (à savoir faire)

$\begin{cases} X \text{ compact de } E \\ f : X \longrightarrow F \text{ continue} \end{cases}$ $\Rightarrow$ f est uniform$^{\text{ément}}$ continue

(une appli. continue sur un compact est unif^t continue).

contraposée

supp. f non unif^t continue,

$\exists \varepsilon > 0 / \forall \eta > 0, \exists (x, x') \in X^2 / \|x - x'\| < \eta$ et $\|f(x) - f(x')\| \geq \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in X^2 / \|u_n - v_n\| < \frac{1}{n+1}$ et $\|f(u_n) - f(v_n)\| \geq \varepsilon$

$(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans le compact X^2

donc a une val. d'adh $(\ell, \ell') \in X^2$

$\exists \varphi / \begin{cases} u \circ \varphi \text{ converge vers } \ell \\ v \circ \varphi \dots\dots\dots \; \ell' \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \|u \circ \varphi(n) - v \circ \varphi(n)\| \leq \frac{1}{\varphi(n) + 1} \leq \frac{1}{n+1}$

$\varphi(n) \geq n \Rightarrow \varphi(n) + 1 \geq n + 1$

par passage à la lim : $\ell = \ell' \in X$

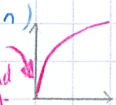
or, $\forall n \in \mathbb{N}, \|f(u_{\varphi(n)}) - f(v_{\varphi(n)})\| \geq \varepsilon$

f continue en ℓ et ℓ' donc $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} f(u_{\varphi(n)}) = f(\ell) = f(\ell') \\ \lim\limits_{+\infty} f(v_{\varphi(n)}) = f(\ell') = f(\ell) \end{cases}$

donc $\lim\limits_{+\infty} \|f(u_{\varphi(n)}) - f(v_{\varphi(n)})\| = 0$ impossible

rem : * $\begin{cases} I \text{ intervalle fermé borné (donc compact)} \\ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \end{cases}$ alors f est unif^t continue (sommes de Riemann)

* $f : \begin{vmatrix} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{vmatrix}$ alors f unif^t continue (mais non lips)



coeff dir aussi grand qu'on veut

d. espaces vectoriels de dimension finie

Pp) les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$ / $(\mathbb{C}^n, \|\ \|_\infty)$ sont les fermés bornés

$\Leftarrow$ soit X un fermé borné de $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$

$\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall (x_1,\dots,x_n) \in X,\ \|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty \leq M$

$|x_1| \leq M$ et $|x_2| \leq M$ et ... et $|x_n| \leq M$

donc $X \subset \underbrace{[-M,M]}_{\text{int fermé borné}} \times \dots \times \underbrace{[-M,M]}_{\text{int}\dots}$: compact č produit de compacts non vides

X fermé ds un compact : X compact

Th | E ev de dim finie sur $\mathbb{K}$,
toutes les normes de E sont équivalentes

$\dim E = n$, $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$

$\forall u \in E,\ \exists!\, (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ $\quad (x_i = e_i^*(u))$

• soit $N_\infty : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} \end{array}$ $\quad N_\infty$ est une norme

et $\varphi : \begin{array}{l} (E, N_\infty) \longrightarrow (\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty) \\ u \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$ est linéaire, bijective, une isométrie donc un homéomorphisme

$S = \{u \in E \,/\, N_\infty(u) = 1\}$ est un compact de E pour N_∞ :

$S = \underbrace{\varphi^{-1}}_{\text{homéo}} \big(\underbrace{B_f(0,1)_{\mathbb{K}} \times \dots \times B_f(0,1)_{\mathbb{K}}}_{\text{compact de } \mathbb{K}^n} \big)$

$N_\infty(u) = 1 = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$
donc tous les x_i sont contenus dans des $B_f(0,1)$

• soit N une norme qqc de E,

$Id : \begin{array}{l} (E, N_\infty) \longrightarrow (E, N) \\ u \longmapsto u \end{array}$ est continue :

* Id est linéaire
* $\forall u \in E,\ u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$N(u) \leq |x_1| N(e_1) + \dots + |x_n| N(e_n)$

$\leq \underbrace{[N(e_1) + \dots + N(e_n)]}_{\alpha} N_\infty(u) = \alpha N_\infty(u)$

$|x_1| \leq \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} = N_\infty(u)$

$|x_2| \leq \dots$

• $\varphi : \begin{array}{l} (E,N_\infty) \xrightarrow{\text{conti}} (E,N) \xrightarrow{\text{conti}} \mathbb{R} \\ u \longmapsto u \longmapsto N(u) \end{array}$ est continue par composit°

or, S est compact dans (E, N_∞)

donc $\varphi(S)$ compact dans $\mathbb{R}$. (image par φ continue de S compact)

φ bornée sur S et atteint ses bornes

soit $\beta = \inf \varphi$, $\exists v \in S \,/\, \beta = \varphi(v) = N(v)$

$\forall w \in S,\ \varphi(w) \geq \varphi(v)$

$N(w) \geq \beta = N(v)$

or, $v \in S$: $N_\infty(v) = 1 \neq 0 \Rightarrow v \neq 0 \Rightarrow N(v) = \beta > 0$

et $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $N_\infty\big(\underbrace{\tfrac{1}{N_\infty(u)} u}_{w}\big) = 1$ donc $w = \frac{1}{N_\infty(u)} u \in S$

$N(w) = N\left(\frac{1}{N_\infty(u)} u\right) \geq \beta$: $\frac{1}{N_\infty(u)} N(u) \geq \beta$

$\forall u \in E \setminus \{0\},\ N(u) \geq \beta N_\infty(u)$

$\forall u \in E,\ N(u) \geq \beta N_\infty(u)$

ccl : $\exists (\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \,/\, \forall u \in E,\ \beta N_\infty(u) \leq N(u) \leq \alpha N_\infty(u)$

donc $N \sim N_\infty$

soit N' une norme sur E alors $\begin{cases} N \sim N_\infty \\ N' \sim N_\infty \end{cases}$

donc $N \sim N'$

Pp 1) E, F ev de dim finie $\quad \forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, f est continue

une appli. linéaire est continue en dim finie

$\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ base de E, N_∞ norme sur E

$\forall x \in E,\ x = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$

$N_\infty(x) = \max\{|u_1|,\dots,|u_n|\}$

$f(x) = u_1 f(e_1) + \dots + u_n f(e_n)$

$\|f(x)\| \leq |u_1| \|f(e_1)\| + \dots + |u_n| \|f(e_n)\|$

$\leq \underbrace{\|f(e_1)\| + \dots + \|f(e_n)\|}_{} N_\infty(x)$

f continue pour N_∞, pour n'importe quelle norme

2) E $\mathbb{K}$ev de dim n, muni d'une norme N

alors, E homéomorphe à $\mathbb{K}^n$

$\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ $\quad : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \end{array}$ est bijective (linéaire), bicontinue (f et f^{-1} continues)

3) E ev de dim finie, les compacts de E sont les fermés bornés

4) $\begin{cases} E_1, E_2 \text{ ev normés de dim finie,} \\ F \text{ ev normé} \end{cases}$ si $f : E_1 \times E_2 \to F$ est bilinéaire alors f est continue

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E_1, $N_\infty(x) = \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\}$
$\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ .... E_2, $N'_\infty(y) = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}$

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e'_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j f(e_i, e'_j)$$

$$\|f(x,y)\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |u_i| |v_j| \|f(e_i, e'_j)\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|f(e_i, e'_j)\|\right) N_\infty(x) N_\infty(y)$$

→ généralisat° aux appl° multilinéaires

ex * $\det_{\mathcal{B}} : \begin{vmatrix} E^n \to \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \end{vmatrix}$ est continue

* E ev de dim finie muni d'un produit scalaire
(1) : $\begin{vmatrix} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto (x|y) \end{vmatrix}$ est continue

* E ev euclidien orienté de dim 3
$\wedge : \begin{vmatrix} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \wedge y \end{vmatrix}$ est continue

13. complétude

a. suites de Cauchy

* $u \in E^{\mathbb{N}}$, u de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Rightarrow \|u_p - u_q\| < \varepsilon$
→ Toute suite de Cauchy est bornée
→ Toute suite convergente est de Cauchy
→ u de Cauchy, λ val. d'adh de u alors u converge vers λ (unique val. d'adh)

Pp 1) u de Cauchy, (1)
si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in X \\ f : X \to F \text{ unif}^t \text{ continue sur } X \text{ (2)} \end{cases}$ alors $f \circ u$ est de Cauchy

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (x,y) \in X^2, \|x-y\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$
(1) $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Rightarrow \|u_p - u_q\|_E < \eta$
$(u_p \in X, u_q \in X)$
$\Rightarrow \|f(u_p) - f(u_q)\|_F < \varepsilon$

2) $N_1 \sim N_2$ sur E
E de dim finie $\Rightarrow$ tte suite de Cauchy pour l'une est une suite de Cauchy pour l'autre

$Id_1 : (E, N_1) \to (E, N_2)$
$Id_2 : (E, N_2) \to (E, N_1)$
$N_1 \sim N_2 \Rightarrow Id_1, Id_2$ $\begin{cases} \text{continues} \\ \text{linéaires} \end{cases}$
* p.32, 11a.
$\Rightarrow Id_1, Id_2$ unif^t continues *

(en dim finie les suites de Cauchy ne dépendent pas des normes)

X partie de E, ev normé
X complète $\Leftrightarrow$ tte suite de Cauchy de X converge dans X
E complet $\Leftrightarrow$ .... E .... E
alors, E est un espace Banach (ou un Banach)

ex : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Pp 1) X partie complète de E $\Rightarrow$ X fermé

$\forall x \in \overline{X}, \exists u \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x
alors u de Cauchy, u d'élém^{ts} de X, complet
donc u converge ds X (vers x)
donc $x \in X$ donc $\overline{X} \subset X$ or, $X \subset \overline{X}$ d'où $X = \overline{X}$

2) $\begin{cases} X \text{ partie complète de } E, \\ Y \subset X \end{cases}$ Y complète $\Leftrightarrow$ Y fermée

⇒ Y complète ⇒ Y fermée
⇐ $u \in Y^{\mathbb{N}}$ de Cauchy donc $u \in X^{\mathbb{N}}$ de Cauchy,
donc u converge dans X
donc dans $\overline{Y} = Y$ $(Y \subset X \Rightarrow \overline{Y} \subset X)$

3) $\begin{cases} E \text{ de Banach} \\ X \subset E \end{cases}$, X complet $\Leftrightarrow$ X fermé   2) avec $\begin{cases} X = E \\ Y = X \end{cases}$

4) X compact de E $\Rightarrow$ X complet

$u \in X^{\mathbb{N}}$ de Cauchy : possède une val. d'adh $\lambda \in X$
donc converge vers λ

5) $\begin{cases} X \subset E \\ N_1 \sim N_2 \end{cases}$ X complet pour N_1 $\Leftrightarrow$ X complet pour N_2

6) si $\begin{cases} X \text{ complet dans } E \\ Y \text{ complet dans } F \end{cases}$ alors $X \times Y$ complet dans $E \times F$ (norme produit)

soit $w \in (X \times Y)^{\mathbb{N}}$ de Cauchy
$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = (u_n, v_n)$ $(u_n \in X,\ v_n \in Y)$
$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\begin{cases} \|u_p - u_q\|_E \leq \|w_p - w_q\|_{E \times F} \\ \|v_p - v_q\|_F \leq \|w_p - w_q\|_{E \times F} \end{cases}$ donc u de Cauchy, donc v de Cauchy

$\|w_p - w_q\|_{E\times F} = \max\{\|u_p - u_q\|, \|v_p - v_q\|\}$
$\geq \|u_p - u_q\|_E$
$\geq \|v_p - v_q\|_E$

donc u converge dans X, v dans Y
donc w converge dans $X \times Y$

7) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$, $(\mathbb{C}^n, \|\ \|_\infty)$ sont complets $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$, $(\mathbb{C}^n, \|\ \|)$ (Pp 6) (Pp 5)

8) E ev de dim finie, E complet pour n'importe quelle norme

b. critère (de Cauchy)

$\begin{cases} E \text{ ev normé, } F \text{ ev normé complet} \\ X \subset E,\ x_0 \in \overline{X} \\ f : X \to F \end{cases}$

f a une limite en x_0
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (x, x') \in X^2$, $\begin{cases} \|x - x_0\|_E < \eta \\ \|x' - x_0\|_E < \eta \end{cases} \Rightarrow \|f(x) - f(x')\|_F < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall u \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0, $f \circ u$ converge
$\Leftrightarrow$ . . . . de Cauchy

$\Rightarrow$ $\lim_{x_0} f = \ell$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (x,x') \in X^2$
$\begin{cases} \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \|x' - x_0\| < \eta \Rightarrow \|f(x') - \ell\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall (x, x') \in X^2$, $(\|x - x_0\| < \eta$ et $\|x' - x_0\| < \eta) \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$
alors si $u \in X^{\mathbb{N}}$ de Cauchy qui converge vers x_0,
$\forall \eta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\begin{cases} p \geq n_0 \Rightarrow \|u_p - x_0\| < \eta \\ q \geq n_0 \Rightarrow \|u_q - x_0\| < \eta \end{cases}$
$(p \geq n_0$ et $q \geq n_0) \Rightarrow \|f(u_p) - f(u_q)\| < \varepsilon$
alors, $f \circ u$ de Cauchy

Th (hors prog.)
$X \neq \emptyset$ qcq, $\mathcal{B}(X, F)$: ev des appli. bornées de X dans F, muni de $\|\ \|_\infty$
F de Banach
$\forall f \in \mathcal{B}(X,F)$, $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_F,\ x \in X\}$
alors, $(\mathcal{B}(X,F), \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy de $(\mathcal{B}(X,F), \|\ \|_\infty)$
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(p \geq n_0$ et $q \geq n_0) \Rightarrow \sup\{\|f_p(x) - f_q(x)\|_F, x \in X\} < \varepsilon$

* soit $x_0 \in X$ fixé,
$\forall \varepsilon > 0$ . . . . $\Rightarrow \|f_p(x_0) - f_q(x_0)\| < \varepsilon$
donc $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F, donc converge dans F
on pose $\lim_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$
on a défini $f : \begin{cases} X \to F \\ x_0 \mapsto \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \end{cases}$

a-t-on $f \in \mathcal{B}(X,F)$?

* $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$,
$(p \geq n_0$ et $q \geq n_0) \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty < 1$
$\Rightarrow \forall x \in X$, $\|f_p(x) - f_q(x)\|_F < 1$
$\|f_{n_0}(x) - f_q(x)\|_F < 1$
$\|f_q(x)\|_F \leq \|f_{n_0}(x)\|_F + 1$
$\leq \|f_{n_0}\|_\infty + 1$

passage à la lim. $(q \to +\infty)$
$\forall x \in X$, $\|f(x)\|_F \leq \|f_{n_0}\|_\infty + 1$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers f pour $\| \ \|_\infty$?

donc f est bornée : $f \in \mathcal{B}(X,F)$

* $\forall \varepsilon>0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,$

$p \geq n_0$ et $q \geq n_0 \ \to \ \forall x \in X, \ \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon$

donc $p \geq n_0 \ \to \ \forall x \in X, \ \|f_p(x) - f(x)\|_F < \varepsilon$

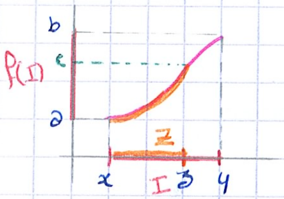
d'où $\|f_p - f\|_\infty < \varepsilon$

11 - connexité par arcs

* $I \subset \mathbb{R}$, I intervalle $\iff$ I convexe $\iff$ $\forall (a,b) \in I^2, \ [a,b] \subset I$

* $\begin{cases} I \text{ intervalle de } \mathbb{R} \\ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \end{cases} \implies f(I)$ intervalle

(T.V.I)
si f passe par 2 valeurs, f passe par ttes les valeurs intermédiaires



$\forall (a,b) \in f(I)^2$ avec $a<b$,

$\forall c \in \,]a,b[, \ \exists (x,y) \in I^2 \ / \begin{cases} f(x) = a \\ f(y) = b \end{cases}$, avec $x<y$

on pose $Z = \{t \in [x,y] \ / \ f(t) \leq c\}$

$Z = \underbrace{[x,y]}_{\text{fermé}} \cap \underbrace{f^{-1}(]-\infty, c])}_{\text{fermé car } f \text{ continue}}$ $\quad]-\infty, c]$ fermé

Z fermé, borné de $\mathbb{R}$ donc Z compact

soit $z = \sup Z$, $z \in Z$

$\begin{cases} f(z) \leq c \\ \forall t \in \,]z,y], \ f(t) > c \end{cases}$

or, $f(y) = b > c$ donc $y \neq z$ donc $]z,y] \neq \emptyset$

$\exists \ u \in \,]z,y]^{\mathbb{N}}$ qui converge vers z

$\forall n \in \mathbb{N}, \ f(u_n) > c$

par passage à la limite (f continue en z, $\lim u = z$)

$f(z) \geq c$, donc $\exists \ z \in [x,y] \ / \ f(z) = c$ $\quad c \in f(I)$

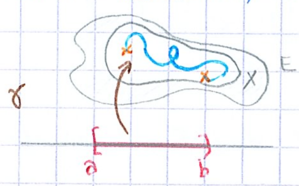
corollaires : c 1) si $\begin{cases} f \text{ continue sur l'intervalle } I \\ (x,y) \in I^2 \\ f(x) \, f(y) < 0 \end{cases}$ alors $\exists \ z \in \,]x,y[\ / \ f(z) = 0$

c 2) si $\begin{cases} f \text{ continue sur l'intervalle } I \\ \forall x \in I, \ f(x) \neq 0 \end{cases}$ alors $f(I) \in \mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$

c 3) si $\begin{cases} I \text{ segment} \\ f \text{ continue sur } I \end{cases}$ alors $f(I)$ segment

E ev normé de dim finie $\quad X \subset E$

arc (chemin) γ de X : application continue γ d'un intervalle $[a,b]$ dans E avec $\gamma([a,b]) \subset X$

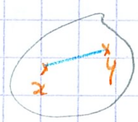


$\gamma(a)$, $\gamma(b)$: extrémités de l'arc

non connexe par arcs

X connexe par arcs $\iff$ $\forall (x,y) \in X^2$, $\exists$ un arc γ de X, d'extrémités x et y

Pp 1) Tout convexe de E est connexe par arcs



$\gamma : \begin{vmatrix} [0,1] \longrightarrow E \\ t \longmapsto (1-t)x + ty \end{vmatrix}$

2) les ss-ensembles de $\mathbb{R}$ connexes par arcs sont les intervalles

soit $X \subset \mathbb{R}$ connexe par arcs :

$\forall (x,y) \in X^2, \ \begin{cases} \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est continue} \\ \gamma(a) = x, \ \gamma(b) = y \\ \gamma([a,b]) \subset X \end{cases}$

T.V.I *: $[x,y] \subset \gamma([a,b]) \subset X$ donc X intervalle

* $\overset{(x,y)}{\overset{\shortparallel}{(\gamma(a), \gamma(b))}} \in [\gamma(a), \gamma(b)]^2$ donc $[\gamma(a), \gamma(b)] \subset [\gamma(a), \gamma(b)]$

3) $\begin{cases} X \subset E \text{ connexe par arcs} \\ f : X \longrightarrow F \text{ continue} \end{cases} \implies f(X)$ connexe par arcs

$\forall (x', y') \in f(X)^2, \ \exists (x,y) \in X^2 \ / \begin{cases} f(x) = x' \\ f(y) = y' \end{cases}$

X connexe par arcs : $\exists \ \gamma : [a,b] \longrightarrow E$

avec $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$, $\gamma([a,b]) \subset X$
$f \circ \gamma : [a,b] \to F$ est continue par composition
$f \circ \gamma(a) = f(x) = x'$ $\quad f \circ \gamma(b) = f(y) = y'$
$f \circ \gamma([a,b]) = f(\gamma([a,b])) \subset f(X)$

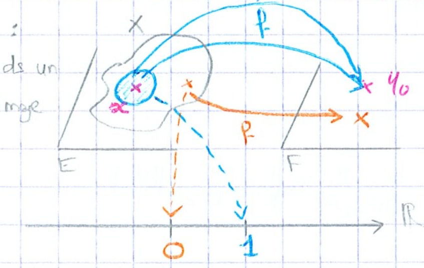
T.V.I généralisé :
$\begin{cases} X \subset E \text{ connexe par arcs} \\ f : X \to \mathbb{R} \text{ continue} \end{cases}$ $\quad f$ possède la Pp) du TVI :
$\forall (x,y) \in X^2, \forall c \in [f(x), f(y)],$
$\exists z \in X \,/\, f(z) = c$

$f(X)$ connexe par arcs de $\mathbb{R}$ Pp 3)
donc $f(X)$ intervalle Pp 2)

$\begin{cases} X \subset E, \text{ connexe par arcs}, \; X \neq \emptyset \\ f : X \to F \end{cases}$

f localement constante sur X $\Longrightarrow$ f constante sur X

f loc cste : ts les pts ds un U_x ont m̂ image



f local^{mt} cste $\Rightarrow f$ continue
soit $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in F$ $\quad \varphi : \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = y_0 \\ 0 & \text{si } f(x) \neq y_0 \end{cases} \end{array}$
f local^{mt} cste $\Rightarrow \varphi$ local^{mt} cste
donc φ continue et X connexe par arcs
donc $\varphi(X)$ est un intervalle
or, $\varphi(X) \subset \{0,1\}$ donc $\varphi(X) = \{1\}$ $\quad \exists x_0$ au moins $/ f(x_0) = y_0$
$\forall x \in X$, $f(x) = y_0 = f(x_0)$ $\quad$: f = cste

application 1) $\begin{cases} X \subset E \text{ connexe par arcs}, \\ U \subset X \end{cases}$

U ouvert et fermé dans X $\Longrightarrow$ $U = \emptyset$ ou $U = X$

$\Rightarrow$ $V = X \setminus U$ est fermé et ouvert dans X
on pose $f : \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in V \end{cases} \end{array}$
U, V ouverts $\Rightarrow f$ loc cste sur X
X connexe par arcs $\Rightarrow$ f cste
$\begin{cases} \forall x \in X, f(x) = 1 \\ U = X \end{cases}$ ou $\begin{cases} \forall x \in X, f(x) = 0 \\ U = \emptyset \end{cases}$

2) les seuls ensembles de E à la fois ouvert et fermé sont E et $\emptyset$

15 _ séries dans un ev normé de dim finie

a - $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, ev normé de dim finie

* tes les normes de E sont équivalentes
* E est complet (car dim finie)

$u \in E^{\mathbb{N}}$ $\quad \sum u_n$: série de terme général u_n
suite des sommes partielles de la suite u $= \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$

* si $\sum u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge,

la somme de la série est la limite de la suite :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Pp 1) $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (x_{1,n}, \dots, x_{m,n}) \in \mathbb{K}^m \,/\, u_n = x_{1,n} e_1 + \dots + x_{m,n} e_m$
$\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow$ les $\sum x_{i,n}$ convergent
$\to$ séries des coordonnées
dans ce cas, les coord. de la somme sont les sommes des séries des coord.

2) $\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,$
$q > p \geq n_0 \Rightarrow \| u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_q \| < \varepsilon$

$\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge
$\Leftrightarrow$ est de Cauchy
car E est complet

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad q>p\geq n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{k=0}^{q} u_k - \sum_{k=0}^{p} u_k \right\| < \varepsilon$

3) $\sum u_n$ série de E,
si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge alors la série $\sum u_n$ converge
dans ce cas,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$$

$$\text{et}, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \|u_n\|$$

dans ce cas, on dit que la série $\sum u_n$ est absolum^t convergente

• $\sum \|u_n\|$ converge : $\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$,
$q>p\geq n_0 \Rightarrow \|u_{p+1}\| + \|u_{p+2}\| + \dots + \|u_q\| < \varepsilon$
$\Rightarrow \|u_{p+1} + \dots + u_q\| \leq \|u_{p+1}\| + \dots + \|u_q\| < \varepsilon$

donc $\sum u_n$ converge

• dans ce cas, pour $n_0 \in \mathbb{N}$,
$\forall n \in \mathbb{N} / n \geq n_0$, $\left\| \sum_{k=n_0}^{n} u_k \right\| \leq \sum_{k=n_0}^{n} \|u_k\|$

par passage à la lim : $\left\| \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \|u_k\|$

rem : abs conv $\Rightarrow$ conv
série semi-conv : série conv mais non abs conv

b. algèbre normée

$\mathcal{A}$ algèbre sur $\mathbb{K}$, N norme sur $\mathcal{A}$

N norme d'algèbre $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall (x,y) \in \mathcal{A}^2, & N(xy) \leq N(x)\,N(y) \\ N(1_{\mathcal{A}}) = 1 \end{cases}$

alors $(\mathcal{A}, N)$: algèbre normée

si $(\mathcal{A}, N)$ est une algèbre normée complète, alors $(\mathcal{A}, N)$ est une algèbre de Banach

ex : * $\| \ \| : \begin{vmatrix} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto \sup\{|P(x)| / x \in [0,1]\} \end{vmatrix}$

* $\mathcal{A} = \mathcal{L}_c(E)$ muni de $||| \ |||$ $\quad |||\varphi||| = \sup\left\{ \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} / x \in E \setminus \{0\} \right\}$

$\begin{cases} \forall (\varphi,\psi) \in \mathcal{A}^2, & |||\varphi \circ \psi||| \leq |||\varphi|||\,|||\psi||| \\ |||Id_E||| = 1 \end{cases}$

si E est de dim finie, $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}(E)$ est de Banach

* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

c. série dans une algèbre de dim finie (de Banach)

$\mathcal{A}$ alg. normée de dim finie

* série géométrique :

$a \in \mathcal{A}$, si $\|a\| < 1$ alors, $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & 0 \leq \|a^n\| \leq \|a\|^n \\ \|a\| < 1 & \text{donc } \sum \|a\|^n \text{ converge} \end{cases}$
donc $\sum \|a^n\|$ converge

donc $\sum a^n$ est abs conv

$$\text{et } (1-a)\sum_{n=0}^{\infty} a^n = (1-a) \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{+\infty} (1-a) \sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1}\right)$$

$= \lim_{+\infty} (1 - a^{n+1}) = 1$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ inversible à gauche

de m̂, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right)(1-a) = 1$ (inv. à droite)

$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ est inversible, d'inverse $1-a$ (réciproquem^t)

* série exponentielle :

$a \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\| \frac{1}{n!} a^n \right\| \leq \frac{\|a\|^n}{n!}$

$\sum \frac{\|a\|^n}{n!}$ converge, de somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|}$

donc $\sum \frac{1}{n!} a^n$ conv. absolum^t

on pose $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n$

$\|e^a\| \leq e^{\|a\|}$