$E, F$ ev normés sur $\mathbb{K}$, souvent $\mathbb{K} = E = F = \mathbb{R}$, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$

# I Suite de fonctions

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \to F$ $\quad (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : suite de fct°, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (F^A)^{\mathbb{N}}$

## 1_ convergences

### a_ convergence simple

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f$ (sur $A$) $\Leftrightarrow \forall x \in A, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$

ou

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$

on dit que $f$ est la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $A$

$f$ est unique

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. simplement sur $A \Leftrightarrow \exists f : A \to F / (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. simplement vers $f$

$X \subset A$, ........................ sur $X \Leftrightarrow \forall x \in X, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$

ex : * $A = E = F = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases} \end{vmatrix}$


$x \in \mathbb{R}$,

si $x > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{n_0} < x$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < x$ $\quad \left(\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < x\right)$

$\Rightarrow f_n(x) = 1$

$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1$

si $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$ $\quad (f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$

si $x < 0$, $f_n(x) = -f_n(-x) \to -1$

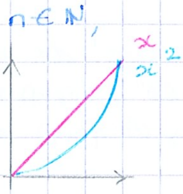
ccl : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ conv. simplt vers $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{vmatrix}$

rem : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$

$f$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

* $A = [0,1]$, $E = F = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

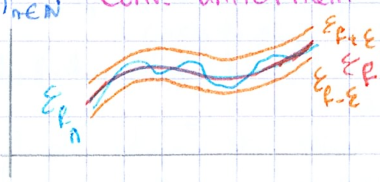
$f_n : \begin{vmatrix} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{vmatrix}$




$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ conv. simplt sur $[0,1]$ vers $f : \begin{vmatrix} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[ \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{vmatrix}$ ($n_0$ dépend pas de $x$, que de $\varepsilon$)

### b_ convergence uniforme

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. uniformément vers $f$ sur $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} /$ ou $\forall x \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$




$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$

à partir d'un certain rang, ttes les fct° sont comprises entre $\mathcal{E}_{f+\varepsilon}$ et $\mathcal{E}_{f-\varepsilon}$

Pp)1 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge unift (vers $f$) $\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (vers $f$)

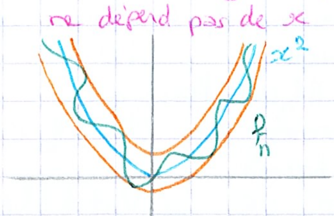
ex : $E = A = \mathbb{R} = F$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + \frac{\sin x}{n} \end{vmatrix}$

• soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^2$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. simplement vers $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$

but : trouver un majorant qui ne dépend pas de $x$

• $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin x}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$




donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge unift vers $f$

## c. convergence uniforme sur tout compact

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. unif$^t$ (vers $f$) sur tout compact
$\Leftrightarrow$ pour tout compact $C \subset A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. unif$^t$ (vers $f$) sur $C$

Pp) conv unif$^t$ sur tt compact $\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. simplem$^t$ (vers $f$)
$\{x\}$ compact,
$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ conv. vers $f(x)$

conv. uniforme $\Rightarrow$ conv. uniforme sur tt compact
$\Rightarrow$ conv. simple (CV unif plus forte que CV simple)

ex $f_n : \begin{array}{l} [0,1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. simplem$^t$ vers $f : \begin{array}{l} [0,1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$ $(x \neq 1)$

soit $C$ un compact de $[0,1[$,
$\sup C = a \in C \cap [0,1[$
$C \subset [0,a]$
$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in C, \quad |x^n| \leq a^n$
$0 \leq a < 1, \quad \lim_{+\infty} a^n = 0 \quad \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow a^n < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x\in[0,a], \quad |x^n| \leq a^n < \varepsilon$
$\Rightarrow \forall x\in C, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. unif$^t$ vers $f$ sur tt compact

## 2. propriétés

* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplem$^t$ (resp unif$^t$, unif$^t$ sur tt $C$) vers $f$ et $g$
$(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$,
alors, $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simpl$^t$ (resp. ...) vers $\lambda f + \mu g$
* $F = \mathbb{K}$
$(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge que simpl$^t$ vers $fg$

## 3. critères de convergence uniforme

### a. critère de Cauchy uniforme

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fct°, $f_n : A \to F$ ($F$ ev normé de dim finie) $n_0$ ne dépend pas de
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ sur $A$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,$
$(p\geq n_0 \text{ et } q\geq n_0) \Rightarrow \forall x\in A, \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$

intérêt : pas besoin de connaître $f$

$\Rightarrow$ soit $f$ la lim,
$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall p\in\mathbb{N}, p\geq n_0 \Rightarrow \forall x\in A, \|f_p(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, (p\geq n_0 \text{ et } q\geq n_0)$
$\Rightarrow \forall x\in A, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$

existence de la lim. Cauchy
puis espace complet

$\Leftarrow$ pour $x\in A$ fixé,
$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $F^{\mathbb{N}}$
$(\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, (p\geq n_0 \text{ et } q\geq n_0) \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon)$
donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ CV on note $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$
$((f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV simpl$^t$ vers $f)$
et $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, (p\geq n_0 \text{ et } q\geq n_0) \Rightarrow \forall x\in A, \|f_p(x) - f_q(x)\| <$
passage à la lim : $q\to+\infty$ $\forall p\in\mathbb{N}, p\geq n_0 \Rightarrow \forall x\in A, \|f_p(x) - f(x)\| <$
donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ vers $f$

### b. norme de la convergence uniforme

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ sur $A$ $\Leftrightarrow$ $\exists N\in\mathbb{N} / \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \Rightarrow f_n - f$ bornée
et $(\sup\{\|f_n(x) - f(x)\|_F, x\in A\})_{n\in\mathbb{N}} = (\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow \forall x\in A, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$
$\Rightarrow (f_n - f)$ bornée et $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ borne sup

norme sur $\mathcal{B}(A,F)$

$\Leftarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow \begin{cases} f_n - f \text{ bornée} \\ \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \forall x\in A, \|f_n(x) - f(x)\|_F <$

application : $A = I$ intervalle, $F = \mathbb{R}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$
plan d'étude : CV simple : $\forall x \in I$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$
tableau de var de $f_n - f$ : donne $\|f_n - f\|_\infty$
si $\to 0$ : cv unif

## 4- propriétés de la convergence uniforme

### a- limite

**th** $x_0 \in \bar{A}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fct° définies sur $A$, à valeurs dans $F$

on suppose : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ admet une limite } \ell_n \text{ en } x_0 : \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \ell_n(x) \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV unif}^t \text{ vers } f \text{ sur } A \end{cases}$

alors $\begin{cases} (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV (dans } F) & (1) \\ f \text{ admet une lim en } x_0 & (2) \\ \lim_{x_0} f = \lim_{n\to+\infty} \ell_n & (3) \end{cases}$

rem : il s'agit d'un th d'inversion de limites : $\lim_{x\to x_0}\Big(\overbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}^{f(x)}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\overbrace{\lim_{x\to x_0} f_n(x)}^{\ell_n(x)}\Big)$

crit. de Cauchy unif

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Rightarrow \forall x \in A, \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$

pass. lim : $p \to +\infty, q \to +\infty \Rightarrow \|\ell_p - \ell_q\| \leq \varepsilon$

donc $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans $F$
donc $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV

- on fixe un $n$ grâce à la CV unif
- on utilise $\lim_{x_0} f_{n_0} = \ell_{n_0}$

(2) * $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$
* $f_{n_0}$ admet la lim $\ell_{n_0}$ en $x_0$ :
$\exists \eta > 0 / \forall (x,x') \in A^2, \|x - x'\| < \eta \Rightarrow \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')\| < \frac{\varepsilon}{3}$

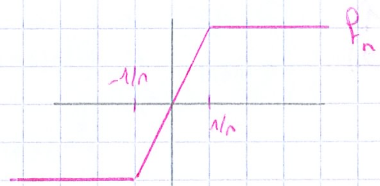
donc $\forall (x,x') \in A^2, \|x - x'\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| \leq \|f(x) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')\| + \|f_{n_0}(x) - f(x')\|$
$< \varepsilon$

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Rightarrow \forall x \in A, \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$

passage à la lim, $q \to +\infty$ $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in A, \|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$
$\Rightarrow \|\ell_p - \lim_{x_0} f\| \leq \varepsilon$

donc $\lim_{x_0} f = \lim_{p\to+\infty} \ell_p$

application * $n \geq 1$ : $f_n : \begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ -1 & x \leq -\frac{1}{n} \end{cases} \end{array}$




$(f_n)$ CV simpl$^t$ vers $f$ : $\begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0 = f(0)$
$f$ n'a pas de lim en $0$
} pas de CV unif

CV simp ⊄ CV sur tt C ⊄ CV unif

* $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{array}{l} [0,1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$

$(f_n)$ CV unif$^t$ sur tt C de $[0,1[$ vers $f : \begin{array}{l} [0,1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 1} f_n(x) = \lim_{x\to 1} x^n = 1$
$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$
} pas de CV unif sur $[0,1]$

si $x_0 = +\infty$, $A \subset \mathbb{R}$ non majorée, $\lim_{+\infty} f = \lim_{n\to+\infty} \ell_n$

### b- continuité

**th** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (F^A)^{\mathbb{N}}$, on suppose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} f_n \text{ continue sur } A \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV unif}^t \text{ vers } f \text{ sur } A \end{cases}$

alors $f$ est continue sur $A$

dém 1 | $x \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x' \to x} f_n(x') = f_n(x)$

alors, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ CV
$f$ admet une lim en $x$
$\lim_{x' \to x} f(x') = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

dém 2 | $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow \forall x' \in A$, $\|f_n(x') - f(x')\| < \frac{\varepsilon}{3}$
$f_{n_0}$ continue en $x$
$\exists \eta > 0 / \forall x' \in A$, $\|x - x'\| < \eta \Rightarrow \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall x' \in A$ $\|x - x'\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| \leq \|f(x) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')\| + \|f_{n_0}(x') - f(x')\|$
$< \varepsilon$

corollaire :
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (F^A)^{\mathbb{N}}$, on suppose : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & f_n \text{ continue sur } A \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} & \text{CV unif}^t \text{ vers } f \text{ sur tout compact de } A \end{cases}$
alors $f$ est continue sur $A$

critère séquentiel.
$x \in A$, $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ suite d'él$^{ts}$ de $A$ qui cv vers $x$
alors, $X = \{u_m / m \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact
$X \subset A$
donc $\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV unif}^t \text{ sur } X \\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } X \end{cases}$

$f_{/X} : \begin{vmatrix} X \to F \\ u \mapsto f_{/X}(u) = f(u) \end{vmatrix}$

la restrict° de $f$ à $X$ $f_{/X}$ est continue (th précédent)
~~donc $(f_{/X}(u_m))_{m\in\mathbb{N}}$~~ CV vers $f_{/X}(x)$
donc $(f(u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ CV vers $f(x)$ donc $f$ continue en $x$

## 5 _ propriétés de $\mathcal{B}(A,F)$

$\mathcal{B}(A,F)$ : ev des appli. bornées de $A$ ds $F$, muni de la norme sup
$\forall f \in \mathcal{B}(A,F)$, $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_F / x \in A\}$

Pp 1) $\mathcal{B}(A,F)$ est un ev normé **complet** (F complet) : $f$ bornée $\Rightarrow f_n$ de Cauchy CV

2) $\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{B}(A,F))^{\mathbb{N}} \\ f \in \mathcal{B}(A,F) \end{cases}$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ vers $f$ sur $A$ $\Leftrightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $f$ dans $(\mathcal{B}(A,F), \|\ \|_\infty)$

3) si $A$ est compact alors $C(A,F) \subset \mathcal{B}(A,F)$
ev des appli continues de $A$ ds $F$
et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (C(A,F))^{\mathbb{N}}$ CV vers $f$ (pour $\|\ \|_\infty$)
alors $f$ est continue : $f \in C(A,F)$
donc $C(A,F)$ est un fermé de $(\mathcal{B}(A,F), \|\ \|_\infty)$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'él$^{ts}$ de $C(A,F)$ CV ds $C(A,F)$

corollaire : $\begin{cases} f_n \text{ continue sur } A \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV vers } f \text{ pr } \|\ \|_\infty \overset{Pp\,2)}{\Leftrightarrow} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV unif}^t \text{ vers } f \text{ sur } A \end{cases}$

4) si $\begin{cases} F = \mathbb{K} \\ ((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in ((\mathcal{B}(A,\mathbb{K}))^{\mathbb{N}})^2 \end{cases}$
si $\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} & \text{CV unif}^t \text{ vers } f \\ (g_n)_{n\in\mathbb{N}} & \text{.......... } g \end{cases}$ alors $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .......... $fg$

$: \begin{vmatrix} (\mathcal{B}(A,F), \|\ \|_\infty) \times (\mathcal{B}(A,F), \|\ \|_\infty) \to (\mathcal{B}(A,F), \|\ \|_\infty) \\ (f, g) \mapsto fg \end{vmatrix}$ est $\begin{cases} \text{bilinéaire} \\ \text{continue} : \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty \end{cases}$ p.84+

$f_n$ cv unif vers $f$, CV vers $f$ ds $(\mathcal{B}(A,F), \|\ \|_\infty)$
$g_n$ .......... $g$ .......... $g$
donc $((f_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $(f, g)$ dans $(\mathcal{B}(A,F), \|\ \|_\infty)^2$
par continuité, $f_n g_n$ CV vers $fg$ dans $(\mathcal{B}(A,F), \|\ \|_\infty)$
d'où $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif vers $fg$ sur $A$

# II Série de fonctions

## 1 _ convergence simple

la série de fct° $\sum f_n$ CV simplem$^t$ sur $A$ (sur $X$)
$\Leftrightarrow$ $\exists S : A \to F$ $(X \to F)$ / $\forall x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ CV, de somme $S(x)$

$S$ est la somme sur $A$ de la série $\sum f_n$ (unique)

si $\sum f_n$ CV simplen$^t$ vers $S$,
on pose $\forall n \in \mathbb{R}$, $R_n = S - \sum_{k=0}^{n} f_k$

rem : la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV simplen$^t$ vers $0$

ex : $E = F = A = \mathbb{R}$
$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$

si $|x| > 1$, $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne CV pas vers 0
si $|x| < 1$, $\sum |x|^n$ CV donc $\sum x^n$ CV
si $x = 1$ $\sum x^n$ DV
si $x = -1$ $\sum x^n$ DV

$\sum f_n$ CV simplen$^t$ sur $]-1, 1[$ et a pour somme : $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

## 2 - convergence absolue

la série $\sum f_n$ CV absolum$^t$ sur $A$ ($X$)
$\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$, $\sum \|f_n(x)\|$ CV (série num à termes po[s]i)

Pp) $\sum f_n$ CV absolum$^t$ sur $A$ $\Longrightarrow$ $\sum f_n$ CV simplen$^t$ sur $A$

F est un Banach
$\sum u_n$ série d'él$^{ts}$ de F
$\sum \|u_n\|_F$ CV $\Rightarrow$ $\sum u_n$ CV
$\forall x \in A$, $\sum \|f_n(x)\|$ CV $\Rightarrow$ $\sum f_n(x)$ CV

rem : on pose $\|f_n\| : \begin{array}{l} A \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \|f_n(x)\| \end{array}$

fct°
$\neq \|f_n\|_\infty$ = scalaire

$\sum f_n$ CV abs$^t$ $\Leftrightarrow$ $\sum \|f_n\|$ CV simpl$^t$

ex : $E = F = A = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^n}{n} \end{array}$

si $|x| > 1$, $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne CV pas
si $|x| < 1$, $0 \leq \left|\frac{x^n}{n}\right| \leq |x|^n$, $\sum |x|^n$ CV
donc $\sum \left|\frac{x^n}{n}\right|$ CV
si $x = 1$, $\sum \frac{x^n}{n}$ DV (série harmonique)
si $x = -1$, $\sum \frac{x^n}{n}$ CV (pas abs$^t$) (série harmo alternée)

$\sum f_n$ CV / simpl$^t$ sur $[-1, 1[$
/ abs$^t$ sur $]-1, 1[$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV mais $\sum \frac{|-1|^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ ne CV pas

## 3 - convergence uniforme

$\sum f_n$ CV unif$^t$ sur $A$ ($X$, $\# C$ de $A$) vers $S$
$\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ vers $S$ sur $A$ ($X$, $\# C$ de $X$)

sur $A$, $X$, $\# C$ de $A$ :

Pp 1) $\sum f_n$ CV unif$^t$ vers $S$ $\Longrightarrow$ $\sum f_n$ CV simpl$^t$ vers $S$
2) $\Longrightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ vers $0$

$\forall x \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$
$f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ $\quad \left(S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)$
$= S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)$
$\|f_n(x)\| \leq \|S_n(x) - S(x)\| + \|S(x) - S_{n-1}(x)\|$
$\leq \|S_n - S\|_\infty + \|S_{n-1} - S\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

pour que $\|S_n(x) - S(x)\|$ soit borné, pour pouvoir passer à $\|S_n - S\|_\infty$

restes d'ordre n et n-1

### critères de convergence uniforme sur $A$, $X$, $\# C$ de $X$

① si $\sum f_n$ CV simpl$^t$ vers $S$,
$\sum f_n$ CV unif$^t$ vers $S$ $\Leftrightarrow$ $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ vers $0$

utile pour les séries alternées

CV simple : $R_n = S - S_n$
$n \geq n_0$, $\|0 - R_n\|_\infty = \|S - S_n\|_\infty \to 0$ CV unif

② critère de Cauchy uniforme
$\sum f_n$ CV unif$^t$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$
$q > p \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in A$, $\left\|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)\right\| < \varepsilon$

$\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) = S_q(x) - S_p(x)$

ex : $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^n}{n} \end{array}$ on a déjà : CV simple sur $[-1,1[$
CV abs sur $]-1,1[$

$\boxed{\text{Mq}}$ : $\sum f_n$ CV abs$^t$ sur tt $C$ de $]-1,1[$

$C$ compact de $]-1,1[$,
$\exists a \in \mathbb{R}^+ / C \subset [a,a] \subset ]-1,1[$
$\sum f_n$ CV abs$^t$ sur $[-a,a]$, on peut considérer $R_n$ :
$\forall x \in [-a,a]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$
et $|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k}$
$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ne dépend pas de $x$

donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ vers 0 sur $[-a,a]$
donc sur tt $C$

$\boxed{\text{Mq}}$ : $\sum f_n$ CV unif$^t$ sur $[-1,0]$

$\forall x \in [-1,0]$, $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\begin{cases} \text{alternée} \\ \text{CV vers } 0 \\ \left(\left|\frac{x^n}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{|x|^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \searrow \end{cases}$ donc $\sum \frac{x^n}{n}$ CV par le CSA

et $|R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ne dépend pas de $x$

donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CV unif$^t$ vers 0

## 4 – propriétés de la convergence uniforme

### a – limite

**th** $x_0 \in \bar{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \to F$
on suppose : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ admet la limite } \ell_n \text{ en } x_0 \\ \sum f_n \text{ CV unif}^t \text{ vers } S \text{ sur } A \end{cases}$ : $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \ell_n(x)$
alors $\begin{cases} \text{la série } \sum \ell_n \text{ CV} \\ S \text{ admet une lim en } x_0 \\ \lim_{x\to x_0} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n \end{cases}$

rem : th d'invers$^°$ de lim : $\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \ell_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \ell_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \lim_{x\to x_0} f_k(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ $\quad \sum \ell_n$ série des sommes partielles

### b – continuité

**th** $x_0 \in A$, on suppose : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue en } x_0 \\ \sum f_n \text{ CV unif}^t \text{ vers } S \text{ sur } A \end{cases}$
alors $S$ est continue en $x_0$

corollaire ① si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue sur } A \\ \sum f_n \text{ CV unif}^t \text{ vers } S \text{ sur } A \end{cases}$ alors $S$ est continue sur $A$

② ............................ sur tt compact de $A$ ................

ex : $S : \begin{array}{l} [-1,1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \end{array}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{array}{l} [-1,1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^n}{n} \end{array}$ est continue

(exo précédent) $\sum f_n$ CV unif$^t$ sur tt $C$ de $]-1,1[$ donc $S$ est continue sur $]-1,1[$
$[-1,0]$ compact de $]-1,1[$ ............ $[-1,0]$ ................................ $[-1,0]$
d'où $S$ continue sur $[-1,1[$ (on avait déjà sur $]-1,1[$)

## 5 – convergence normale (plus fort que la CV absolue)

$\sum f_n$ CV normalement sur $A$ $\iff$ $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{B}(A,F) \\ \sum \|f_n\|_\infty \text{ CV} \end{cases}$ $\quad \|f_n\|_\infty = \sup\{\|f_n(x)\|_F, x \in A\}$

$X \subset A$, ..................... sur $X$ $\iff$ $\sum f_{n/X}$ CV normal$^t$
$\left(\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \{\|f_n(x)\|, x \in X\} \text{ est borné} \\ \sum \sup\{\ \} \text{ CV} \end{cases}\right)$

## critère de convergence normale

$\sum f_n$ série de fct° définies sur $A$,
si $\begin{cases} \exists \text{ une suite réelle } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in X, \quad \|f_n(x)\|_F \leqslant \alpha_n \\ \sum \alpha_n \text{ CV} \end{cases}$
alors $\sum f_n$ CV normal$^t$ sur $A$

$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in X, \|f_n(x)\|_F \leqslant \alpha_n \implies \begin{cases} f_n \in \mathcal{B}(A,F) \\ 0 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n \end{cases}$

$\sum \alpha_n$ CV $\implies \sum \|f_n\|_\infty$ CV

récip : si $\sum f_n$ CV normal$^t$
alors, avec $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n = \|f_n\|_\infty$, on a $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in X, \quad \|f_n(x)\|_F \leqslant \alpha_n \\ \sum \alpha_n \text{ CV} \end{cases}$

**th** $\sum f_n$ CV normal$^t$ sur $A$ ($X$, $\forall$ C de $A$) $\implies \sum f_n$ CV $\begin{cases} \text{simpl}^t \\ \text{absol}^t \\ \text{unif}^t \end{cases}$ sur $A$ ($X$, $\forall$ C de $X$)

de plus, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{B}(A,F)$, $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$

* • $\sum f_n$ CV normal$^t$ $\quad \forall x\in A$, $0 \leqslant \|f_n(x)\|_F \leqslant \|f_n\|_\infty$
  donc $\sum \|f_n(x)\|_F$ CV
  donc $\sum f_n$ CV abs$^t$ sur $X$, donc simpl$^t$ sur $X$
  • $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2 \,/\, q>p$
  $\forall x\in X$, $\|S_q(x) - S_p(x)\|_F = \left\|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)\right\|_F \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \|f_k(x)\|_F \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \|f_k\|_\infty$
  $\leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ reste d'ordre $p$ d'une série CV ne dép. pas de $x$
  par le crit. de Cauchy unif,
  $\sum f_n$ CV unif$^t$ sur $A$
* $\forall x\in A, \forall n\in\mathbb{N}$, $\left\|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|f_k(x)\|$
  $\forall x\in A$, $\left\|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$
  $\forall x\in A$, $\left\|\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$
  borne sup $\left\|\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right\|_\infty \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$

CV normale $\Rightarrow$ CV absolue $\Rightarrow$ CV simple
CV normale $\Rightarrow$ CV uniforme $\Rightarrow$ CV simple

# III Intégration, dérivation $\quad (F = \mathbb{K},\ E = \mathbb{R})$

## 1 - normes et intégration sur un segment

$a, b$ réels $a<b$, $C^0([a,b],\mathbb{K})$ : ev des appli. continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$

### a - norme de la convergence uniforme $N_\infty$

$\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$, $N_\infty(f) = \sup\{|f(x)|, x\in[a,b]\}$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'élts de $C^0([a,b],\mathbb{K})$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $f$ pour $N_\infty \iff$ CV unif$^t$ vers $f$ sur $[a,b]$

pr la CV unif, $f$ est forcém$^t$ continue

### b - norme de la convergence en moyenne $N_1$

$\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$, $\quad N_1(f) = \int_{[a,b]} |f| = \int_a^b |f(x)|\,dx$

ici non

$\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite d'élts de } C^0([a,b],\mathbb{K}) \\ f \in C^0([a,b],\mathbb{K}) \end{cases}$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV en moyenne vers $f \iff (N_1(f_n - f))_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $0$
$\iff \lim_{+\infty} \int_{[a,b]} |f_n - f| = 0$

dans ce cas, $\left(\int_{[a,b]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV et a pour limite $\int_{[a,b]} f$

$\left|\int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} f\right| = \left|\int_{[a,b]} (f_n - f)\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f_n - f| = N_1(f_n - f)$
donc $\left|\int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} f\right| \leqslant N_1(f_n - f) \to 0$

## c- norme de la convergence en moyenne quadratique $N_2$

$\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$, $N_2(f) = \sqrt{\int_{[a,b]} f\bar{f}} = \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2}$

inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\forall (f,g) \in C^0([a,b],\mathbb{K})$, $\left|\int_{[a,b]} f\bar{g}\right|^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} f\bar{f}\right)\left(\int_{[a,b]} g\bar{g}\right)$

$\left|\int_{[a,b]} f\bar{g}\right| \leqslant N_2(f).N_2(g)$

- si $f=0$, $\int_{[a,b]} f\bar{g} = 0$ et $N(f)=0$
- si $f \neq 0$,

$\int_{[a,b]} f\bar{f} > 0$ *     * car $f\bar{f} = |f|^2 \geqslant 0$

$P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \int_{[a,b]} |\lambda f + g|^2$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $P(\lambda) \geqslant 0$

$z = x+iy$, $\bar{z} = x - iy$ ; $z\bar{z} = x^2+y^2$ ; $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\Rightarrow |z\bar{z}| = |z|^2$

$P(\lambda) = \int_{[a,b]} (\lambda\bar{\lambda}f\bar{f} + \lambda f\bar{g} + \bar{\lambda}\bar{f}g + g\bar{g}) = \underbrace{N_2(f)^2\lambda\bar{\lambda}}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\lambda\int_{[a,b]} f\bar{g} + \bar{\lambda}\int_{[a,b]} \bar{f}g}_{2\,\mathrm{Re}\left(\lambda\int_{[a,b]} f\bar{g}\right)} + \underbrace{N_2(g)^2}_{\in\mathbb{R}}$

$\exists \theta \in \mathbb{R} / \int_{[a,b]} f\bar{g} = \left|\int_{[a,b]} f\bar{g}\right| e^{i\theta}$

$\forall r \in \mathbb{R}$, $\lambda = re^{-i\theta}$     pour $r \in \mathbb{R}$, on choisit $\lambda$ — n'est pas module

$P(\lambda) = P(re^{-i\theta}) = \underbrace{N_2(f)^2}_{\in\mathbb{R}^{+*}} r^2 + \underbrace{2\left|\int_{[a,b]} f\bar{g}\right|}_{\in\mathbb{R}} r + \underbrace{N_2(g)^2}_{\in\mathbb{R}}$

trinôme du 2nd deg, tjrs positif, (racines complexes : $\Delta \leqslant 0$)

discriminant négatif :

$\left|\int_{[a,b]} f\bar{g}\right|^2 - N_2(f)^2 N_2(g)^2 \leqslant 0$

$\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite d'élts de } C^0([a,b],\mathbb{K}) \\ f \in C^0([a,b],\mathbb{K}) \end{cases}$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV en moyenne quadratique $\iff \lim_{n\to+\infty} N_2(f_n - f) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{[a,b]} |f_n - f|^2\right)^{1/2} = 0$

## d- comparaison

$\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$, $\begin{cases} N_1(f) \leqslant \sqrt{b-a}\; N_2(f) & (1) \\ N_2(f) \leqslant \sqrt{b-a}\; N_\infty(f) & (2) \end{cases}$

- Cauchy-Schwarz $(f, g : x \mapsto 1)$ : $\int_{[a,b]} |f.1| \leqslant N_2(f) N_2(1)$,   $N_2(1) = \sqrt{\int_{[a,b]} 1} = \sqrt{b-a}$

$N_1(f) \leqslant N_2(f)\sqrt{b-a}$

- $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leqslant N_\infty(f) \Rightarrow |f(x)|^2 \leqslant N_\infty(f)^2 \Rightarrow \int_a^b |f(x)|^2 dx \leqslant \int_a^b N_\infty(f)^2 dx$

$\Rightarrow \int_{[a,b]} |f|^2 \leqslant (b-a) N_\infty(f)^2$

donc : (1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV en $\bar{m}$ quad vers $f \in C^0([a,b],\mathbb{K}) \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV en $\bar{m}$ vers $f$

(et $\left(\int_{[a,b]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers $\int_{[a,b]} f$)

(2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV pour $N_\infty$ vers $f$, alors $f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$

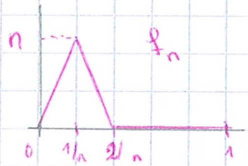
$\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV en $\bar{m}$ quad vers $f$

$\Rightarrow$ ........... en $\bar{m}$ vers $f$

$\Rightarrow \left(\int_{[a,b]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $\int_{[a,b]} f$   $\left(\lim_{+\infty}\int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} \text{"}\lim f_n\text{"}\right)$

## e - remarques

* $a=0$, $b=1$




$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV simplt vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$

$f_n \in C^0([0,1],\mathbb{R})$

$f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$

$\int_{[0,1]} f_n = 1$, $\int_{[0,1]} f = 0 \neq 1$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne CV pas en $\bar{m}$ vers $f$

* $a<b$, $n\in\mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$

$N_1(f_n) = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n dx = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n \left[\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b-a}{n+1}$

$N_2(f_n) = \left[\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2n} dx\right] = \sqrt{\frac{b-a}{2n+1}}$ $\qquad N_\infty(f_n) = 1$ $\qquad$ normes non 2 à 2 équivalentes

## 2 _ intégration sur un segment d'une série de fonctions

**th** $a<b$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'élts de $C^0([ab],\mathbb{K})$

$\sum f_n$ CV unif$^t$ vers $S$ sur $[ab]$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} S \text{ continue sur } [ab] \text{ (donc intégrable)} \\ \sum \int_{[ab]} f_n \text{ CV} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[ab]} f_n = \int_{[ab]} S \end{cases}$

th d'inversion de $\Sigma$ et $\int$ : $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[ab]} f_n = \int_{[ab]} \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ (il faut $\sum f_n$ CV unif$^t$)

**Pp)** $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n \in C^0([ab],\mathbb{K})$,

$\sum f_n$ CV normal$^t$ $\Rightarrow$ $\sum N_1(f_n)$ CV et $N_1\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} N_1(f_n)$

(CV unif. insuffisante)

$\forall x\in[ab]$, $\left|\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ * (cv normale)

$\sum |f_n|$ CV normal$^t$ sur $[ab]$ (donc uniforme)

$(\| |f_n| \|_\infty = \|f_n\|_\infty)$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ est continue sur $[ab]$ * $\qquad$ invers$^\circ$ de $\Sigma$ et $\int$

intégration de * : $\underbrace{\int_a^b \left|\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right| dx}_{N_1} \leq \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_a^b |f_n(x)|\, dx}_{N_1}$

* $\begin{cases} |f_n| \text{ continue sur } [ab] \\ \sum |f_n| \text{ CV unif}^t \text{ vers } \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \end{cases}$ (c1) p.98) donc $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ continue

## 3 _ primitivation

### a _ rappel

$I$ intervalle, $(a,b)\in I^2$, $f : I \to \mathbb{K}$ continue

$h$ une primitive de $f$ : $h(b) = h(a) + \int_a^b f(t)\,dt$ $\qquad |N_1(f)| \leq \sqrt{b-a}\, N_2(f) \leq \sqrt{b-a}\sqrt{b-a}\, N_\infty(f)$

conséquences :

c 1) $|h(b)| \leq |h(a)| + \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq |h(a)| + \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right| \leq |h(a)| + |b-a|\, N_\infty(f_{/[ab]})$

c 2) $I = [\alpha\,\beta]$ un segment $(\beta > \alpha)$

$\forall b \in I$, $|h(b)| \leq |h(a)| + |b-a|\, N_\infty(f)$ $\qquad \underbrace{N_\infty(h)}_{\sup|h(b)|} \leq |h(a)| + \underbrace{(\beta-\alpha)}_{\sup(b-a)} N_\infty(f)$

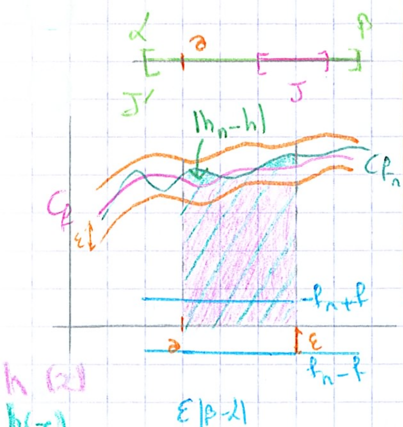
### b _ théorèmes

**th** $a\in I$ intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'élts de $C^0(I,\mathbb{K})$,

$\forall n\in\mathbb{N}$, $h_n$ : la primitive de $f_n$ s'annulant en $a$ : $h_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ sur tout segment de $I$ vers $f$

$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ h \text{ primit. de } f \text{ s'annulant en } a \Rightarrow (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV unif}^t \text{ sur tout segment de } I \text{ vers } h \end{cases}$




soit $J$ segment qqc de $I$,

$J'$ segment de $I$ / $\begin{cases} a\in J' \\ J\subset J' \end{cases}$

$\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ cv unif}^t \text{ vers } f \text{ sur } J' \\ f_n \text{ continue sur } J' \end{cases} \Rightarrow f$ continue sur $J'$ (p 95)

$N_\infty(h_n - h_{/J}) \leq |\underbrace{h_n(a)}_{0} - \underbrace{h(a)}_{0}| + (\beta-\alpha)\, N_\infty(f_n - f_{/J'})$ $\qquad$ c 2)

donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ vers $h$ sur $J'$ $\qquad$ (car $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$)

**th bis** $g_n$ : une primitive de $f_n$ / $(g_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $\alpha \in \mathbb{K}$

soit $g$ la primitive de $f$ qui prend la valeur $\alpha$ en $a$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ sur tout segment de $I$ vers $f$

$\Rightarrow (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ sur tout segment de $I$ vers $g$

$g_n = h_n + g_n(a)$ (cste près)

$g = h + g(a) = h + \alpha$

$J \subset J'$

$N_\infty(g_n - g_{/J}) \leq N_\infty(g_n - g_{/J'}) = N_\infty\left(h_n + g_n(a) - (h+\alpha)_{/J'}\right)$

$\leq N_\infty(h_n - h_{/J'}) + |g_n(a) - \alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Th | m̂ hyp. que pr le $1^{er}$ Th,
$\sum f_n$ CV unif$^t$ vers $S$ sur ∀ segment de $I$
$\Rightarrow \begin{cases} S \text{ continue} \\ \sum h_n \text{ CV unif}^t \text{ sur ∀ segment de } I \text{ vers la primitive de } S \text{ qui s'annule en } a \end{cases}$

rem : Th d'invers° : $\forall x \in I, \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^t f_n(t)\,dt = \int_a^t \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,dt$

## 4 - dérivation

**Th** $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'applications définies sur $I$, à valeurs ds $\mathbb{K}$, de classe $C^1(I)$
on suppose : $\begin{cases} (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV simplem}^t \text{ sur } I \text{ vers } g \\ (g'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV unif}^t \text{ sur ∀ segment de } I \text{ vers } h \end{cases}$
alors $\begin{cases} (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV unif}^t \text{ sur ∀ segment de } I \text{ vers } g \\ g \text{ est de classe } C^1(I) \text{ et } g' = h \end{cases}$

- on pose $f_n = g'_n$, on choisit $a \in I$
  $g_n$ est la primitive de $f_n$ qui vaut $g_n(a)$ en $a$
  or $\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV unif}^t \text{ sur ∀ segment de } I \\ (g_n(a))_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV vers } g(a) \end{cases}$
  donc, d'après le th de primitivat°, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif$^t$ sur ∀ segment de $I$ vers $g$
- $g$ est la primitive de $h$ qui vaut $\lim_{n\to+\infty} g_n(a)$ en $a$
  donc $g \in C^1(I)$, $g' = h$

rem : th d'invers° de lim :
$\forall x \in \mathbb{N}, \left(\lim_{n\to+\infty} g_n\right)'(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n'(x)$

ou $\lim_{y\to x} \left( \lim_{n\to+\infty} \frac{g_n(y)-g_n(x)}{y-x} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left( \lim_{y\to x} \frac{g_n(y)-g_n(x)}{y-x} \right)$

version pr les séries : on suppose $\begin{cases} \sum g_n \text{ CV simpl}^t \text{ sur } I \text{ vers } S \\ \sum g'_n \text{ CV unif}^t \text{ sur } I \text{ vers } F \end{cases}$
alors $\begin{cases} \sum g_n \text{ CV unif}^t \text{ sur ∀ segment de } I \text{ vers } S \\ S \in C^1(I) \text{ et } S' = F \end{cases}$

rem : th d'invers° (dérivat° terme à terme) : $S' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n$

extension ① $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fct° de classe $C^2(I)$, à valeurs de $\mathbb{K}$
on suppose : $\begin{cases} \sum g_n \text{ CV simpl}^t \text{ sur } I \text{ vers } S & (1) \\ \sum g'_n \text{ ......} & (2) \\ \sum g''_n \text{ CV unif}^t \text{ sur ∀ segment de } I & (3) \end{cases}$
alors $\sum g'_n$ CV unif$^t$ sur ∀ segment de $I$ (Th) ((2)+(3))
alors $\begin{cases} \sum g_n \text{ CV unif}^t \text{ ...... vers } S \; (1)+(2+3) \\ S \in C^1(I) \text{ de dérivée } S' = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n \end{cases}$
et $S \in C^2(I)$, $S'' = \sum_{n=0}^{\infty} g''_n$

rem : m̂ th avec des suites, des dérivées d'ordre supérieur

② $g_n : I \to F$, $F$ $\mathbb{K}$ev de dim finie
on munit $F$ d'une base $\mathcal{B}$
$g_n$ est dérivable $\Leftrightarrow$ ses composantes le sont

ex : $F = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $A \in F$, $F$ muni d'une norme d'algèbre
$g_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to F \\ t \mapsto \frac{t^n}{n!} A^n \end{array} \right.$
* CV simple de $\sum g_n$ :
soit $t \in \mathbb{R}$ fixé, $\|g_n(t)\| = \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^n \leq \frac{1}{n!} (|t|\,\|A\|)^n$

la série num $\sum \frac{1}{n!} (|t|\,\|A\|)^n$ CV donc $\sum g_n(t)$ CV absolum$^t$
donc $\sum g_n$ CV simpl$^t$ vers : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to F \\ t \mapsto e^{tA} \end{array} \right.$

$\ast$ CV de $\sum g_n'$ uniforme sur tt segment de $\mathbb{R}$

$g_n' : \begin{cases} \mathbb{R} \to F \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{cases}$

soit $J$ un segment de $\mathbb{R}$, $\exists a > 0 \,/\, J \subset [-a, a]$,
$\forall t \in J, \forall n \in \mathbb{N}^*, \| g_n'(t) \| = \frac{|t|^{n-1}}{(n-1)!} \|A^n\| \leq \frac{|a|^{n-1}}{(n-1)!} \|A\|^n$ ne dépend pas de $t$

la série $\sum \frac{|a|^{n-1}}{(n-1)!} \|A\|^n$ CV donc $\sum g_n'$ CV normal$^t$ sur $[-a, a]$
donc $\sum g_n'$ CV unif$^t$ sur $[-a, a]$ sur $J$

donc $\sum g_n \in C^1(\mathbb{R})$, $\frac{d(e^{tA})}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{n+1}$

$= A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right) A$

$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA} = e^{tA} A$

donc $: \begin{cases} \mathbb{R} \to F \\ t \mapsto e^{tA} \end{cases}$ est de classe $C^\infty$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d^k}{dt^k}(e^{tA}) = A^k e^{tA} = e^{tA} A^k$

application $\to$ résolution de $X' = AX$

$X : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p \\ t \mapsto X_0 e^{tA} \end{cases}$ $\quad Y'(t) = \frac{d}{dt}(X_0 e^{tA}) = X_0 \frac{d}{dt} e^{tA} = AY(t)$

si $X$ vérifie $X' = AX$, $X$ est de la forme $X : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p \\ t \mapsto X_0 e^{tA} \end{cases}$

pour vérifier une CV simple : $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ trouver $f$

CV unif : $\| f_n(x) - f(x) \| <$ qqc qui | ne dépend pas de $x$
| dépend de $n$ / ce qqc $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

ex

CV unif : $| f_n(x) - f(x) | < \frac{1}{x n^2}$ alors $f_n$ CV unif sur $[1, +\infty[$
car $\forall x \in [1, +\infty[$, $| \quad | \leq \frac{1}{n^2} \to 0$

PAS de CV unif : Mq il n'y a pas invers° de lim: $\lim_{x \to x_0} \left( \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) \neq \lim_{n \to +\infty} \left( \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$
$f(x)$ de la CV simple

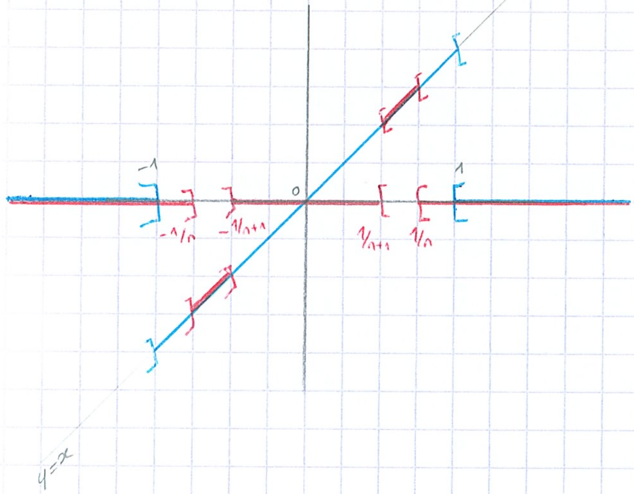
donc que : $f$ n'a pas de lim en $x_0$

CV abso : Mq $\| f_n \|_\infty = \frac{1}{n}$

CV normale :
1) $\forall x \in \dots, |f_n(x)| \leq$ indép de $x$ $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
2) donc $\|f_n\|_\infty \leq X$
3) $\sum X$ CV $\Rightarrow \sum \|f_n\|_\infty$ CV $\Rightarrow \sum f_n$ CV norm$^t$ vers $f$

si de plus $\forall n$ $f_n$ continue alors $f$ continue

contre-ex illustrant : $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n') \neq \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)'$
(4 p. 102)




$$u_n : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow ]-1,1[ \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{1}{n} \text{ ou } -\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n+1} \text{ ou } x \geq \frac{1}{n} \\ x & \text{si } -\frac{1}{n} < x \leq -\frac{1}{n+1} \text{ ou } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \end{cases}\end{array}\right.$$

$u_n'(0) = 0$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n'(0)) = 0$

or, $\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)'}_{(x)' = 1}(0) = 1$