I - Généralités

1. Rappels

- $\mathbb{C} = \{x + iy \ / \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$, $i^2 = -1$
- On résume les propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres complexes en disant que $(\mathbb{C}, +, \times)$ **est un corps commutatif.**
- L'écriture $z = x + iy$ est appelée **forme (ou écriture) algébrique** du complexe z ; x est la partie réelle et y la partie imaginaire de z.
- Si $z = x + iy$ on appelle **conjugué de z** le complexe $\bar{z} = x - iy$.

Théorème	
	$\bullet\ \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ $\bullet\ \bar{\bar{z}} = z$ $\bullet\ \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ $\quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ $\bullet$ (si $z \neq 0$) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ $\quad \overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\bar{z'}}{\bar{z}}$

Conséquence	
	• z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$ • z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

2. Interprétation géométrique des nombres complexes

- On appelle **plan complexe, P,** le plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormal direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
- L'application de $\mathbb{C}$ dans P qui, au nombre complexe $z = x + iy$, associe le point $M(x,y)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur P. z est appelé **affixe** de M.
- A $z = x + iy$ on associe également le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$; z est **l'affixe** du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- Si z est l'affixe de M et z' l'affixe de M' alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$.

II - Module d'un nombre complexe

Si $z = x + iy$ le produit $z\bar{z} = x^2 + y^2$ est un réel positif ou nul. On peut donc considérer $\sqrt{z\bar{z}}$

Définition	On appelle module du complexe $z = x + iy$ le réel positif ou nul $\lvert z \rvert = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$

Théorème	
	• Si $z = x + iy$ alors $\lvert z \rvert = \sqrt{x^2+y^2}$ • Si z est l'affixe de M, $\lvert z \rvert = OM = \lVert \overrightarrow{OM} \rVert$

Remarque	Si z est réel $\lvert z \rvert$ est la valeur absolue de z

ATTENTION Pour un réel $|z|^2 = z^2$; pour un complexe $|z|^2 = z\bar{z}$

Théorème	
	• $|z|^2 = z\bar{z}$
	• $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
dém *	• $|zz'| = |z|\,|z'|$
	• si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
(récu)	• $|z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{Z})$
(géom)	• $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
dém *	• $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

démonstration : *voir cours*

III - Complexes de module 1

1. Notation $e^{i\theta}$

Le cercle trigonométrique est :

• l'ensemble des points de coordonnées $\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$

• L'ensemble des points d'affixe de module 1 .

Théorème	Un complexe z est de module 1 si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$

ATTENTION	• θ n'est pas unique • θ est défini à 2π près, c'est-à-dire : $\cos\theta + i\sin\theta = \cos\theta' + i\sin\theta' \Leftrightarrow$ [il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$]

Notation	$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Remarque	l'ensemble des complexes de module 1 est l'ensemble des complexes de la forme $e^{i\theta}$

$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$

Exemples : $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i3\pi/2} = -i$, $e^{i2\pi} = 1$, $e^{-i\pi/2} = -i$

2. Formules d'Euler

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

Théorème	$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (Formules d'Euler)

3. Propriétés

Théorème	• Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ • Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$, $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ • Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

4. Exponentielle complexe

Définition	Soit $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ On pose : $e^z = e^x \times e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Théorème	• Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$, $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$, $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$ • Pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^z)^n = e^{nz}$

5. Exercices

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

(1) $e^{i\theta} = 1$, (2) $e^{i\theta} = -1$, (3) $e^{i\theta} = i$, (4) $e^{i\theta} = 0$

(5) $e^{i\theta} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, (6) $e^{i\theta} = 1 + i$

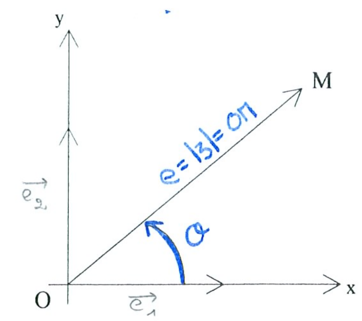
Exercice 2 : Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $e^z = 1 + i$

IV - Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

1. Définition

Si $z \in \mathbb{C}^*$, le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1 . Il existe donc θ, réel défini à 2π près, tel que $\dfrac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$.

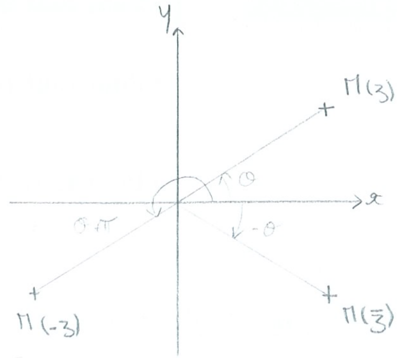
Théorème	Tout complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous la forme : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ (dite forme trigonométrique) • ρ, réel strictement positif, est le module de z • θ, défini à 2π près, est un argument de z Si $z \neq 0$ est l'affixe de $M \neq O$, $\rho = OM$ et θ est une mesure de l'angle $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$



ATTENTION — **0 n'a pas de forme trigonométrique**

Théorème

- $\rho e^{i\theta} = r e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r \\ \theta = \alpha + 2k\pi \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg z + 2k\pi$
- $\arg(-z) = \pi + \arg z + 2k\pi$
- $\arg(z z') = \arg z + \arg z' + 2k\pi$
- $\arg \frac{1}{z} = -\arg z + 2k\pi$
- $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' + 2k\pi$
- pour $n \in \mathbb{Z}$, $\arg z^n = n \arg z + 2k\pi$
- pour $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (formule de Moivre)



Exercice 1 Ecrire sous forme trigonométrique les complexes suivants :

-2 , i , $1-i$, $1+i\sqrt{3}$, $\cos\theta - i\sin\theta$, $-\cos\theta - i\sin\theta$, $\sin\theta + i\cos\theta$

Exercice 2 Traduire, en utilisant $\arg z$ les conditions suivantes : $z \in \mathbb{R}^*$, $z \in \mathbb{R}^*_-$, $z \in \mathbb{R}^*_+$

Exercice 3 Traduire, en utilisant Re(z) et Im(z), les conditions suivantes :

$\arg(z) = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, $\arg(z) = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, $\arg(z) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

84

Nombres complexes

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel :

supposons $\sqrt{2}$ rationnel : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} / q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}\}$

$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ avec $\text{pgcd}(p,q) = 1$

$p^2 = 2q^2$ donc p est pair donc $p = 2p_1$

$4p_1^2 = 2q^2$ soit $q^2 = 2p_1^2$ donc q est pair

on a p et q pairs ce qui est impossible car $\text{pgcd}(p,q) = 1$

{ un rationnel se caractérise par un nombre décimal présentant une période
{ un irrationnel .... ne présentant pas de période

cf poly. dém

$|zz'| = |z|\,|z'|$ | $|zz'|^2 = zz'\,\overline{zz'} = zz'\,\bar{z}\,\bar{z}' = z\bar{z}\,z'\bar{z}' = |z|^2\,|z'|^2$

donc $|zz'| = |z|\,|z'|$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ | $\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}$ donc $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

$|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ | $|z+z'|^2 = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}'$

$= |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z'$

$= |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\text{Re}(z\bar{z}')$

or, $\text{Re}(z\bar{z}') \leqslant |\text{Re}(z\bar{z}')| \leqslant |z\bar{z}'|$

$\leqslant |z|\,|z'|$

$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'|$

$\leqslant (|z| + |z'|)^2$

$\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$

III. ex :

1.
(1) $e^{i\theta} = 1 \iff e^{i\theta} = e^{i0} \iff \theta = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
(2) $e^{i\theta} = -1 \iff e^{i\theta} = e^{i\pi} \iff \theta = \pi\ [2\pi]$
(3) $e^{i\theta} = i \iff e^{i\theta} = e^{i\pi/2} \iff \theta = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
(4) $e^{i\theta} = 0$ pas de solution
(5) $e^{i\theta} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\pi/3} \iff \theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$
(6) $e^{i\theta} = 1+i$ pas de solution car $|e^{i\theta}| = 1$
$|1+i| = \sqrt{2}$

2. $e^z = 1+i \iff e^x(\cos y + i\sin y) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \iff \begin{cases} e^x = \sqrt{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln 2 \\ y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \iff z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$

IV. ex :

1.
$-2 = 2(-1) = 2e^{i\pi}$

$i = e^{i\pi/2}$

$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$

$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi/3}$

$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

$-\cos\theta - i\sin\theta = -(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\pi}e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$

$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = e^{i(\pi/2 - \theta)}$

2.
$z \in \mathbb{R}^{+*}$: $\arg z = 2k\pi \iff M \in\ ]Ox)$
$z \in \mathbb{R}^{-*}$: $\arg z = \pi + 2k\pi \iff M \in (x'O[$
$z \in \mathbb{R}^*$: $\arg z = k\pi \iff M \in (x'Ox) \setminus \{O\}$

3.
$\arg z = 2k\pi \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = z \\ \text{Im}(z) = 0 \end{cases}$

$\arg z = \pi + 2k\pi \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = -|z| \\ \text{Im}(z) = 0 \end{cases}$

$\arg z = k\pi \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = |z| \\ \text{Im}(z) = 0 \end{cases}$

$\arg z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = 0 \\ \text{Im}(z) = z \end{cases}$

$\arg z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = 0 \\ \text{Im}(z) = -z \end{cases}$

$\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = 0 \\ \text{Im}(z) = \pm|z| \end{cases}$

ex : Simplifier :

- $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2007} = \left(e^{-i\pi/3}\right)^{2007} = e^{-i\,669\pi} = e^{i\pi} = -1$
- $\frac{(1+i)^{34}}{(\sqrt{3}-i)^{20}} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{34}}{\left(2e^{-i\pi/6}\right)^{20}} = \frac{\sqrt{2}^{34}}{2^{20}}\,\frac{e^{i17\pi/2}}{e^{-i20\pi/3}} = \frac{2^{17}}{2^{20}}\,\frac{e^{i\pi/2}}{e^{i2\pi/3}} = \frac{1}{2^3}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{4\pi}{6}\right)}$
  $= \frac{1}{8}e^{-i\pi/6} = \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-i}{16}$

autre méthode : $(1+i)^{34} = \left[(1+i)^2\right]^{17} = (2i)^{17} = 2^{17}i = i\,2^{17}$

V Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe

1) Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

a) théorème

Pb : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit de résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = 1$, dont les solutions sont appelées racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

0 n'est pas solution de $z^n = 1$, on peut donc rechercher z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$.

$z^n = 1 \iff \rho^n e^{in\theta} = 1 = e^{i0} \iff \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \iff z = e^{2ik\pi/n} \quad (0 \leq k \leq n-1)$

rem : k et $k+n$ donnent 2 arguments du même complexe (car pour $k+n$, $\theta = \frac{2k\pi}{n} + 2\pi$) donc la même solution.
Pour obtenir toutes les solutions, on donne à k n valeurs consécutives dans $\mathbb{Z}$ (on obtient n solutions).

Th : soit $n \in \mathbb{N}^*$, 1 possède n racines $n^{\text{ièmes}}$:

$$\begin{cases} \omega_0 = 1 \\ \omega_1 = e^{i2\pi/n} \\ \omega_2 = e^{i4\pi/n} = \omega_1^2 \\ \vdots \\ \omega_k = e^{2ik\pi/n} = \omega_1^k \quad (0 \leq k \leq n-1) \\ \vdots \\ \omega_{n-1} = e^{i(n-1)2\pi/n} = \omega_1^{n-1} \end{cases}$$

rem : $S = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1} = 1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \dots + \omega_1^{n-1} = \frac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1}$
or, $\omega_1^n = 1$ donc $S = 0$
La somme des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 est nulle.

rem : $M_0(\omega_0)$, $M_1(\omega_1)$, $M_2(\omega_2)$, ..., $M_{n-1}(\omega_{n-1})$
$M_0M_1M_2\dots M_{n-1}$ est 1 polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.

b) cas particulier : $n=2$: racines carrées de 1

1 possède 2 racines carrées : 1 et -1

c) cas particulier : $n=3$: racines cubiques de 1

$z^3 = 1$ possède 3 solutions dans $\mathbb{C}$:

1

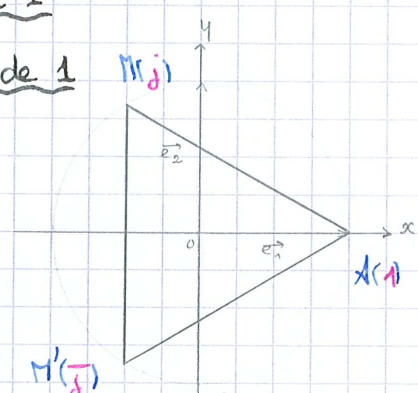
$e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$

$e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 = \bar{j}$

$1 + j + j^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\vec{OA} + \vec{OM} + \vec{OM'} = \vec{0} \iff O$ centre de gravité de AMM'



Th 1 possède 3 racines cubiques : $1, j, j^2$

$j = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$j^2 = \bar{j}$ $\quad j^3 = 1$ $\quad 1 + j + j^2 = 0$

rem : $j^{17} = (j^3)^5 j^2 = \bar{j}$ $\quad j^{-1} = j^{-1} j^3 = j^2 = \bar{j}$

$j^{36} = (j^3)^{12} = 1$ $\quad j^{-2} = j^{-2} j^3 = j$

$j^{19} = (j^3)^6 j = j$

d) cas particulier : $n = 4$

$z \neq 0$, $z = \rho e^{i\theta}$ $\quad z^4 = 1 \Leftrightarrow \rho^4 e^{i4\theta} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

on donne à k 4 valeurs consécutives

1 possède 4 racines 4$^{\text{èmes}}$: $1, i, -1, -i$

2) Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe

a) Théorèmes

Pb : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $Z \in \mathbb{C}$. Il s'agit de résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = Z$ (d'inconnue z), dont les solutions sont appelées racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z.

cas particulier : $Z = 0$ alors $z = 0$

dans la suite : $Z \neq 0$ $(z \neq 0)$

$Z = re^{i\alpha}$ $\quad (r, \alpha$ connues$)$

$z = \rho e^{i\theta}$

$z^n = Z \Leftrightarrow \rho^n e^{ni\theta} = re^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

d'où $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\alpha/n + 2k\pi/n)}$ $\quad 0 \leq k \leq n-1$

Th $Z = re^{i\alpha}$ possède n racines $n^{\text{ièmes}}$:

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\alpha/n} \\ z_1 = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\alpha/n + 2\pi/n)} \\ \vdots \\ z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\alpha/n + 2k\pi/n)} \quad (0 \leq k \leq n-1) \\ \vdots \\ z_{n-1} = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\alpha/n + 2(n-1)\pi/n)} \end{cases}$$

rem : $M_0(z_0) \ldots M_{n-1}(z_{n-1})$ sont les sommets d'un polygône régulier inscrit dans le cercle $\mathcal{C}(O, \sqrt[n]{r})$

rem : supposons connue α, 1 racine $n^{\text{ième}}$ de Z, alors, $\alpha^n = Z$

donc $z^n = Z \Leftrightarrow z^n = \alpha^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha} \in \{\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}\}$

Th soit α l'une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z.

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z s'obtiennent en multipliant α par les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1

ex :
- $z^3 = 27$ a pour racines $3, 3j$ et $3j^2$
- $z^4 = 625$ .... $5, 5i, -5, -5i$
- $z^4 = j$ .... $j, ij, -j, -ij$ soit $e^{i2\pi/3}, e^{i7\pi/6}, e^{i5\pi/3}, e^{i\pi/6}$

rem : si α est 1 racine $n^{\text{ième}}$ de Z, alors les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z sont : $\alpha\omega_0, \alpha\omega_1, \ldots, \alpha\omega_{n-1}$

La somme vaut : $\alpha(\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1}) = 0$

Ch | La somme des racines n-ièmes de Z est nulle

ex : 1. Résoudre (1) : $z^3 = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ dans $\mathbb{C}$

$$\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-i\pi/12}$$

$z \neq 0$, je pose $z = \rho e^{i\theta}$ $\quad (1) \Leftrightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-i\pi/12}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3\theta = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \\ \theta = -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

3 valeurs consécutives de k fournissent toutes les solutions :

$$z = \left\{ \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\,e^{-25\pi/36},\ \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\,e^{-i\pi/36},\ \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\,e^{23\pi/36} \right\}$$

2. Résoudre (2) : $z^6 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{3}-i}$ dans $\mathbb{C}$

$$\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}\,e^{3i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i11\pi/12}$$

$z \neq 0$, je pose $z = \rho e^{i\theta}$ $\quad (2) \Leftrightarrow \rho^6 e^{6i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{11\pi/12}$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \\ \theta = \frac{11\pi}{72} + \frac{k\pi}{3} = \frac{11\pi + 24k\pi}{72} \end{cases}$$

pour $k = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $z = \left\{ \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\,e^{-i37\pi/72},\ \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\,e^{-i13\pi/72},\ \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\,e^{11i\pi/12},\ \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\,e^{35i\pi/12},\ \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\,e^{59i\pi/12},\ \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\,e^{83i\pi/12} \right\}$

3) Cas particulier : racines carrées d'un complexe non nul

Pb : $a+ib$ est donné avec $a+ib \neq 0$
Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = a+ib$

rem : $a+ib$ a 2 racines opposées.

1er cas : $a+ib$ a 1 argument usuel :
on peut travailler sous forme trigonométrique.

ex : 1. $z^2 = 1+i$

je pose $z = \rho e^{i\theta}$ $\quad z^2 = 1+i \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^2 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

Les racines carrées de z sont : $\delta = \sqrt[4]{2}\,e^{i\pi/8}$ et $-\delta$

2. $z^2 = i$

$i = e^{i\pi/2} = (e^{i\pi/4})^2$ donc $\delta = e^{i\pi/4}$ et $-\delta$

2ème cas : $a+ib$ n'a pas d'argument usuel :
on recherche z sous la forme $z = x+iy$

$$z^2 = a+ib \Leftrightarrow (x+iy)^2 = a+ib \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ |(x+iy)^2| = |a+ib| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2} \\ xy \text{ du signe de } b \end{cases}$$

ex : 1. Résoudre (3) : $z^2 = 3+4i$

$$(x+iy)^2 = 3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

donc $z = \{2+i, -2-i\}$

2. Résoudre $z^2 = 7 - 24i$

$7 - 24i = (4-3i)^2$ Les racines sont $4-3i$ et $-4+3i$

3. Résoudre $z^2 = 4+3i$

$(x+iy)^2 = 4+3i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 3 \\ x^2+y^2 = \sqrt{16+9} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\delta = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $-\delta$

4) Application : équation du 2nd degré dans $\mathbb{C}$

Pb : a, b, c 3 complexes donnés avec $a \neq 0$
Résoudre dans $\mathbb{C}$ (1) : $az^2 + bz + c = 0$

(1) $\Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left[z + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

(1) $\Leftrightarrow \left[z + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{\overbrace{b^2 - 4ac}^{\Delta}}{4a^2} = 0$ $(\Delta \in \mathbb{C})$

Soient δ et $-\delta$ les racines de Δ

(1) $\Leftrightarrow \left[z + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) = 0$

Th : Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ possède 2 racines (éventuellement confondues) :
$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

cas particulier : a, b, c réels $(a \neq 0)$
alors $\Delta \in \mathbb{R}$

si $\Delta > 0$, l'équation a 2 racines réelles distinctes $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

si $\Delta = 0$, ... 1 racine double $\frac{-b}{2a}$

si $\Delta < 0$, $\Delta = -(-\Delta) = i^2(-\Delta) = [i\sqrt{-\Delta}]^2$
.... 2 racines complexes distinctes conjuguées
$\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

5) Exemples

a) résoudre dans $\mathbb{C}$ $x^2 + x + 1 = 0$
Les racines sont j et $\bar{j} = j^2$

b) résoudre dans $\mathbb{C}$ $x^2 - x + 1 = 0$
je pose $X = -x$: $X^2 + X + 1 = 0$ Les racines sont $-j$ et $-\bar{j}$

c) résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^2 = 1 + j^2$
$1 + j^2 = -j = i^2 j^4 = (ij^2)^2$ Les racines sont ij^2 et $-ij^2$

d) résoudre dans $\mathbb{C}$ $2iz^2 + (20 - 9i)z + 50i = 0$
$\Delta = 400 - 360i - 81 - 8i\,50i = 719 - 360i$
on recherche 1 racine carrée de Δ.

$(x+iy)^2 = 719 - 360i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 719 \\ 2xy = -360 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{719^2 + 360^2} = \sqrt{646561} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{719 + \sqrt{646561}}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{646561} - 719}{2} \\ xy < 0 \end{cases}$

1 racine carrée de Δ est :
$\delta = \sqrt{\frac{719 + \sqrt{646561}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{646561} - 719}{2}}$

L'équation a pour racines : $\frac{-20+9i+\delta}{4i}$ et $\frac{-20+9i-\delta}{4i}$

e <u>résoudre dans $\mathbb{C}$ $\quad z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$</u> (1)

je pose $Z = z^2$: $\quad Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0 \quad$ (2)

$\Delta = 25 - 140i - 196 + 8(5i+12) = -75 - 100i = 25(-3-4i) = 25(1-2i)^2$

$\delta = 5(1-2i) \qquad -\delta = 5(2i-1)$

Les solutions de (2) sont : $\dfrac{(5-14i)+5(1-2i)}{2} = 5-12i$, $\quad \dfrac{(5-14i)-5(1-2i)}{2} = -2i$

(1) $\iff$ ($z^2 = 5-12i \quad$ ou $\quad z^2 = -2i$)

$z^2 = (3-2i)^2 \quad$ ou $\quad z^2 = (1-i)^2$

$z = 3-2i \quad$ ou $\quad z = -3+2i \quad$ ou $\quad z = 1-i \quad$ ou $\quad z = -1+i$

solutions 2 à 2 opposées.

f <u>résoudre dans $\mathbb{C}$ $\quad z^6 + z^3 + 1 = 0$</u> (1)

je pose $Z = z^3$: $\quad Z^2 + Z + 1 = 0$ a pour racines j et $\bar{j}$

donc (1) $\iff$ ($z^3 = j \quad$ ou $\quad z^3 = \bar{j}$)

<u>résolution de $z^3 = j$</u> :

$z \neq 0$, $z = \rho e^{i\theta}$, $\quad z^3 = j \iff \rho^3 e^{3i\theta} = e^{i2\pi/3} \iff \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

$k = \{0, 1, 2\}$, $\quad z_0 = e^{i2\pi/9}$, $z_1 = e^{i8\pi/9}$, $z_2 = e^{i14\pi/9}$

<u>résolution de $z^3 = \bar{j}$</u> :

$z^3 = \bar{j} \iff \overline{z^3} = \bar{\bar{j}} \iff \bar{z}^3 = j$

donc les solutions sont : $\bar{z}_0 = e^{-i2\pi/9}$, $\bar{z}_1 = e^{-i8\pi/9}$, $\bar{z}_2 = e^{-i14\pi/9}$

(1) a 6 solutions : $\left\{ e^{i2\pi/9}, e^{i8\pi/9}, e^{i14\pi/9}, e^{-2i\pi/9}, e^{-i8\pi/9}, e^{-i14\pi/9} \right\}$

g <u>résoudre dans $\mathbb{C}$ $\quad (z+1)^6 - (z-1)^6 = 0$</u> (1)

<u>équation de degré 5</u>

(1) $\iff (z+1)^6 = (z-1)^6 \qquad$ 1 n'est pas racine donc (1) $\iff \begin{cases} z \neq 1 \\ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = 1 \end{cases}$

$\frac{z+1}{z-1}$ est 1 racine 6ème de 1

Les racines 6èmes de 1 sont $e^{ik2\pi/6} = e^{ik\pi/3}$ avec $k \in \{0, \dots, 5\}$

(1) $\iff \dfrac{z+1}{z-1} = e^{ik\pi/3}$ pour $k \in \{0, \dots, 5\}$

(1) $\iff z+1 = (z-1)e^{ik\pi/3} \iff z(1 - e^{ik\pi/3}) = -1 - e^{ik\pi/3} \iff \begin{cases} z = -\dfrac{1+e^{ik\pi/3}}{1-e^{ik\pi/3}} \\ k \neq 0 \end{cases}$

(1) $\iff z = -\dfrac{e^{ik\pi/6}\left[e^{-ik\pi/6} + e^{ik\pi/6}\right]}{e^{ik\pi/6}\left[e^{-ik\pi/6} - e^{ik\pi/6}\right]} = -\dfrac{2\cos\frac{k\pi}{6}}{-2i\sin\frac{k\pi}{6}} = -i\,\mathrm{cotan}\,\frac{k\pi}{6}$ pour $k \in \{1, \dots, 5\}$

solutions : $\begin{cases} z_1 = -i\,\mathrm{cotan}\,\frac{\pi}{6} = -i\sqrt{3} \\ z_2 = -i\,\mathrm{cotan}\,\frac{\pi}{3} = -i\frac{\sqrt{3}}{3} \\ z_3 = -i\,\mathrm{cotan}\,\frac{\pi}{2} = 0 \\ z_4 = -i\,\mathrm{cotan}\,\frac{2\pi}{3} = i\frac{\sqrt{3}}{3} \\ z_5 = -i\,\mathrm{cotan}\,\frac{5\pi}{6} = i\sqrt{3} \end{cases}$

<u>rem</u> : Les racines sont 2 à 2 opposées : on peut remplacer z par $-z$:

$(-z+1)^6 - (-z-1)^6 = [-(z-1)]^6 - [-(z+1)]^6 = (z-1)^6 - (z+1)^6$

et en multipliant par -1, on retombe sur (1)

h <u>résoudre dans $\mathbb{C}$ $\quad (z+i)^8 + (z-i)^8 = 0$</u> (1)

(1) $\iff (z+i)^8 = -(z-i)^8 \iff \begin{cases} \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^8 = -1 \\ z \neq i \end{cases}$

<u>résolution de $Z^8 = -1$</u> :

$Z \neq 0$, $Z = \rho e^{i\theta}$ $\quad Z^8 = -1 \iff \rho^8 e^{i8\theta} = e^{i\pi} \iff \begin{cases} \rho^8 = 1 \\ 8\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \end{cases}$

Les racines 8èmes de $\frac{z+i}{z-i}$ sont : $e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right)}$ pour $k \in \{0, \dots, 7\}$

(1) $\iff z+i = (z-i)e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)} \iff z\left(1 - e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)}\right) = -i\left(e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)} + 1\right)$

$\iff z = -i\,\dfrac{1 + e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)}}{1 - e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)}} = -i\,\dfrac{e^{i(\pi/16 + k\pi/8)}\left[e^{-i(\pi/16+k\pi/8)} + e^{i(\pi/16+k\pi/8)}\right]}{e^{i(\pi/16+k\pi/8)}\left[e^{-i(\pi/16+k\pi/8)} - e^{i(\pi/16+k\pi/8)}\right]}$

$$z = -i\,\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}\right)}{2i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}\right)} = -i\,\text{cotan}\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}\right) \quad \text{pour } k \in \{0,\dots,7\}$$

$$\begin{cases} z_0 = -\text{cotan}\,\frac{\pi}{16} \\ z_1 = -\text{cotan}\,\frac{3\pi}{16} \\ z_2 = -\text{cotan}\,\frac{5\pi}{16} \\ z_3 = -\text{cotan}\,\frac{7\pi}{16} \\ z_4 = -\text{cotan}\,\frac{9\pi}{16} \\ z_5 = -\text{cotan}\,\frac{11\pi}{16} \\ z_6 = -\text{cotan}\,\frac{13\pi}{16} \\ z_7 = -\text{cotan}\,\frac{15\pi}{16} \end{cases}$$

VI Applications trigonométriques

1) Expressions de $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Méthode → - on développe $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

1 ↳ à l'aide de la formule de Moivre

2 ↳ .... Newton

- on identifie parties réelles et imaginaires

$n=2$: $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$

$n=3$: $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, i\sin\theta + 3\cos\theta\, i^2\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left[3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right]$

$$\begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta \end{cases}$$

2) Linéarisation

Il s'agit de transformer $(\cos x)^p(\sin x)^q$ en une somme de $\sin kx$ et $\cos kx$

(→ permet de trouver des primitives)

Méthode → - si possible, on abaisse les exposants en utilisant $\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

1 → on utilise les formules d'Euler

2 → .... de trigonométrie (si l'exposant est petit)

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

et les formules de transformation d'un produit en somme

ex : 1. Calculer $A = \int \cos^6 x\, dx$

$$\cos^6 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}\left[\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k} e^{kix} e^{-(6-k)ix}\right]$$

$$= \frac{1}{2^6}\left[e^{-6ix} + 6e^{ix}e^{-5ix} + 15e^{2ix}e^{-4ix} + 20e^{3ix}e^{-3ix} + 15e^{4ix}e^{-2ix} + 6e^{5ix}e^{-ix} + e^{6ix}\right]$$

$$= \frac{1}{2^6}\left[2\cos 6x + 6e^{-4ix} + 15e^{-2ix} + 20 + 15e^{2ix} + 6e^{4ix}\right]$$

$$= \frac{1}{2^6}\left[2\cos 6x + 12\cos 4x + 30\cos 2x + 20\right]$$

$$= \frac{\cos 6x}{32} + \frac{3\cos 4x}{16} + \frac{15\cos 2x}{32} + \frac{5}{16}$$

$$A = \frac{\sin 6x}{192} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{5}{16}x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

2. Calculer $B = \int \cos^2 x \sin^4 x\, dx$

$$\cos^2 x\sin^4 x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \sin^2 x = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(e^{4ix}+e^{-4ix}-2\right)\left(e^{2ix}+e^{-2ix}-2\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left[e^{6ix}+e^{2ix}-2e^{4ix}+e^{-2ix}+e^{-6ix}-2e^{-4ix}-2e^{2ix}-2e^{-2ix}+4\right]$$

$$= \frac{1}{64}\left[2\cos 6x - 2\cos 2x - 4\cos 4x + 4\right]$$

$$= \frac{\cos 6x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{3}{32}\cos 2x + \frac{1}{16}$$

$$B = \frac{\sin 6x}{192} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 2x}{64} + \frac{1}{16}x + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

3) Exemples de transformation de sommes

a simplifier $C = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

$S = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

$$C + iS = 1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots e^{inx} = 1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \dots + (e^{ix})^n = \begin{cases} \dfrac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} & \text{si } e^{ix} \neq 1 \\ n+1 & \text{si } e^{ix} = 1 \end{cases}$$

$$e^{ix} = 1 \iff x \equiv 0 [2\pi]$$

1er cas : $x \equiv 0[2\pi]$ alors $\begin{cases} C = n+1 \\ S = 0 \end{cases}$

2ème cas : $x \not\equiv 0[2\pi]$ alors

$$C + iS = \frac{e^{ix\frac{n+1}{2}}\left[e^{-ix\frac{n+1}{2}} - e^{ix\frac{n+1}{2}}\right]}{e^{ix/2}\left[e^{-ix/2} - e^{ix/2}\right]} = e^{ix\frac{n}{2}} \frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

donc
$$\begin{cases} C = \cos\dfrac{nx}{2} \dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \\[2ex] S = \sin\dfrac{nx}{2} \dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \end{cases}$$

b simplifier $T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx$

$$T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{ix})^k - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{-ix})^k$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{ix}+1)^n - \frac{1}{2i}(e^{-ix}+1)^n = \frac{1}{2i}\left[e^{ix/2}(e^{ix/2}+e^{-ix/2})\right]^n - \frac{1}{2i}\left[e^{-ix/2}(e^{-ix/2}+e^{ix/2})\right]^n$$

$$= (e^{ix/2} + e^{-ix/2})^n \frac{e^{inx/2} - e^{-inx/2}}{2i} = 2^n\left(\cos\frac{x}{2}\right)^n \sin\frac{nx}{2}$$

méthode plus rapide : $T = \mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}\right] = \mathrm{Im}\left[(e^{ix}+1)^n\right] = \mathrm{Im}\left[e^{inx/2}(e^{ix/2}+e^{-ix/2})^n\right]$

$$= \mathrm{Im}\left[e^{inx/2}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n\right] = \sin\frac{nx}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n$$

VII Applications géométriques

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

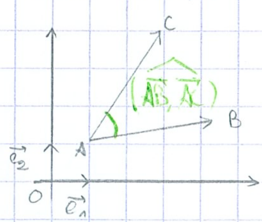
1) Mesures de $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$

Pb : $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ donnés $(A \neq B,\ A \neq C)$

Il s'agit de mesurer $(\vec{AB}, \vec{AC})$

angle — mesure

mesure de $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$: $(\vec{AB}, \vec{AC})$



$$(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = (\widehat{\vec{e_1}, \vec{AC}}) - (\widehat{\vec{e_1}, \vec{AB}})$$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg(c-a) - \arg(b-a) \quad [2\pi]$$

Th $$\boxed{(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg\frac{c-a}{b-a} \quad [2\pi]}$$

ex : 1. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ / $A(1)$, $M(z)$, $P(z^2)$ soient alignés.

cas général : $M \neq A$, $P \neq A \iff z \neq 1$ et $z \neq -1$

A, M, P alignés $\iff (\vec{AM}, \vec{AP}) \equiv 0[\pi] \iff \arg\dfrac{z^2-1}{z-1} \equiv 0[\pi]$

(Ce rapport existe car $z \neq 1$ et n'est pas nul car $z \neq 1$, $z \neq -1$)

$\Leftrightarrow \arg(z+1) \equiv 0\,[\pi] \quad \Leftrightarrow (z+1) \in \mathbb{R}^*$

je pose $z = x + iy$, $\quad (x+1+iy) \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{cases}$

cas particuliers: $(M = A$ ou $P = A) \Leftrightarrow (z = 1$ ou $z = -1)$

les 3 points sont alignés

conclusion: l'ensemble des points $M(z)$ est $x'Ox$.

2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ / $A(1)$, $M(z)$, $P(z^3)$ soient alignés.

cas général: $M \neq A$, $P \neq A \Leftrightarrow z \neq 1$, $z \neq j$, $z \neq j^2$

A, M, P alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) \equiv 0\,[\pi] \Leftrightarrow \arg \dfrac{z^3 - 1}{z - 1} \equiv 0\,[\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z^2+z+1) \equiv 0\,[\pi] \Leftrightarrow (z^2+z+1) \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow z^2+z+1 = \overline{z^2+z+1} = \bar{z}^2+\bar{z}+1 \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z} = 0$

$\Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}) + z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})[z+\bar{z}+1] = 0$

$\Leftrightarrow (z = \bar{z}$ ou $z + \bar{z} = -1)$

$\Leftrightarrow (z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ou $2x = -1)$

or, $x = -\frac{1}{2}$ contient les points d'affixe j et j^2

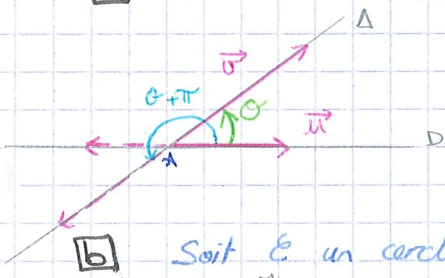
cas particuliers: $(M = A$ ou $P = A) \Leftrightarrow (z = 1$ ou $z = j$ ou $z = j^2)$

les 3 points sont alignés

conclusion: l'ensemble des points $M(z)$ est l'union de $x'Ox$ et $x = -\frac{1}{2}$.

2) Rappels et compléments de géométrie

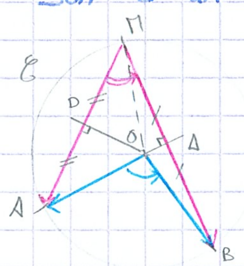
a Les mesures d'un angle de 2 vecteurs non nuls sont définies à 2π près.



Les mesures d'un angle de 2 droites sont définies à π près.

b Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, soient A, B, M 2 à 2 distincts de $\mathcal{C}$.

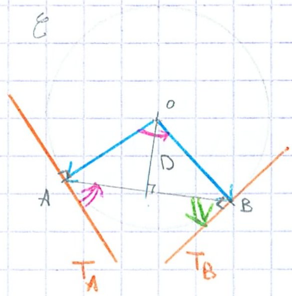
Pb: Comparer $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.



$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) &= (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}}) \\
&= 2(\widehat{D, \overrightarrow{OM}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{OM}, \Delta}) \\
&= 2(\widehat{D, \Delta}) \\
&= 2(\widehat{D, \overrightarrow{MA}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{MB}, \Delta}) \\
&= \pi\,[2\pi] + 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \pi\,[2\pi] \\
&= 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})
\end{aligned}$$

c $M \to A$

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, soient A, B 2 points distincts de $\mathcal{C}$.



$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) &= 2(\widehat{\overrightarrow{OA}, D}) \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{OA}, T_A}) + 2(\widehat{T_A, \overrightarrow{AB}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, D}) \\
&= 2\left(\tfrac{\pi}{2}\,[\pi]\right) + 2(\widehat{T_A, \overrightarrow{AB}}) + 2\left(\tfrac{\pi}{2}\,[\pi]\right) \\
&= \pi\,[2\pi] + 2(\widehat{T_A, \overrightarrow{AB}}) + \pi\,[2\pi] \\
&= 2(\widehat{T_A, \overrightarrow{AB}})
\end{aligned}$$

de même, $M \to B$: $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, T_B})$

Th

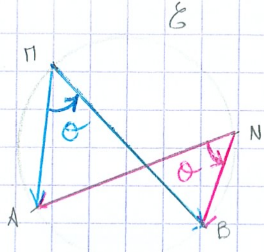
Soient A, B 2 points distincts de $\mathcal{C}$ de centre O

pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\quad \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$

avec les conventions:

- si $M = A$, $\quad \overrightarrow{MA} \to T_A$
- si $M = B$, $\quad \overrightarrow{MB} \to T_B$

conséquence :



Soient A, M, N, B 4 points cocycliques. $(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}})$ et $(\widehat{\vec{NA},\vec{NB}})$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$, donc :

$$(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = (\widehat{\vec{NA},\vec{NB}})$$

d réciproque :

hyp : Soient A, B, M, N 2 à 2 distincts / $(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = (\widehat{\vec{NA},\vec{NB}})$

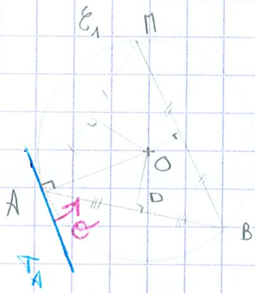
Pb : Que dire de A, B, M, N ?

Soit θ 1 mesure (définie à π près) de $(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}})$ et de $(\widehat{\vec{NA},\vec{NB}})$

1er cas : $\theta = k\pi$

alors, A, B, M, N sont alignés

2ème cas : $\theta \neq k\pi$



→ - A, B, M ne sont pas alignés

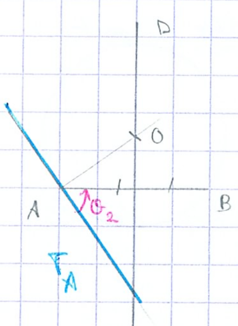
- Soit $\mathcal{E}_1$ le cercle circonscrit au triangle ABM.
(de centre l'intersection des médiatrices).

méthode pour obtenir O sans utiliser M :

* $O \in D$
* $O \in (\perp T_A)_A$

O est l'intersection de la médiatrice au segment [AB] et de la perpendiculaire à la tangente en A à $\mathcal{E}_1$.

$\mathcal{E}_1$ est entièrement caractérisé par A et O.



→ A, B, N ne sont pas alignés

- Soit $\mathcal{E}_2$ passant par A, B, N.
  - $O \in D$
  - $\theta_2 = \theta$ $O \in (\perp T_A)_A$

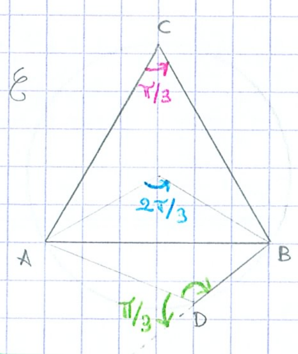
→ $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$

Th : Soient A, B, M, N 2 à 2 distincts, A, B, M, N sont alignés ou cocycliques ssi :

$$(\widehat{MA, MB}) = (\widehat{NA, NB})$$

rem : il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons d'écrire cette condition ($(\widehat{\vec{AB},\vec{AM}}) = (\widehat{\vec{NB},\vec{NM}})$)
on a choisi B et M

ex : Soit ABC équilatéral direct



$(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) = (\widehat{\vec{DA},\vec{DB}})$

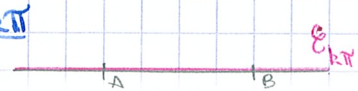
$\left\{ M \,/\, (\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi] \right\} = \mathcal{E} \setminus \{A, B\}$

e un 1er ensemble de points :

Pb : A, B 2 points distincts, $\theta \in \mathbb{R}$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_\theta = \{ M \,/\, (\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) \equiv \theta [\pi] \}$

1er cas : $\theta = k\pi$

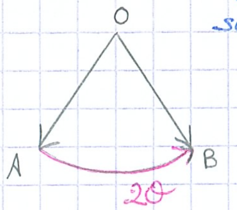


$\mathcal{E}_{k\pi} = (AB) \setminus \{A, B\}$

$2^{\text{ème}}$ cas : $\theta \neq k\pi$

$\mathcal{E}_\theta$ est 1 cercle (privé de A et B)

soit O son centre.



O est le centre de la rotation d'angle de mesure 2θ, transformant A en B.

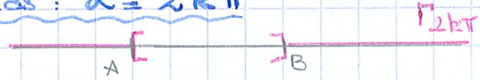
$R_{O,2\theta}(A) = B$

$\boxed{f}$ un $2^{\text{ème}}$ ensemble de points :

Pb : A, B 2 points distincts, $\alpha \in \mathbb{R}$

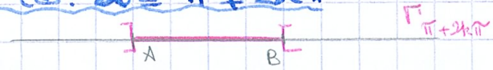
Déterminer l'ensemble $\Gamma_\alpha = \{M \,/\, (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \alpha\,[2\pi]\}$

1^{er} cas : $\alpha = 2k\pi$



$\Gamma_{2k\pi} = (AB) \setminus [AB]$

$2^{\text{ème}}$ cas : $\alpha = \pi + 2k\pi$



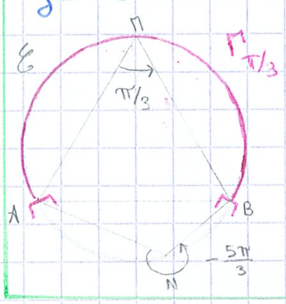
$\Gamma_{\pi+2k\pi} = [AB] \setminus \{A, B\}$

$3^{\text{ème}}$ cas : $\alpha \neq k\pi$

On obtient 1 arc d'extrémités AB du cercle $\mathcal{E}_\alpha$.

ex : 1. $A \neq B$. Construire $\Gamma_{\pi/3} = \{M \,/\, (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]\}$

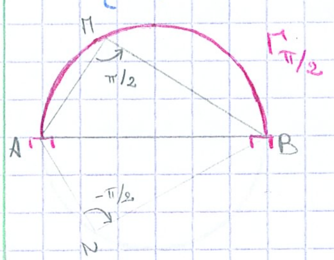
- je construis $\mathcal{E} = \{M \,/\, (\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]\}$



$\Gamma_{\pi/3}$ est l'arc d'extrémités AB du cercle $\mathcal{E}$.

2. Construire $\Gamma_{\pi/2} = \{M \,/\, (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\}$

$\mathcal{E} = \{M \,/\, (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\}$ est le cercle de diamètre [AB] privé de A et B



3) Condition nécessaire et suffisante pour que 4 points soient alignés ou cocycliques

A(a), B(b), M(m), N(n) 4 points 2 à 2 distincts.

A, B, M, N sont cocycliques ou alignés ssi : $\widehat{(MA, MB)} = \widehat{(NA, NB)}$

$\Leftrightarrow (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv (\vec{NA}, \vec{NB})\,[\pi]$ $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-m}{a-m}\right) = \arg\left(\frac{b-n}{a-n}\right)\,[\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-m}{a-m}\right) - \arg\left(\frac{b-n}{a-n}\right) \equiv 0\,[\pi]$ $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-m}{a-m} \cdot \frac{a-n}{b-n}\right) \equiv 0\,[\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{b-m}{a-m} \cdot \frac{a-n}{b-n} \in \mathbb{R}^*$

ex : Déterminer l'ensemble des points M(z) / A(1), M(z), N(z²), P(z³) soient alignés ou cocycliques

cas général : $A \neq M$, $N \neq M$, $P \neq A$ et $P \neq M$ $\Leftrightarrow z \neq \{1, -1, 0, j, j^2\}$

$(NA, NM) \equiv (PA, PM)$ $\iff$ $(\vec{NA},\vec{NM}) \equiv (\vec{PA},\vec{PM})\ [\pi]$

$\iff \arg\dfrac{z-z^2}{1-z^2} \equiv \arg\dfrac{z-z^3}{1-z^3}\ [\pi]$ $\iff \arg\dfrac{z(1-z)}{(1-z)(1+z)} - \arg\dfrac{z(1-z)(1+z)}{(1-z)(1+z+z^2)} \equiv 0\ [\pi]$

$\iff \arg\dfrac{z}{1+z}\,\dfrac{1+z+z^2}{z(1+z)} \equiv 0\ [\pi]$ $\iff \arg\dfrac{1+z+z^2}{(1+z)^2} \equiv 0\ [\pi]$

$\iff \dfrac{1+z+z^2}{(1+z)^2} \in \mathbb{R}^*$ $\iff \dfrac{1+z+z^2}{(1+z)^2} = \dfrac{1+\bar z+\bar z^2}{(1+\bar z)^2}$

$\iff (1+z+z^2)(1+2\bar z+\bar z^2) = (1+2z+z^2)(1+\bar z+\bar z^2)$

$\iff \cancel{1}+2\bar z+\cancel{\bar z^2}+z+\cancel{2z\bar z}+z\bar z^2+\cancel{z^2}+2z^2\bar z+\cancel{(z\bar z)^2} = \cancel{1}+\bar z+\cancel{\bar z^2}+2z+\cancel{2z\bar z}+2z\bar z^2+\cancel{z^2}+z^2\bar z+\cancel{(z\bar z)^2}$

$\iff \bar z + z\bar z^2 + 2z^2\bar z = z + 2z\bar z^2 + z^2\bar z$

$\iff (\bar z - z) + z\bar z(\bar z - z) + 2z\bar z(z - \bar z) = 0$

$\iff (\bar z - z) + z\bar z(\bar z - z) - 2z\bar z(\bar z - z) = 0$

$\iff (\bar z - z) - z\bar z(\bar z - z) = 0$

$\iff (\bar z - z)(1 - z\bar z) = 0$

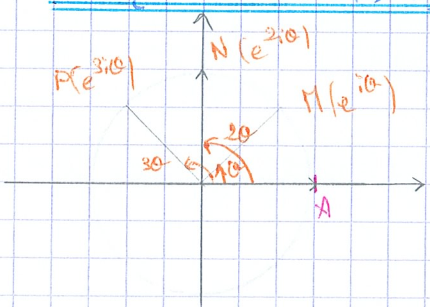
$\iff z = \bar z$ ou $z\bar z = 1$

$z \in \mathbb{R}$ ou $|z|^2 = 1$

donc $M \in x'Ox$ ou $M \in \mathcal{C}(O,1)$ (privé des 5 points).

Cas particuliers : si $z \in \{0, 1, -1, j, j^2\}$
alors, 2 points sont confondus
les 4 points, en fait 3, sont alignés ou confondus.

conclusion : $M \in \{x'Ox \cup \mathcal{C}(O,1)\}$



4) Représentation complexe d'une application géométrique

$\mathcal{P}$: plan affine euclidien orienté

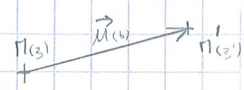
Soit $F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, $M(z) \longmapsto M'(z')$ avec $z' = f(z)$

f est appelée représentation complexe de F.

a) représentation complexe d'une translation

Soit $\vec u(b)$, soient $M(z)$, $M'(z')$

$t_{\vec u}(M) = M'$ $\iff$ $\vec{MM'} = \vec u$ $\iff$ $z' - z = b$



Th $\boxed{t_{\vec u(b)} \text{ a pour représentation complexe : } z' = z + b}$

ex : 1. Caractériser $t_{\vec u}$ avec $\vec u(4 - 3i)$.

$t_{\vec u}(M) = M'$ $\iff$ $\vec{MM'} = \vec u$ $\iff$ $z' - z = 4 - 3i$ $\iff$ $z' = z + 4 - 3i$

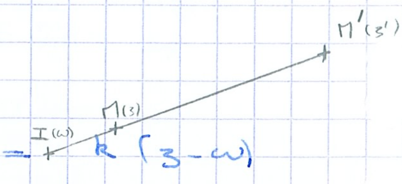
2. Que représente $z' = z - 1 + 2i$?

$t_{\vec u}$ avec $\vec u(-1+2i)$

b) représentation complexe d'une homothétie

$H_{I,k}$: homothétie de centre $I(\omega)$, de rapport k.

$H_{I,k}(M) = M'$ $\iff$ $\vec{IM'} = k\,\vec{IM}$ $\iff$ $z' - \omega = k(z - \omega)$



$H_{I,k} \circ H_{I,k'} = H_{I,kk'}$

Th $\boxed{H_{I,k} \text{ a pour représentation complexe : } z' - \omega = k(z - \omega)}$

Une représentation complexe de $H_{I,k}$ est de la forme :

$z' = kz + z_0$ (avec $k \in \mathbb{R}$, $z_0 = -k\omega + \omega \in \mathbb{C}$)

<u>réciproque</u> : Que représente $z' = kz + z_0$?

Soit $F : M(z) \longrightarrow M'(z')$

points invariants : $F(M) = M \iff z = kz + z_0 \iff z(1-k) = z_0$

<u>1er cas : $k = 1$</u> $\quad z' = z + z_0$ donc $F = t_{\vec{u}(z_0)}$

<u>2ème cas : $k \neq 1$</u>

F possède 1 unique invariant. $I\left(\omega = \frac{z_0}{1-k}\right)$

donc ω vérifie : $\omega = k\omega + z_0$

ainsi, $z' = kz + z_0 \iff z' - \omega = k(z - \omega) \iff$

donc $F = H_{I,k}$

$k \in \mathbb{R}$, on peut multiplier un vecteur par 1 réel, $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$

ex : 1. Caractériser $H_{I,-3}$ avec $I(2+5i)$

$H_{I,-3}(M) = M' \iff \overrightarrow{IM'} = -3\,\overrightarrow{IM} \iff z' - 2 - 5i = -3(z - 2 - 5i)$

$\iff z' = -3z + 6 + 15i + 2 + 5i = -3z + 8 + 20i$

2. Caractériser $F : M(z) \longrightarrow M'(z')$ avec $z' = 2z + 6i$

$F(M) = M \iff z = 2z + 6i \iff z = -6i$

ainsi, $z' = 2z + 6i \iff z' - (-6i) = 2(z + 6i) \iff \overrightarrow{IM'} = 2\,\overrightarrow{IM}$

avec $I(6i)$

donc $F = H_{I,2}$

C représentation complexe d'une rotation

$R_{I,\theta}$: rotation de centre $I(\omega)$, d'angle de mesure $\theta\ [2\pi]$

$R_{I,\theta}(M) = M' \iff \begin{cases} \|\overrightarrow{IM'}\| = \|\overrightarrow{IM}\| \\ (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \theta\ [2\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} = \theta\ [2\pi] \end{cases} \iff \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$

Th $R_{I,\theta}$ a pour représentation complexe $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$

donc $z' = e^{i\theta} z + \underbrace{\omega(1 - e^{i\theta})}_{z_0}$

Une représentation complexe de $R_{I,\theta}$ est de la forme. $z' = e^{i\theta} z + z_0$

<u>réciproque</u> : Reconnaître $F : M(z) \longrightarrow M'(z')$ avec $z' = e^{i\theta} z + z_0$

points invariants : $F(M) = M \iff z = e^{i\theta} z + z_0 \iff z(1 - e^{i\theta}) = z_0$

<u>1er cas : $e^{i\theta} = 1$</u> $\quad z' = z + z_0$ donc $F = t_{\vec{u}(z_0)}$

<u>2ème cas : $e^{i\theta} \neq 1$</u>

F possède 1 unique invariant : $I\left(\omega = \frac{z_0}{1 - e^{i\theta}}\right)$

donc ω vérifie : $\omega = e^{i\theta}\omega + z_0$

ainsi, $z' = e^{i\theta} z + z_0 \iff z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

donc $F = R_{I(\omega),\theta}$

ex : 1. Caractériser $R_{I(1+i), \frac{\pi}{4}}$

$z' - 1 - i = e^{i\pi/4}(z - 1 - i) \iff z' = e^{i\pi/4} z + (1+i)\left[1 - e^{i\pi/4}\right]$

$\iff z' = e^{i\pi/4} z + (1+i)\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)z + \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

$\iff z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z + 1 + (1 - \sqrt{2})i$

2. $R_{0,\pi/2}$: $z'=iz$ $\quad$ $R_{0,\pi}$: $z'=-z$ $\quad$ $R_{0,\frac{2\pi}{3}}$: $z'=jz$

$z'=j^2z$: $R_{0,-\frac{2\pi}{3}}$

5) Similitude directe

a) définition

$s: \begin{cases} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ M(z) \longmapsto M'(z') \end{cases}$ avec $z'=az+b$ $(a\in\mathbb{C}^*, b\in\mathbb{C})$ est une similitude directe.

Une translation, une homothétie, une rotation sont des similitudes directes.

b) propriétés

si $a\neq 0$, $z'=az+b \iff z=\frac{1}{a}z'-\frac{b}{a}$

Th Une similitude directe s est bijective
s^{-1} est 1 similitude directe

soit s_1 : $z'=a_1z+b_1$ $(a_1\neq0)$
s_2 : $z'=a_2z+b_2$ $(a_2\neq0)$

$M(z) \xrightarrow{s_1} M_1(a_1z+b_1) \xrightarrow{s_2} M_2(a_2(a_1z+b_1)+b_2)$

$s_2\circ s_1$: $z''=a_2a_1z+a_2b_1+b_2$ $\quad$ $(a_2a_1\neq0)$

Th La composée de 2 similitudes directes est 1 similitude directe

c) forme géométrique d'une similitude directe

s : $M(z)\longrightarrow M'(z'=az+b)$ $(a\neq0)$ a-t-elle des points invariants ?

$s(M)=M \iff z=az+b \iff z(1-a)=b$

1er cas : $a=1$

$z'=z+b$ donc $s=t_{\vec{u}(b)}$

2ème cas : $a\neq1$

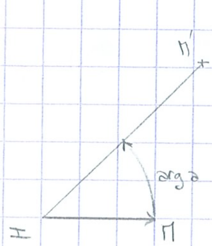
s a 1 unique invariant $I\left(\omega=\frac{b}{1-a}\right)$

ω vérifie $\omega=a\omega+b$

donc $z'=az+b \iff z'-\omega=a(z-\omega)$

pour $z\neq\omega$: $z'=az+b \iff \begin{cases} |z'-\omega|=|a||z-\omega| \\ \arg(z'-\omega)\equiv\arg a+\arg(z-\omega)\ [2\pi] \end{cases}$

$\iff \begin{cases} |z'-\omega|=|a||z-\omega| \\ \arg\frac{z'-\omega}{z-\omega}\equiv\arg a\ [2\pi] \end{cases}$



donc $M'=s(M) \iff \begin{cases} IM'=|a|\,IM \\ (\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'})\equiv a\ [2\pi] \end{cases}$

donc $s=H_{I,|a|}\circ R_{I,\arg a}=R_{I,\arg a}\circ H_{I,|a|}$

Th s : $z'=az+b$
si $a=1$: $s=t_{\vec{u}(b)}$
si $a\neq1$: s a 1 unique invariant I
s est la composée commutative de $H_{I,|a|}$ et $R_{I,\arg a}$,
$s_{I,|a|,\arg a}$ est la similitude directe :
- de centre I
- de rapport $|a|$
- d'angle $\arg a$

d) exemples

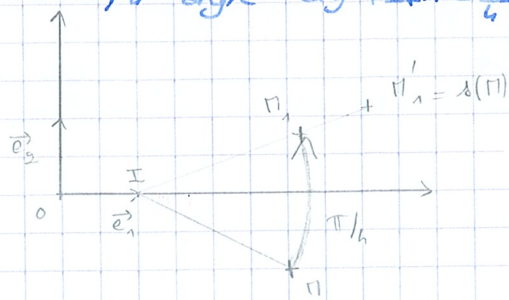
1. Reconnaître $z'=(1+i)z-i$, $z'=-j^2z-1$, $z'=-2z+3$, $z'=(1-i\sqrt{3})z+\sqrt{3}$

* $s: z' = (1+i)z - i$ $\quad$ s est 1 similitude directe

$s(I) = I \iff z = (1+i)z - i \iff z(1-(1+i)) = -i \iff z = 1$

s est la similitude directe | de centre $I(1)$ | de rapport $|1+i| = \sqrt{2}$ | d'angle $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$s = H_{I,\sqrt{2}} \circ R_{I,\frac{\pi}{4}}$



* $s: z' = -j^2 z - 1$

$s(I) = I \iff z = -j^2 z - 1 \iff z(1+j^2) = -1 \iff -jz = -1 \iff z = \frac{1}{j} = j^2$

s est la similitude directe | de centre $I(j^2)$ | de rapport $|-j^2| = 1$ | d'angle $\arg(-j^2) = \frac{\pi}{3}$

s est donc la rotation de centre I, d'angle $\frac{\pi}{3}$: $s = R_{I,\frac{\pi}{3}}$

* $s: z' = -2z + 3$

$s(I) = I \iff z = -2z + 3 \iff z = 1$

rapport : $|-2| = 2$

angle : $\arg(-2) = \pi$ $\qquad s = H_{I,2} \circ R_{I,\pi} = H_{I,2} \circ H_{I,-1} = H_{I,-2}$

* $s: z' = (1-i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$

$s(I) = I \iff z(1-1+i\sqrt{3}) = \sqrt{3} \iff z = \frac{1}{i} = -i$

rapport : $|1-i\sqrt{3}| = 2$

angle : $\arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ $\qquad s = H_{I,2} \circ R_{I,-\frac{\pi}{3}}$

2. Définir s dans les cas suivants :

* $I(1)$, rapport $\frac{1}{2}$, angle $\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ $\qquad \underbrace{z'-1}_{\text{affixe de } \vec{IM'}} = e^{i\pi/4}\,\frac{1}{2}\,\underbrace{(z-1)}_{\text{affixe de } \vec{IM}}$

$\iff z' = \frac{1}{2}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}(z-1) + 1$

$\iff z' = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}z + 1 - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}$

* $I(i)$, rapport 4, angle $\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ $\qquad z' - i = 4e^{i\pi/3}(z-i)$

$\iff z' = i + 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-i)$

$= i + (2 + 2i\sqrt{3})(z-i)$

$= (2+2i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i$

e) autres exemples

1. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant : $\arg\frac{z-2}{z+i} = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (1)

Soient $A(2)$, $B(-i)$, il faut $z \neq 2$ et $z \neq -i$

(1) : $\arg\frac{2-z}{-i-z} = \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \iff (\vec{MB}, \vec{MA}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

L'ensemble des points M est un arc de cercle passant par A et B, centré en $I(\omega)$

I vérifie : $(\vec{IB}, \vec{IA}) = 2(\vec{MB}, \vec{MA}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

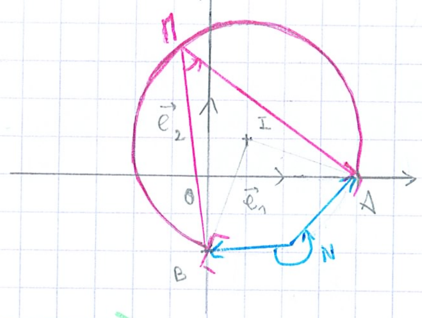
La rotation de centre I, d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme B en A.

$R_{I,\frac{\pi}{2}}$: $z' - \omega = e^{i\pi/2}(z-\omega) = i(z-\omega)$

or, $R_{I,\pi/2}(B) = A$ donc $B(z)$, $A(z')$: $2 - \omega = i(-i-\omega)$

$\iff \omega(-1+i) = 1 - 2$

$\iff \omega = \frac{-1}{i-1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$



l'ensemble des points M est l'arc de cercle supérieur, d'extrémité A et B (A, B exclus)

(si on avait eu $[\pi]$, on aurait obtenu tout le cercle privé de A, B)
(si on avait eu $\left[-\frac{3\pi}{4}\right]$, ... l'arc de cercle inférieur privé de A, B)

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant : $\arg \dfrac{z-1}{z+i\sqrt{3}} = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ (1)

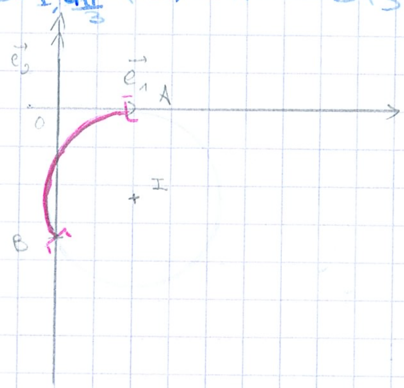
$z \neq 1$, $z \neq -i\sqrt{3}$ soient $A(1)$, $B(-i\sqrt{3})$

(1) : $\arg \dfrac{1-z}{-i\sqrt{3}-z} = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi] \iff (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

l'ensemble est un arc de cercle passant par A et B, centré en $I(\omega)$.

$R_{I,\frac{4\pi}{3}}$: $z' - \omega = e^{4i\pi/3}(z-\omega) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z-\omega)$

$R_{I,\frac{4\pi}{3}}(B) = A$ $\quad B(z)$, $A(z')$ $\quad 1 - \omega = -\dfrac{i\sqrt{3}+1}{2}(-i\sqrt{3}-\omega)$



$\iff \omega\left(-1 - \dfrac{i\sqrt{3}+1}{2}\right) = -1 + \dfrac{-3}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$\iff \omega = -\dfrac{\frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} - 1}{\frac{i\sqrt{3}+1}{2} + 1} = -\dfrac{-5+i\sqrt{3}}{2+1+i\sqrt{3}} = \dfrac{5-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}$

$\iff \underline{\omega} = \dfrac{12-8i\sqrt{3}}{12} = \underline{1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}i}$

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ / $\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)^4 \in \mathbb{R}$ (1)

$z \neq i$

cas particulier : $z = 1$, $M(1)$ vérifie (1)

cas général : $z \neq i$, $z \neq 1$

(1) $\iff \arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)^4 = k\pi \iff 4 \arg \dfrac{z-1}{z-i} = k\pi$

(1) $\iff \arg \dfrac{z-1}{z-i} = \dfrac{k\pi}{4} \iff \arg \dfrac{1-z}{i-z} = \dfrac{k\pi}{4}$

Soient $A(1)$, $B(i)$ $\quad$ (1) $\iff (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = k\dfrac{\pi}{4}$

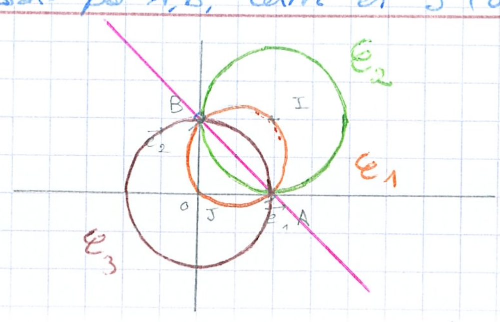
$$(1) \iff (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \begin{cases} 0\ [\pi] & (2) \\ \frac{\pi}{4}\ [\pi] & (3) \\ \frac{\pi}{2}\ [\pi] & (4) \\ \frac{3\pi}{4}\ [\pi] & (5) \end{cases}$$

(2) donne $M \in (AB) \setminus \{A, B\}$

(4) donne $M \in$ cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB] \setminus \{A, B\}$

(3) $M \in \mathcal{C}_2$ passant par A, B, centré en $I(1+i) \setminus \{A, B\}$

(5) $M \in \mathcal{C}_3$ passant par A, B, centré en $J(0) \setminus \{A, B\}$



seul B est exclu

$M \in \{(AB), \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\} \setminus B$