Notations : $\mathbb{P}$ désigne le plan affine usuel et $\mathbb{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan

I- Modes de repérage

1. Repère cartésien

Rappels	Un repère cartésien du plan $\mathbb{P}$ est un triplet $(O,\vec{i},\vec{j})$ où O est un point donné de $\mathbb{P}$, appelé origine, et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs **non colinéaires** de $\mathbb{V}$. Le couple $(\vec{i},\vec{j})$ est une base de $\mathbb{V}$. Si $\vec{i}\perp\vec{j}$ le repère est dit **orthogonal** et la base est dite **orthogonale** Si $\begin{cases}\vec{i}\perp\vec{j}\\ \|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\end{cases}$ le repère est dit **orthonormal** et la base est dite **orthonormale**

Exercice 1 $A_1,\dots,A_n$ sont n points donnés du plan. $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont n réels donnés vérifiant $\alpha_1+\cdots+\alpha_n\neq 0$.

1. Rappeler la définition du barycentre G du système $\{(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$
2. Déterminer les coordonnées de G

Exercice 2 Le plan affine est rapporté au repère $R=(O,\vec{i},\vec{j})$

1. On considère le nouveau repère $R'=(O',\vec{I},\vec{J})$ avec $O'\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, $\vec{I}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, $\vec{J}\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}$.

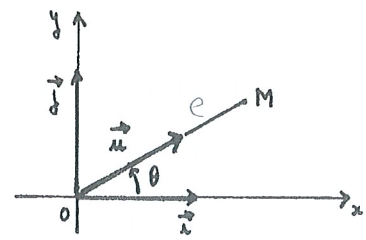
   Ecrire les formules de changement de repère.
2. La courbe (C) a pour équation $x^2-y^2=1$ dans le repère R.

   Ecrire l'équation de (C) dans le repère $R'=(O,\vec{I},\vec{J})$ avec $\vec{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$ et $\vec{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$.

2. Coordonnées polaires

Le plan affine euclidien **orienté** est rapporté au repère orthonormal **direct** $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit $M\neq O$.
On choisit $\vec{u}$ un vecteur **unitaire** de la droite (OM) (2 choix sont possibles)
On note θ **une** mesure (définie à 2π près) de l'angle $(\vec{i},\vec{u})$
Alors : $\overrightarrow{OM}=\rho\vec{u}=\rho(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})$ avec $\rho\in\mathbb{R}^*$



Définitions	**Le couple (ρ,θ) est UN couple de coordonnées polaires de M** • **ρ est le rayon polaire de M** • **θ est l'angle polaire de M** • **O est appelé pole et l'axe $(O,\vec{i})$ est appelé axe polaire**

Remarques
- Dire que M a pour coordonnées polaires (ρ,θ) signifie $\overrightarrow{OM}=\rho\vec{u}=\rho(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})$
- Le point O n'a pas d'angle polaire ; il est caractérisé par son rayon polaire : $\rho=0$
- **Le rayon polaire ρ peut être négatif**
- Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur "variable" : il dépend de M.

ATTENTION **Un point possède une infinité de couples de coordonnées polaires.**
- Pour un point M donné (distinct de O) il y a deux choix pour le vecteur $\vec{u}$
- Le vecteur $\vec{u}$ étant choisi, θ est défini à 2π près.

Théorème

- **Si (ρ,θ) est UN couple de coordonnées polaires de M alors les couples de coordonnées polaires de M sont : $(\rho,\theta+2k\pi)$ et $(-\rho,\theta+\pi+2k\pi)$ (où $k\in\mathbb{Z}$)**
- **En particulier (ρ,θ) et $(-\rho,\theta+\pi)$ sont deux couples de coordonnées polaires du <u>même</u> point**

<u>Exercice 1</u> Ecrire un système de coordonnées polaires pour les points suivants, donnés par leurs coordonnées cartésiennes $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$, $E(1,-1)$, $F(-1,1)$, $G(1,\sqrt{3})$, $H(-\sqrt{3},-1)$

<u>Exercice 2</u> **"Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes"**
M, distinct de O, a pour coordonnées polaires (ρ,θ). Ecrire ses coordonnées cartésiennes.

<u>Exercice 3</u> **"Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires"**
M, distinct de O, a pour coordonnées cartésiennes (x,y). Ecrire un couple de coordonnées polaires de M

<u>Exercice 4</u> M, distinct de O, a pour coordonnées polaires (ρ,θ). Ecrire un couple de coordonnées polaires de :
- M_1 symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses
- M_2 symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées
- M_3 symétrique de M par rapport à l'origine

<u>Exercice 5</u> Ecrire une équation polaire des droites :

$x'Ox$ $\qquad$ $y'Oy$ $\qquad$ $(D_1): y=x$ $\qquad$ $(D_2): y=-\sqrt{3}\,x$

$(D_3): y=3$ $\qquad$ $(D_4): x=-2$ $\qquad$ $(D_5): \sqrt{3}\,x-y=1$ $\qquad$ $(D_6)\ 3x-2y=5$

$(D_7): x+y=1$

<u>Exercice 6</u> Que représentent les équations polaires suivantes :

$(1):\rho=\dfrac{1}{\sin\theta}$ $\qquad$ $(2):\rho=\dfrac{-2}{\cos\theta}$ $\qquad$ $(3):\dfrac{1}{\rho}=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$ $\qquad$ $(4):\rho=\dfrac{-2}{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)}$

<u>Exercice 7</u> Ecrire une équation polaire du cercle de centre $I(\rho_0,\theta_0)$ et de rayon R dans les cas suivants :

a) $I=O$ et $R=2$ $\qquad$ b) $I(\sqrt{2},-\dfrac{\pi}{4})$ et $R=1$ $\qquad$ c) $I(-\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$ et $R=\sqrt{2}$

d) $I(-1,0)$ et $R=1$ $\qquad$ e) $I(2,-\dfrac{\pi}{2})$ et $R=2$

<u>Exercice 8</u> Que représentent les équations polaires suivantes :

a) $\rho^2+2\rho\sin\theta+1=0$ $\qquad$ b) $\rho^2-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+1=0$ $\qquad$ c) $\rho=\sin\theta$ $\qquad$ d) $\rho=-2\cos\theta$

Géométrie plane

I_1.

ex : 1. 1. $G = \text{bary}\{(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)\} \iff \alpha_1\vec{GA_1} + \dots + \alpha_n\vec{GA_n} = \vec{0}$

2. $G\left(\dfrac{a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\right)$

2.1. soient $\begin{cases} M(x,y) \text{ dans } R : \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ M(X,Y) \text{ dans } R' : \vec{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} \end{cases}$

on a : $\begin{cases} \vec{I} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \\ \vec{J} = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j} \end{cases}$

donc $x\vec{i} + y\vec{j} = X(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j})\,\vec{I} + Y(\gamma\vec{i} + \delta\vec{j})\,\vec{J}$
$= (X\alpha\vec{I} + Y\gamma\vec{J})\vec{i} + (X\beta\vec{I} + Y\delta\vec{J})\vec{j}$

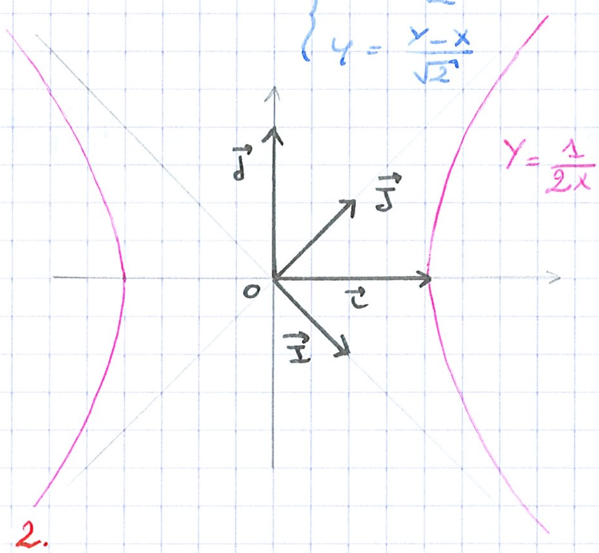
d'où $\begin{cases} x = X\alpha\vec{I} + Y\gamma\vec{J} \\ y = X\beta\vec{I} + Y\delta\vec{J} \end{cases}$

2. on a $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{I} + Y\vec{J}$
$= X\dfrac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}} + Y\dfrac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}} = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{Y-X}{\sqrt{2}}\vec{j}$

donc $\begin{cases} x = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{Y-X}{\sqrt{2}} \end{cases}$

d'où $\mathcal{E} : \left(\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\dfrac{Y-X}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

$\iff \dfrac{4XY}{2} = 1 \iff Y = \dfrac{1}{2X}$



2.

ex : 1.

coordonnées cartésiennes

A (1,0)

B (0,1)

C (-1,0)

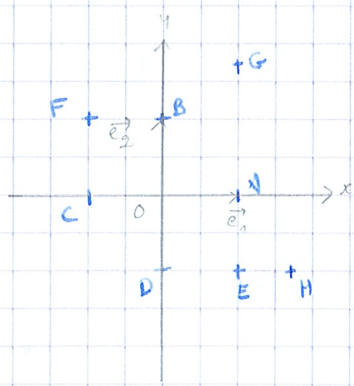
D (0,-1)

E (1,-1)

F (-1,1)

G $(1,\sqrt{3})$

H $(-\sqrt{3},-1)$



coordonnées polaires

A (1,0)

A $(-1,\pi)$

B $(1,\frac{\pi}{2})$

B $(-1,\frac{3\pi}{2})$

C (-1,0)

C $(1,\pi)$

D $(1,\frac{3\pi}{2})$

D $(-1,\frac{\pi}{2})$

E $(\sqrt{2},-\frac{\pi}{4})$

F $(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$

G $(2,\frac{\pi}{3})$

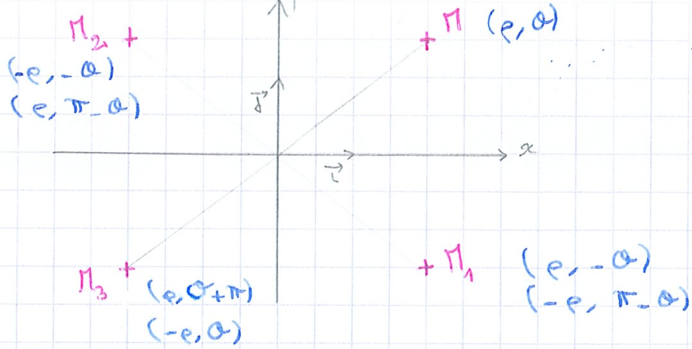
H $(2,-\frac{\pi}{6})$

2. $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \rho(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$ donc $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

et $x^2 + y^2 = \rho^2$

3. si $M = O$, $\rho = 0$
si $M \neq O$, on peut choisir $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
on détermine θ / $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

4.



5. $x'Ox$: $\theta \equiv 0\ [\pi]$

$y'Oy$: $\theta = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$y = x$: $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$

$y = -\sqrt{3}x$: $\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [\pi]$

$y = 3$: $\rho \sin\theta = 3 \iff \rho = \frac{3}{\sin\theta}$

$x = -2$: $\rho\cos\theta = -2 \iff \rho = \frac{-2}{\cos\theta}$

$\sqrt{3}x - y = 1 \iff (\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)\rho = 1 \iff \rho = \frac{1}{2\cos(\theta + \frac{\pi}{3})}$

$3x - 2y = 5 \iff \rho(3\cos\theta - 2\sin\theta) = 5$

$x + y = 1 \iff \rho\cos\theta + \rho\sin\theta = 1 \iff \rho(\cos\theta + \sin\theta) = 1 \iff \rho\sqrt{2}(\cos(\theta - \frac{\pi}{4})) = 1$

$\iff \rho = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$

6. $\rho = \frac{1}{\sin\theta}$: $y = 1$

$\rho = \frac{-2}{\cos\theta}$: $x = -2$

$\rho = \frac{1}{\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta}$: $x - \sqrt{3}y = 1$

$\rho = \frac{-2}{\cos(\theta - \frac{\pi}{3})}$: $\rho\left[\cos\theta \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right] = -2 \iff \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y = -2$

7. $\mathcal{E}_1$ de $\left|\begin{array}{l}\text{centre } I(0,0)\\ \text{rayon } R = 2\end{array}\right.$

$M(\rho, \theta) \in \mathcal{E}_1 \iff IM^2 = 4 = (\rho\cos\theta - 0)^2 + (\rho\sin\theta - 0)^2$

$\mathcal{E}_1$: $\rho^2 = 4 \iff \rho = 2$

$\mathcal{E}_2$ de $\left|\begin{array}{l}\text{centre } I(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\\ \text{rayon } R = 1\end{array}\right.$

$M(\rho, \theta) \in \mathcal{E}_2 \iff 1 = (\rho\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\rho\sin\theta + \frac{\sqrt{2}}{2})^2$

$\mathcal{E}_2$: $\rho^2 + 1 - \sqrt{2}\rho\cos\theta + \sqrt{2}\rho\sin\theta = 1$

$\iff \rho^2 - \sqrt{2}\rho(\cos\theta - \sin\theta) = 0$

$\iff \rho^2 - \rho\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = 0$

$\iff \rho = \cos(\theta + \frac{\pi}{4})$ ou $\rho = 0$

$\iff \rho = \cos(\theta + \frac{\pi}{4})$

(car $\rho = \cos(\theta + \frac{\pi}{4})$ contient $\rho = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$)

$\mathcal{E}_3$ de $\left|\begin{array}{l}\text{centre } I(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\\ \text{rayon } R = \sqrt{2}\end{array}\right.$

$M(\rho, \theta) \in \mathcal{E}_3 \iff 2 = (\rho\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\rho\sin\theta + \frac{\sqrt{2}}{2})^2$

$\mathcal{E}_3$: $\rho^2 + 1 + \sqrt{2}\rho(\cos\theta + \sin\theta) = 2$

$\iff \rho^2 + \rho\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$

$\iff \rho^2 - 1 + \rho\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 0$

$\mathcal{E}_4$ de $\left|\begin{array}{l}\text{centre } I(-1, 0)\\ \text{rayon } R = 1\end{array}\right.$

$M(\rho, \theta) \in \mathcal{E}_4 \iff 1 = (\rho\cos\theta + 1)^2 + (\rho\sin\theta)^2$

$\mathcal{E}_4$: $\rho^2 + 1 + 2\rho\cos\theta = 1$

$\iff \rho[\rho + 2\cos\theta] = 0$

$\iff \rho = 0$ ou $\rho + 2\cos\theta = 0$

$\iff \rho = -2\cos\theta$

$\mathcal{E}_5$ de $\left|\begin{array}{l}\text{centre } I(0, -2)\\ \text{rayon } R = 2\end{array}\right.$

$M(\rho, \theta) \in \mathcal{E}_5 \iff (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta + 2)^2 = 4$

$\mathcal{E}_5$: $\rho^2 + 4 + 4\rho\sin\theta = 4$

$\iff \rho[\rho + 4\sin\theta] = 0$

$\iff \rho = 0$ ou $\rho = -4\sin\theta$

$\iff \rho = -4\sin\theta$

8. a) $\rho^2 + 2\rho\sin\theta + 1 = 0 \iff x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \iff x^2 + (y+1)^2 - 1 + 1 = 0$

$\iff x^2 + (y+1)^2 = 0 \longrightarrow$ point $I(0, -1)$

b) $\rho^2 - \rho\cos\theta - \rho\sin\theta + 1 = 0 \iff x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0 \iff (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 =$

$\iff (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{2} \longrightarrow$ ensemble vide

c) $\rho = \sin\theta \iff \rho^2 = \rho\sin\theta$ (car O vérifie $\rho = \sin\theta$)

II- Produit scalaire

1. Définition

Définition	**On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :** • **si l'un des vecteurs est nul : $\vec{u}.\vec{v} = 0$** • **si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert \, \lVert\vec{v}\rVert \cos(\vec{u}, \vec{v})$**

Remarque le produit scalaire ne dépend pas de l'orientation du plan

Définition	**$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$**

Remarque 1 le vecteur $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur (et donc à lui même)

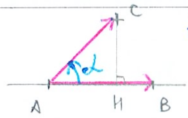
Remarque 2 • si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, colinéaires et de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert \, \lVert\vec{v}\rVert$

• si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, colinéaires et de sens contraire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\lVert\vec{u}\rVert \, \lVert\vec{v}\rVert$

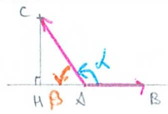
2. Interprétation en terme de projection

Théorème	**Soient A, B, C trois points du plan, avec $A \neq B$, et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).** $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AH} = \overline{AB} \; \overline{AH}$

Démonstration : *voir cours*



$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = AB . AC \cos\alpha = AB . AH = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AH}$



$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = AB(-AC\cos\beta)$
$= -AB . AH$
$= \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AH}$

3. Interprétation en terme d'affixe

Le plan affine euclidien orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Théorème	Si $\begin{cases} \vec{u} \text{ a pour affixe } a \\ \vec{v} \text{ a pour affixe } b \end{cases}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = \mathrm{Re}(\bar{a}\, b)$

Démonstration : *voir cours*

Application	**Si, dans le repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$**

Démonstration : *voir cours*

4. Propriétés du produit scalaire

a) Règles de calcul

Théorème	**Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tout réel λ et μ :** • $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ • $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$, $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$ • $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$, $\vec{u}.(\mu\vec{v}) = \mu(\vec{u}.\vec{v})$ le produit de 2 vecteurs est un RÉEL **(on dit que le produit scalaire est une forme bilinéaire et symétrique)**

Démonstration : il suffit de se placer dans un repère orthonormal direct et d'utiliser les coordonnées des vecteurs

b) Identités usuelles

Notation : $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ (carré scalaire de $\vec{u}$)

ATTENTION $\vec{u}^2$ est un REEL positif ou nul

Théorème

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$:

- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$, $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$

Exercice ABCD est un parallélogramme. Etablir $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

c) Expression du produit scalaire dans une base orthonormale quelconque

Théorème

$B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormale quelconque.

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ alors : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Démonstration : *voir cours* $(x\vec{i}+y\vec{j})(x'\vec{i}+y'\vec{j}) = xx'\underbrace{\vec{i}\vec{i}}_{1} + xy'\underbrace{\vec{i}\vec{j}}_{0} + yx\underbrace{\vec{j}\vec{i}}_{0} + yy'\underbrace{\vec{j}\vec{j}}_{1}$

Application

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ alors $AB = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

5. Application : projection orthogonale sur une droite

Théorème

Soient (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point quelconque du plan.

H, projection orthogonale de M sur (D), vérifie : $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\vec{u}.\overrightarrow{AM}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$

* *Démonstration :* *voir cours*

Exercice Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

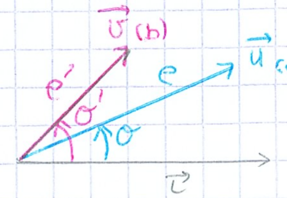
1. Déterminer le projeté orthogonal de $M(3, 2)$ sur $(D): 2x + 3y = -1$
2. Définir la projection orthogonale sur $3x - 5y = 2$ (D)
3. .... $(\Delta): x + 2y = 5$
   puis la réflexion par rapport à (Δ)

$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2=y \quad \Leftrightarrow \quad x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \quad \rightarrow$ cercle de centre $I\left(0,\frac{1}{2}\right)$ / rayon $\frac{1}{2}$ G

d) $\rho=-2\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2=-2\rho\cos\theta$ (car 0 vérifie $\rho=-2\cos\theta$)

$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2=-2x \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2-1+y^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2=1$

$\rightarrow$ cercle de centre $I(1,0)$ / rayon 1



II. 3. dém

1er cas : $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$

$\vec{u}$ d'affixe $a=\rho e^{i\theta}$

$\vec{v}$ .... $b=\rho' e^{i\theta'}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})=\rho\rho'\cos(\theta'-\theta)=\mathrm{Re}\left[\rho\rho' e^{i(\theta'-\theta)}\right]=\mathrm{Re}\left[\rho' e^{i\theta'}\rho e^{-i\theta}\right]=\mathrm{Re}\left[\bar{a}b\right]$$

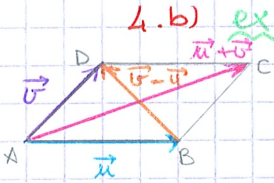
2ème cas : $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{v}=\vec{0}$ $\qquad \vec{u}\cdot\vec{v}=\mathrm{Re}[\bar{a}b]$ reste valable

application : $\vec{u}(x,y) \quad \vec{v}(x',y')$

$\bar{a}b=(x-iy)(x'+iy')$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

4.b) ex :



soient $\vec{u}=\vec{AB}$, $\vec{v}=\vec{AD}$

$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AB}+\vec{AD}=\vec{u}+\vec{v}$

$\vec{BD}=\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{AD}+\vec{BA}=\vec{v}-\vec{u}$

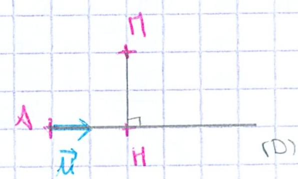
$\vec{AC}^2+\vec{BD}^2=(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{v}-\vec{u})^2=2\vec{u}^2+2\vec{v}^2=2(u^2+v^2)=2(AB^2+AD^2)$

donc $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$

5. dém

Soit $D=(A,\vec{u})$ $\quad (\vec{u}\neq\vec{0})$

H projeté orthogonal de M sur D



H est caractérisé par :

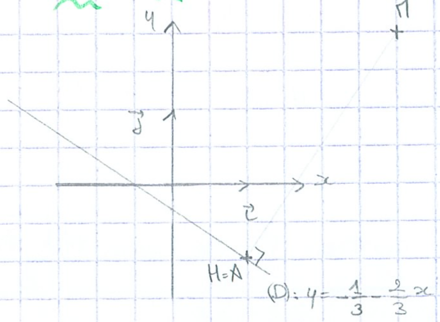
$\begin{cases} H\in(D) \\ \vec{HM}\perp\vec{u}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists\,\alpha\in\mathbb{R} \,/\, \vec{AH}=\alpha\vec{u} & (1) \\ \vec{HM}\cdot\vec{u}=0 & (2)\end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow (\vec{HA}+\vec{AM})\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{u}-\alpha\vec{u}^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\vec{AM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}^2}$

d'où $\vec{AH}=\dfrac{\vec{AM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}^2}\,\vec{u}$

pour obtenir un vect. dir on choisit x_u, y_u / $D: x x_u+y y_u=0$

ex : 1.



$D(A,\vec{u})$ avec $\begin{cases} A(1,-1) \\ \vec{u}(3,-2)\end{cases}$

$$\vec{AH}=\frac{\vec{AM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}^2}\,\vec{u}=\frac{(3-1)\times3+(2-(-1))\times(-2)}{3^2+(-2)^2}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=0$$

donc $\begin{pmatrix}x_H-1\\y_H+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ d'où $H\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad H=A$

2. $D(A,\vec{u})$ avec $A(4,2)$ et $\vec{u}(5,3)$ soit $M(x,y)$ et $H(x',y')=P_D(M)$

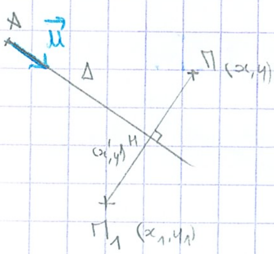
$$\vec{AH}=\frac{\vec{AM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}^2}\,\vec{u}=\frac{(x-4)5+(y-2)3}{5^2+3^2}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'-4\\y'-2\end{pmatrix}=\frac{5x-20+3y-6}{34}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{5}{34}(5x+3y-26)+4 \\ y'=\frac{3}{34}(5x+3y-26)+2\end{cases}$ d'où $H\begin{pmatrix}\frac{5}{34}(5x+3y-110)\\ \frac{3}{34}(5x+3y+42)\end{pmatrix}$

3. • $\Delta(A,\vec{u})$ avec $\begin{cases} A(5,0) \\ \vec{u}(2,-1) \end{cases}$ soit $M(x,y)$
$H(x',y') = P_\Delta(M)$

H est défini par :

$$\vec{AH} = \frac{\vec{AM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}^2}\,\vec{u}$$



donc $\begin{pmatrix} x'-5 \\ y' \end{pmatrix} = \frac{2(x-5)-y}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5 + \frac{2}{5}(2x-y-10) \\ y' = -\frac{1}{5}(2x-y-10) \end{cases}$

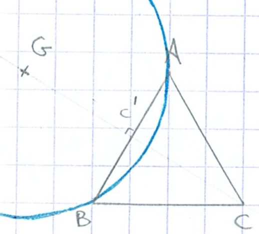
d'où $H\begin{pmatrix} \frac{1}{5}(4x-2y+5) \\ -\frac{1}{5}(2x-y-10) \end{pmatrix}$

• $\begin{cases} x' = \frac{x+x_1}{2} \\ y' = \frac{y+y_1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x'-x = \frac{2}{5}(4x-2y+5)-x \\ y_1 = 2y'-y = -\frac{2}{5}(2x-y-10)-y \end{cases}$

d'où $M_1\begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3x-4y+10) \\ \frac{1}{5}(-4x-3y+20) \end{pmatrix}$

6. exemples

1. ABC équilatéral. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant : $MA^2+MB^2=MC^2$



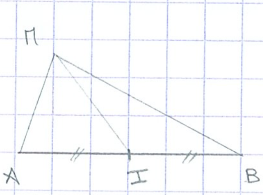
$MA^2+MB^2-MC^2=0$: (1) soit $G = \text{bary}\{(A,1), B(1), (C,-1)\}$
soit $C' = \text{bary}\{(A,1),(B,1)\}$
C' est le milieu de $[AB]$
donc $G = \text{bary}\{(C',2),(C,-1)\}$

donc $2\vec{GC'}-\vec{GC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \vec{GC}+2\vec{CC'}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{CG}=2\vec{CC'}$

(1) $\Leftrightarrow \vec{MA}^2+\vec{MB}^2-\vec{MC}^2=0 \Leftrightarrow (\vec{MG}+\vec{GA})^2+(\vec{MG}+\vec{GB})^2-(\vec{MG}+\vec{GC})^2=0$
$\Leftrightarrow \vec{MG}^2+\vec{GA}^2+\vec{GB}^2-\vec{GC}^2+2\vec{MG}\cdot\underbrace{(\vec{GA}+\vec{GB}-\vec{GC})}_{=0 \text{ car } G \text{ barycentre}}=0$
$\Leftrightarrow MG^2 = GC^2-GA^2-GB^2$
$= 4GC'^2-2GA^2 = 4\left(\frac{GA\sqrt{3}}{2}\right)^2-2GA^2 = 3GA^2-2GA^2 = GA^2$

L'ensemble des points M est le cercle de centre G, de rayon GA.

2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_k$ des points M / $MA^2+MB^2=k$
(A, B donnés $A\neq B$, $k\in\mathbb{R}$)



Soit I le milieu de [AB]

$MA^2+MB^2 = \vec{MA}^2+\vec{MB}^2 = (\vec{MI}+\vec{IA})^2+(\vec{MI}+\vec{IB})^2$
$= (\vec{MI}+\vec{IA})^2+(\vec{MI}-\vec{IA})^2 = 2MI^2+2IA^2$
$= 2IM^2+2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 2IM^2+\frac{AB^2}{2}$

1ère formule de la médiane : $MA^2+MB^2 = 2IM^2+\frac{AB^2}{2}$

$MA^2+MB^2=k \Leftrightarrow IM^2 = \frac{k}{2}-\frac{AB^2}{4} = \frac{2k-AB^2}{4}$

→ si $k<\frac{AB^2}{2}$, $\mathcal{E}_k=\emptyset$

si $k\geq\frac{AB^2}{2}$, $\mathcal{E}_k$ est le cercle de centre I, de rayon $\frac{\sqrt{2k-AB^2}}{2}$

cas particuliers : • $k=AB^2$: $MA^2+MB^2=AB^2 \Leftrightarrow IM^2=\frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow IM=\frac{AB}{2}$

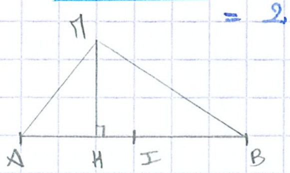
L'ensemble des points M est le cercle de centre I, de rayon $\frac{AB}{2}$

• $k=\frac{3}{2}AB^2$: $IM^2=\frac{3AB^2-AB^2}{4}=\frac{AB^2}{2}$
cercle de centre I, de rayon $\frac{AB}{\sqrt{2}}$

3. Déterminer l'ensemble D_k des points M vérifiant : $MA^2 - MB^2 = k$

$MA^2 - MB^2 = (\vec{MI}+\vec{IA})^2 - (\vec{MI}-\vec{IA})^2 = 4\,\vec{MI}\cdot\vec{IA} = 4\,\vec{IM}\cdot\vec{AI} = 2\,\vec{IM}\cdot\vec{AB}$

$= 2\,(\vec{IH}+\vec{HM})\cdot\vec{AB} = 2\,\vec{IH}\cdot\vec{AB} = 2\,\overline{IH}\;\overline{AB}$



2ème formule de la médiane : $MA^2 - MB^2 = 2\,\overline{IH}\;\overline{AB}$

$MA^2 - MB^2 = k \iff 2\,\overline{IH}\;\overline{AB} = k$ ce qui définit 1 unique point H.

D_k est la perpendiculaire en H à (AB).

la mesure algébrique tient compte du signe : $\overline{AB} = -\overline{BA}$

cas particuliers : • $k = AB^2$: $2\,\overline{IH}\;\overline{AB} = \overline{AB}^2 \iff \overline{IH} = \frac{\overline{AB}}{2}$

donc H = B

L'ensemble des points M est la perpendiculaire en B à (AB).

• $k = -\frac{AB^2}{2}$: $2\,\overline{IH}\;\overline{AB} = -\frac{\overline{AB}^2}{2} \iff \overline{IH} = -\frac{\overline{AB}}{4} = -\frac{\overline{AI}}{2} = \frac{\overline{IA}}{2}$

.... médiatrice de [AI]

III Déterminant de 2 vecteurs du plan

1) Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ 2 vecteurs du plan.
On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\det(\vec{u},\vec{v})$ défini par :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \\ \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\sin(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \end{cases}$$

rem : si on change l'orientation, le déterminant change de signe.

$\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \iff \vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ ou $\begin{cases}\vec{u}\neq\vec{0}\\ \vec{v}\neq\vec{0}\\ \sin(\vec{u},\vec{v})=0\end{cases}$

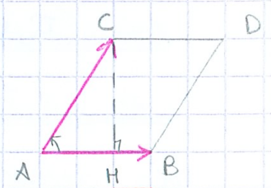
$\iff \vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ ou $\vec{u},\vec{v}$ colinéaires

Th : $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

2) Interprétation géométrique

$\det(\vec{AB},\vec{AC}) = \|\vec{AB}\|\,\|\vec{AC}\|\,\sin(\vec{AB},\vec{AC})$

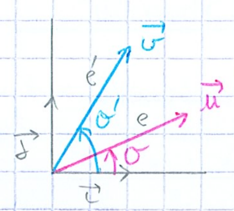
$|\det(\vec{AB},\vec{AC})| = AB\cdot AC\cdot|\sin(\vec{AB},\vec{AC})| = AB\cdot CH = \mathcal{A}_{ABDC}$



Th : $\det(\vec{AB},\vec{AC})$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

rem : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\det(\vec{AB},\vec{AC})|$

3) Interprétation à l'aide des affixes



$\vec{u}\,(a = x+iy)$, $\vec{v}\,(b = x'+iy')$

1er cas : $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$

je pose $a = \rho e^{i\theta}$, $b = \rho' e^{i\theta'}$

$\det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\sin(\vec{u},\vec{v}) = \rho\rho'\sin(\theta'-\theta) = \mathrm{Im}\left[\rho\rho' e^{i(\theta'-\theta)}\right]$

$= \mathrm{Im}\left[\rho e^{-i\theta}\,\rho' e^{i\theta'}\right] = \mathrm{Im}[\bar{a}\,b]$

2ème cas : $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

la formule reste valable

Th : si $\vec{u}(a)$, $\vec{v}(b)$, alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Im}[\bar{a}\,b]$.

application : $\vec{u}(x,y)$, $\vec{v}(x',y')$ $\qquad$ $\bar{a}b = (x-iy)(x'+iy') = xx'+yy' + i(xy'-x'y)$

$\text{Im}[\bar{a}b] = xy' - x'y$

Th $\left[\quad \det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y \quad \right]$

présentation du calcul:

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

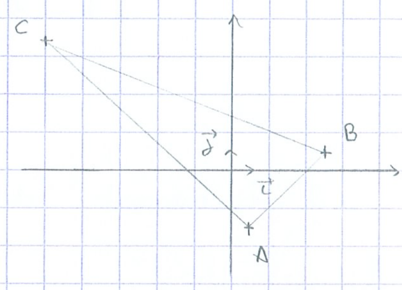
ex 1. $\vec{u}(2,1)$, $\vec{v}(-4,3)$

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 - (-4)\times 1 = 10$$

$$\begin{cases} \sin(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \dfrac{10}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \dfrac{10}{5\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\[2ex] \cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \dfrac{2\times(-4)+1\times 3}{5\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

2. $A(1,-3)$, $B(5,1)$, $C(-10,7)$

Déterminer l'aire du triangle ABC



$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB},\vec{AC})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -11 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}(40+44) = 42$$

3. $\vec{u}(\alpha,1)$ et $\vec{v}(1,\alpha)$ sont-ils colinéaires ?

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ $\Leftrightarrow$ $(\alpha = -1$ ou $\alpha = 1)$

4) Propriétés du déterminant

Soient $\vec{u}(x,y)$, $\vec{v}(x',y')$, $\vec{u_1}(x_1,y_1)$, $\vec{v_1}(x'_1,y'_1)$

$$\det(\vec{v},\vec{u}) = \begin{vmatrix} x' & x \\ y' & y \end{vmatrix} = x'y - y'x = -\det(\vec{u},\vec{v})$$

$$\det(\alpha\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} \alpha x & x' \\ \alpha y & y' \end{vmatrix} = \alpha(xy' - yx') = \alpha\det(\vec{u},\vec{v})$$

$$\det(\vec{u}+\vec{u_1},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x+x_1 & x' \\ y+y_1 & y' \end{vmatrix} = xy' + x_1y' - yx' - y_1x' = \det(\vec{u},\vec{v}) + \det(\vec{u_1},\vec{v})$$

$$\det(\vec{u},\beta\vec{v}) = -\det(\beta\vec{v},\vec{u}) = -\beta\det(\vec{v},\vec{u}) = \beta\det(\vec{u},\vec{v})$$

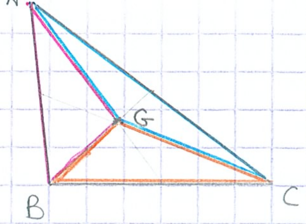
$$\det(\vec{u},\vec{v}+\vec{v_1}) = -\det(\vec{v}+\vec{v_1},\vec{u}) = -\left[\det(\vec{v},\vec{u}) + \det(\vec{v_1},\vec{u})\right]$$
$$= \det(\vec{u},\vec{v}) + \det(\vec{u},\vec{v_1})$$

Le déterminant de 2 vecteurs du plan est une forme bilinéaire et antisymétrique.

ex 1. Simplifier :

- $\det(2\vec{u},3\vec{v}) = 2\det(\vec{u},3\vec{v}) = 6\det(\vec{u},\vec{v})$
- $\det(-\vec{u},-\vec{v}) = \det(\vec{u},\vec{v})$
- $\det(3\vec{u}+2\vec{v},4\vec{v}) = \det(3\vec{u},4\vec{v}) + \det(2\vec{v},4\vec{v}) = 12\det(\vec{u},\vec{v})$
- $\det(2\vec{u}-3\vec{v},5\vec{u}+7\vec{v}) = \det(2\vec{u},5\vec{u}+7\vec{v}) + \det(-3\vec{v},5\vec{u}+7\vec{v})$
  $= \det(2\vec{u},7\vec{v}) + \det(-3\vec{v},5\vec{u}) = 14\det(\vec{u},\vec{v}) - 15\det(\vec{v},\vec{u})$
  $= 29\det(\vec{u},\vec{v})$

2. Soit G le centre de gravité de ABC. Comparer les aires des triangles GAB, GBC, GCA et ABC.



$$\mathcal{A}_{GAB} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{GB},\vec{GA})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(-\vec{GA}-\vec{GC},\vec{GA})\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\det(-\vec{GA},\vec{GA}) + \det(-\vec{GC},\vec{GA})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{GC},\vec{GA})\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\det(\vec{GC},\vec{GA})\right| = \mathcal{A}_{GCA}$$

on a $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ de même, $\mathcal{A}_{GAB} = \mathcal{A}_{GBC}$

Ainsi, $\mathcal{A}_{GAB} = \mathcal{A}_{GCA} = \mathcal{A}_{GBC} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}$

IV.1.1. a) $D(A,\vec{u})$, $M(x,y) \in D \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \vec{AM} = \lambda\vec{u}$

$\iff \begin{cases} x-2 = -\lambda \\ y-1 = 3\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1+3\lambda \end{cases}$

b) $M(x,y) \in D \iff \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \vec{AM} = t\vec{u} \iff \begin{cases} x = 1+t \\ y = -3 \end{cases}$

c) $M(x,y) \in D \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \vec{AM} = \lambda\vec{u} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 3+\lambda \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-4 = -3t \\ y-1 = 2t \end{cases}$ représente la droite passant par $A(4,1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(-3,2)$

2. dém

$D(A,\vec{u})$ $\begin{cases} A(x_0,y_0) \\ \vec{u}(\alpha,\beta) \end{cases}$

$M(x,y) \in D \iff \det(\vec{AM},\vec{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha \\ y-y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$

$\iff x\beta - x_0\beta - y\alpha + y_0\alpha = 0$

$\iff \underbrace{\beta}_{a} x + \underbrace{(-\alpha)}_{b} y + \underbrace{(-\beta x_0 + \alpha y_0)}_{c} = 0$

Pb : Que représente (1) $ax+by+c=0$?

Soit (x_0,y_0) vérifiant (1) : $ax_0+by_0+c=0$

donc $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \iff \begin{vmatrix} x-x_0 & -b \\ y-y_0 & a \end{vmatrix} = 0$

$\iff \det(\vec{AM},\vec{u}) = 0$

(1) représente la droite passant par $A(x_0,y_0)$ de vecteur directeur $\vec{u}(-b,a)$

ex : a) D passe par $A(2,1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(3,2)$:

(D) : $2x-3y=c$

$A \in D$: $c = 2\times 2 - 3\times 1 = 1$

donc (D) : $2x-3y-1=0$

b) $M(x,y) \in (D) \iff \det(\vec{AM},\vec{AB}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-4 & -3 \\ y+1 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$\iff 6x-20+3y+3=0$

(D) : $6x+3y-17=0$

3. dém

$D(A,\vec{u})$ avec $\vec{u}(-b,a)$

$D'(A',\vec{u}')$ $\quad\vec{u}'(-b',a')$

$D \parallel D' \iff \det(\vec{u},\vec{u}') = 0 \iff \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0 \iff -ba'+ab'=0$

$\iff \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$

ex • $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1$ (I) admet 1 unique solution, (I) est 1 système de Cramer.

solution : $(61,-79)$

• (I) $\begin{cases} mx+(m-3)y=6 \\ (m+1)x+(m-1)y=4 \end{cases}$ $\quad\delta = \begin{vmatrix} m & m-3 \\ m+1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2-m-m^2+3m-m+3 = 3+m$

si $m=-3$: (I) $\iff \begin{cases} -3x-6y=6 \\ -2x-4y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} -x-2y=2 \\ -x-2y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2-2y \\ y=y \end{cases}$

(I) admet 1 infinité de solutions : $(-2-2y,\, y)$ $(y \in \mathbb{R})$.

si $m \neq -3$: (I) admet 1 unique solution.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{(m+1)(m-3)y - m(m-1)y}_{-\delta y} = 6(m+1) - 4m \\ \underbrace{m(m-1)x - (m+1)(m-3)x}_{\delta x} = 6(m-1) - 4(m-3) \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x(m+3) = 2m+6 \\ -y(m+3) = 2m+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

• (II) $\begin{cases} (3m+1)x + (m+5)y = m-9 \\ 2mx + (m+2)y = -4 \end{cases}$ $\quad \delta = \begin{vmatrix} 3m+1 & m+5 \\ 2m & m+2 \end{vmatrix} = 3m^2 + 6m + m + 2 - 2m^2 - 10m = m^2 - 3m + 2$

$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad m = \frac{3 \pm 1}{2} \quad m_1 = 2 \quad m_2 = 1$

1er cas : $m = 1$: (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -8 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 3y = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \frac{3}{2}y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

(II) admet 1 infinité de solutions $(-2 - \frac{3}{2}y, y)$ $(y \in \mathbb{R})$.

2ème cas : $m = 2$: (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 7y = -7 \\ 4x + 4y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = -1 \Leftrightarrow x = -1 - y$

(II) admet 1 infinité de solution $(-1-y, y)$ $(y \in \mathbb{R})$.

3ème cas : $m \neq 1$ et $m \neq 2$: (II) admet 1 unique solution.

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)(3m+1)x - (m+5)2mx = (m+2)(m-9) - (m+5)(-4) \\ 2m(m+5)y - (3m+1)(m+2)y = 2m(m-9) - (3m+1)(-4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \delta x = m^2 - 9m + 2m - 18 + 4m + 20 \\ -\delta y = 2m^2 - 18m + 12m + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m^2 - 3m + 2}{m^2 - 3m + 2} \\ y = \dfrac{2m^2 - 6m + 4}{-m^2 + 3m - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

4. ex : $D(A, \vec{u})$ avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $\quad \vec{v}(4,3)$ est normal à (D)

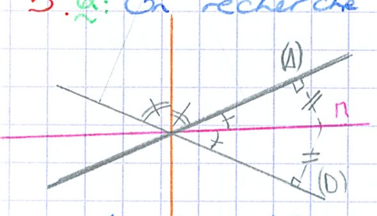
$\Delta(\vec{v})$ $\quad$ donc $(D) : 4x + 3y = c$

on a $D(A, \vec{u})$ avec $\begin{cases} A(2,1) \\ \vec{u}(-3,4) \end{cases}$

$A \in (D) : 4 \times 2 + 3 \times 1 = c = 11$

Ainsi, $(D) : 4x + 3y = 11$

5. ex : On recherche les points $M(x,y)$ / $d(M,(D)) = d(M,(\Delta))$ (1)



$$(1) \Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-12x + 5y - 7|}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$$

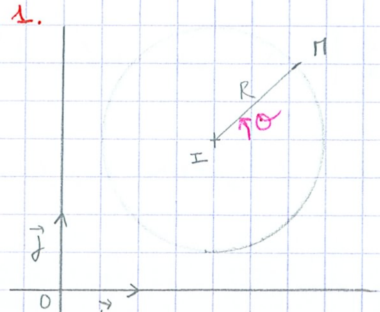
$$\Leftrightarrow 13|3x - 4y + 1| = 5|-12x + 5y - 7|$$

$$\Leftrightarrow 13(3x - 4y + 1) = 5(-12x + 5y - 7) \text{ ou } 13(3x - 4y + 1) = -5(-12x + 5y - 7)$$

Les bissectrices ont pour équation :

$99x - 77y + 48 = 0$ et $-21x - 27y - 22 = 0$

I. 1.

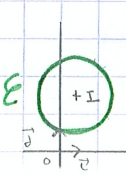


$\vec{IM} = R\cos\theta\, \vec{i} + R\sin\theta\, \vec{j}$

$\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{OM}$

$\mathcal{E}(I,R) : \begin{cases} x = x_I + R\cos\theta \\ y = y_I + R\sin\theta \end{cases}$

ex : 1.



$(\mathcal{E}) : \begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = 3 + 2\sin\theta \end{cases}$

IV- Droites du plan

1. Représentation paramétrique

Le plan affine euclidien est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Une droite (D) peut être définie par :

- la donnée d'un point $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ $D(A, \vec{u})$
- ou la donnée de deux points distincts A et B (on prend alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$)

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D)$ si et seulement si il existe $\lambda \in R$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$, c'est-à-dire $\boxed{(I) \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases} \lambda \in R}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ A M

Le système (I) constitue une représentation paramétrique de (D)

Réciproquement un système de la forme (I) représente la droite passant par $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Exercice 1 Ecrire une représentation paramétrique de (D) dans les cas suivants :

a) $A(2,1)$ et $\vec{u}(-1,3)$ b) $A(1,3)$ et $\vec{u}(1,0)$ c) $A(1,3)$ et $\vec{u}(0,1)$

Exercice 2 Quel est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ $t \in R$?

2. Equation cartésienne d'une droite

Rappels	**Une droite (D) a une équation cartésienne de la forme : $ax + by = c$ avec $(a,b) \neq (0,0)$** **Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$** * dém

Exercice Ecrire une équation cartésienne de (D) dans les cas suivants :

a) $(D) = (A, \vec{u})$ avec $A(2,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $(D) = (AB)$ avec $A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. Parallélisme de deux droites

Théorème	**Les droites $(D): ax + by = c$ (avec $(a,b) \neq (0,0)$) et $(D'): a'x + b'y = c'$ (avec $(a',b') \neq (0,0)$) sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$**

Démonstration : *voir cours* *

Application	**Le système (I) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ d'inconnue (x,y), admet une solution unique si et seulement si $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$** c'est-à-dire si (I) représente 2 droites non // **Si $\delta = 0$ le système a aucune solution ou une infinité** **δ est appelé déterminant du système (I)**

Démonstration : *voir cours*

ex : (I) $\begin{cases} 4x + 3y - 7 = 0 \\ 5x + 4y + 11 = 0 \end{cases}$

Exercice Discuter et résoudre les systèmes suivants, d'inconnue (x, y), m étant un paramètre réel :

$$(I)\begin{cases} mx+(m-3)y=6 \\ (m+1)x+(m-1)y=4 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} (3m+1)\,x+(m+5)y=m-9 \\ 2mx+(m+2)y=-4 \end{cases}$$

4. Vecteur normal à une droite

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Définition	$\vec{v}$ **est normal à la droite (D) si et seulement si** $\begin{cases} \vec{v}\neq\vec{0} \\ \vec{v} \text{ est orthogonal à un vecteur directeur de (D)} \end{cases}$

Théorème	**Soit** $(D): ax+by=c$ **(avec** $(a,b)\neq(0,0)$**). Un vecteur normal à (D) est** $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

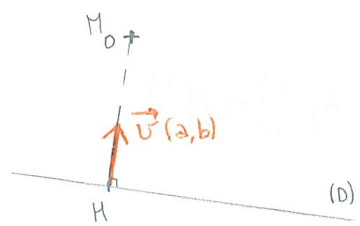
Exercice Ecrire une équation cartésienne de la droite passant par $A(2,1)$ et perpendiculaire à $(\Delta): 3x-4y=1$

5. Distance d'un point à une droite

Théorème	**Soient** $(D): ax+by+c=0$ **(avec** $(a,b)\neq(0,0)$**) et** $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ **La distance de** M_0 **à (D) est** $d[M_0,(D)]=\dfrac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Démonstration : *voir cours*

Exercice Ecrire une équation cartésienne des bissectrices des deux droites : (D) $3x-4y=-1$ et (Δ) $-12x+5y=7$



$$\begin{cases} \overrightarrow{HM_0} \text{ normal à } (D) \\ H\in(D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HM_0}=\lambda\vec{u} \\ H\in(D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_0-x_H=\lambda a \\ y_0-y_H=\lambda b \end{cases} \\ H\in(D) \end{cases}$$

donc $\begin{cases} H\begin{pmatrix} x_0-\lambda a \\ y_0-\lambda b \end{pmatrix} \\ H\in(D) \end{cases}$

d'où $a(x_0-\lambda a)+b(y_0-\lambda b)+c=0$

$\Leftrightarrow ax_0+by_0+c-\lambda(a^2+b^2)=0$

$\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$

Ainsi, $d(M_0,(D))=\|\overrightarrow{HM_0}\|=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\|\vec{u}\|=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

I- Cercles du plan

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Equation cartésienne d'un cercle

Méthode Une équation cartésienne du cercle (C) de centre $I(x_0, y_0)$ et de rayon R s'obtient en traduisant :

$M \in (C) \Leftrightarrow IM^2 = R^2$

Exercice 1 Ecrire une équation du cercle de centre $I(1,3)$ et de rayon $R = 2$

Exercice 2 Que représente :

a) $x^2 + y^2 - 2x = 0$? b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 14 = 0$? c) $x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$?

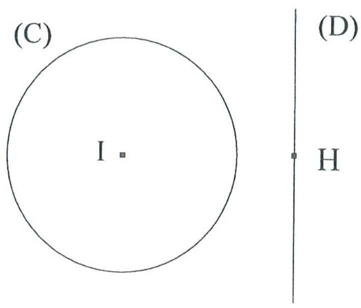
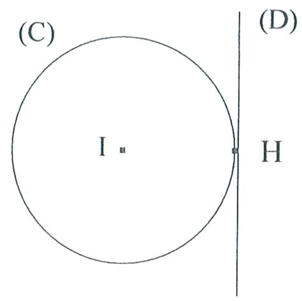
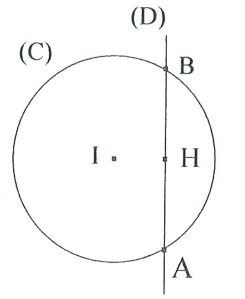
2. Représentation paramétrique d'un cercle

Rappel Une représentation paramétrique du cercle de centre $I(x_0, y_0)$ et de rayon R est : $\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

3. Problèmes d'intersection

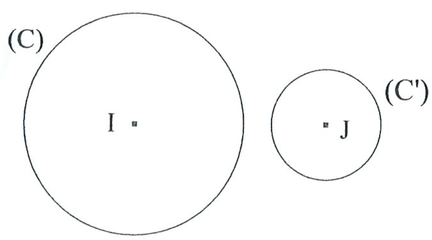
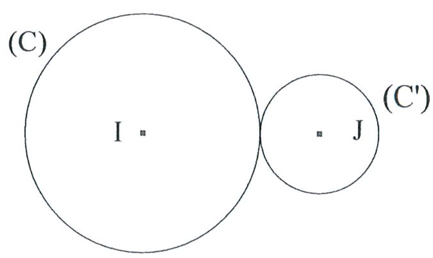
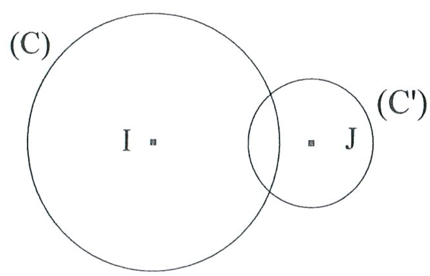
Problème 1 Etudier l'intersection de la droite (D) et du cercle de centre I et de rayon R

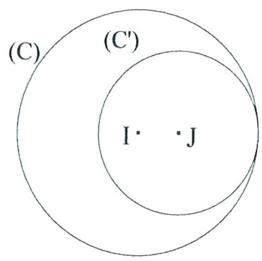
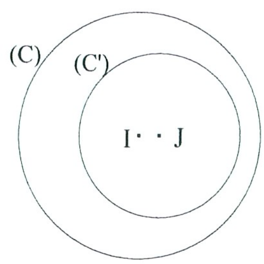
Il y a 3 cas :

$d[I,(D)] > R$	$d[I,(D)] = R$	$d[I,(D)] < R$
		
$(C) \cap (D) = \varnothing$	$(C) \cap (D) = \{H\}$	$(C) \cap (D) = \{A, B\}$

Problème 2 Etudier l'intersection du cercle (C), de centre I et de rayon R, et du cercle (C'), de centre J et de rayon r.

Il y a 5 cas :

$IJ > R + r$	$IJ = R + r$	$\lvert R - r\rvert < IJ < R + r$
		
cercles disjoints (extérieurement)	cercles tangents extérieurement	cercles sécants

$IJ = \lvert R - r\rvert$	$IJ < \lvert R - r\rvert$
	
cercles tangents intérieurement	cercles disjoints (intérieurement)

2. a) $x^2+y^2-2x=0 \iff (x-1)^2-1+y^2=0 \iff (x-1)^2+y^2=1$

$\rightarrow$ cercle de $\left|\begin{array}{l}\text{centre } I(1,0)\\ \text{rayon } R=1\end{array}\right.$

b) $x^2+y^2-4x+6y-14=0 \iff (x-2)^2-4+(y+3)^2-9-14=0$

$\iff (x-2)^2+(y+3)^2=27$

$\rightarrow$ cercle de $\left|\begin{array}{l}\text{centre } J(2,-3)\\ \text{rayon } R=\sqrt{27}=3\sqrt{3}\end{array}\right.$

c) $x^2+y^2-x+y+1=0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=0$

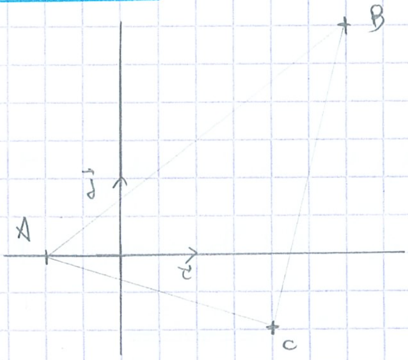
$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$

$\rightarrow$ ensemble vide

4. exercices

1. Ecrire une équation du cercle circonscrit au triangle ABC / $A(-1,0)$, $B(3,3)$, $C(2,-1)$

Méthode 1 $\rightarrow$ on recherche le centre I en écrivant $\begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \end{cases}$ (1) ⚠ ne pas écrire $IB^2=IC^2$



coordonnées de I :

(1) $\iff \begin{cases}(-1-x)^2+y^2=(3-x)^2+(3-y)^2\\(-1-x)^2+y^2=(2-x)^2+(-1-y)^2\end{cases}$

$\iff \begin{cases}8x+6y-17=0\\-4+6x-2y=0\end{cases}$

$\iff \begin{cases}18y-51+8y+16=0\\8x+18x-17-12=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=\frac{29}{26}\\y=\frac{35}{26}\end{cases}$

rayon : $R=IA$

$R=\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{29}{26}+1\right)^2+\left(\frac{35}{26}\right)^2}=\frac{1}{26}\sqrt{55^2+35^2}$

$R=\frac{5}{26}\sqrt{170}$

équation de $(\mathcal{E})$: $\left(x-\frac{29}{26}\right)^2+\left(y-\frac{35}{26}\right)^2=\frac{25}{26^2}\,170$

Méthode 2 $\rightarrow$ on part de l'équation générale d'un cercle :

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

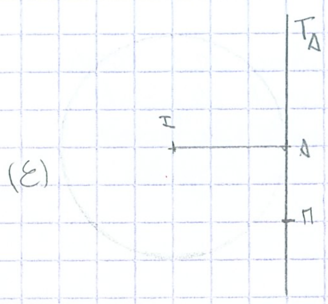
on écrit que $(\mathcal{E})$ passe par A, B, C

$\begin{cases}A\in(\mathcal{E}) : (-1)^2-a+c=0\\B\in(\mathcal{E}) : 3^2+3^2+3a+3b+c=0\\C\in(\mathcal{E}) : 2^2+(-1)^2+2a-b+c=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=1+c\\18+3b+c+3+3c=0\\5+c-b+2+2c=0\end{cases}$

$\iff \begin{cases}a=1+c\\21+3b+4c=0\\7-b+3c=0\end{cases} \iff \begin{cases}42+13c=0\\63-28+9b+4b=0\\a=1+c\end{cases} \iff \begin{cases}c=-\frac{42}{13}\\a=1-\frac{42}{13}=-\frac{29}{13}\\b=\frac{35}{13}\end{cases}$

$(\mathcal{E})$: $x^2+y^2-\frac{29}{13}x+\frac{35}{13}x-\frac{42}{13}=0$

2. On considère le cercle $\mathcal{C}(I,R)$ et 1 pt $A\in(\mathcal{C})$ avec $I(1,1)$, $R=2$, $A\begin{pmatrix}2\\1+\sqrt{3}\end{pmatrix}$
Ecrire une équation de T_A.



$M\in T_A \iff \vec{IA}\cdot\vec{AM}=0$

On vérifie que $A\in\mathcal{C}(I,2)$:

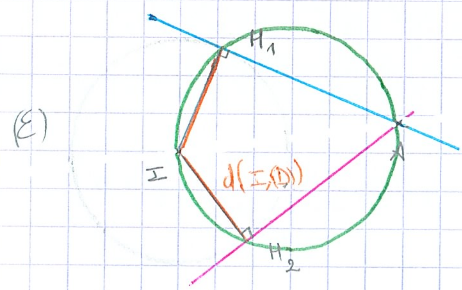
$AI=\sqrt{(1-2)^2+(1-1-\sqrt{3})^2}=2$

$\vec{IA}\cdot\vec{AM}=0 \iff (2-1)(x-2)+(1+\sqrt{3}-1)(y-1-\sqrt{3})=0$

$\iff x-2+y\sqrt{3}-\sqrt{3}-3=0$

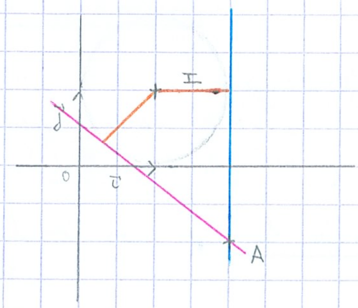
$\iff x+\sqrt{3}y-(5+\sqrt{3})=0$

3. On considère $\mathcal{C}(I, R)$ et A extérieur à $(\mathcal{E})$.
Déterminer les tangentes à $(\mathcal{E})$ passant par A.



Méthode → – on considère la droite (D) (on prend $D = T_{A_1}$ puis T_{A_2})
on écrit $\begin{cases} A \in (D) \\ d(I,(D)) = R \end{cases}$
– H_1 et H_2 sont sur le cercle de diamètre $[AI]$.

application : $I\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $R = 1$ $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$



- soit 1 droite (D) : $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$

$A \in (D) \iff 2a - b + c = 0 \iff c = b - 2a$
(D) passant par A a 1 équation de la forme :
$ax + by + b - 2a = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$

- $d(I,(D)) = R$ (1)

(1) $\iff \dfrac{|a + b + b - 2a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \iff |-a+2b| = \sqrt{a^2+b^2} \iff (-a+2b)^2 = a^2+b^2$

$\iff a^2 + 4b^2 - 4ab = a^2 + b^2 \iff 3b^2 - 4ab = 0 \iff b(3b - 4a) = 0$

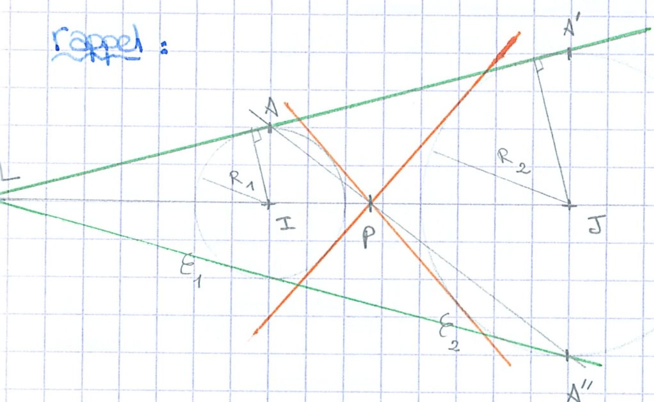
1er cas : $b = 0$ $(a \neq 0)$
(D) : $ax + c = 0 \iff ax + 0 - 2a = 0 \iff \underline{x = 2}$

2ème cas : $b \neq 0$
(1) $\iff b = \frac{4}{3}a$ (D) : $ax + \frac{4}{3}ay + \frac{4}{3}a - 2a = 0 \iff x + \frac{4}{3}y - \frac{2}{3} = 0$

(D) : $\underline{3x + 4y - 2 = 0} \iff y = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x$

4. On considère $\mathcal{E}_1(I, R_1)$ et $\mathcal{E}_2(J, R_2)$.
Déterminer, si elles existent, les tangentes communes aux 2 cercles.

rappel :



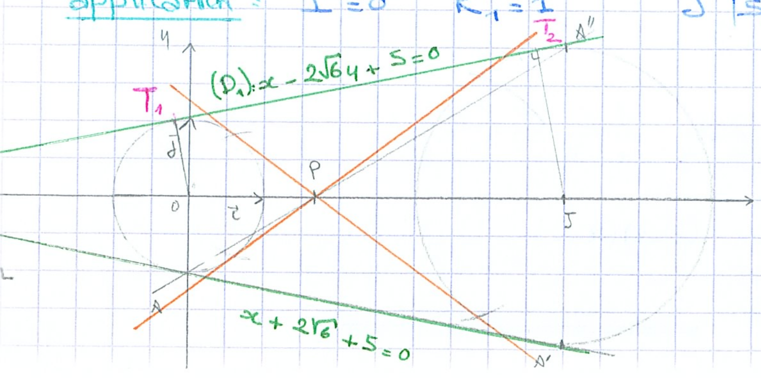
si $R_1 \neq R_2$: il existe 2 homothéties transformant $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_2$:

– $H_{L, \frac{R_2}{R_1}}$ qui transforme I en J.
$\vec{LJ} = \frac{R_2}{R_1}\vec{LI}$ (ce qui détermine L)

– $H_{P, -\frac{R_2}{R_1}}$ qui transforme I en J :
$\vec{PJ} = -\frac{R_2}{R_1}\vec{PI}$ (ce qui détermine P)

Méthode → – on détermine les 2 centres d'homothétie L et P
– on recherche les droites passant par L et P, tangentes à l'un des cercles (elle l'est forcément à l'autre car passe par le centre d'homothétie)

application : $I = O$ $R_1 = 1$ $J(5,0)$ $R_2 = 2$



$OJ > R_1 + R_2$ donc les cercles sont disjoints extérieurement

il y a donc 4 tangentes.

* coordonées de P et L.

- $\vec{LJ} = 2\vec{LO}$ donc $L(-5,0)$
- $\vec{PJ} = -2\vec{PO}$ donc $(-5-x) = -2(x) \iff x = \frac{5}{3}$ $P(\frac{5}{3},0)$

* tangentes passant par L.

(D) : $ax+by+c=0$, $(a,b)\neq(0,0)$ $\begin{cases} L\in(D) \\ d(O,(D))=1 \end{cases}$

$L\in(D) \iff -5a+c=0 \iff c=5a$

(D) : $ax+by+5a=0$

$d(O,(D)) = \frac{|5a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \implies 25a^2 = a^2+b^2 \iff b = 2a\sqrt{6}$ ou $-2a\sqrt{6}$

Les tangentes communes passant par L ont pour équation.

$\begin{cases} ax+2a\sqrt{6}y+5a=0 \\ ax-2a\sqrt{6}y+5a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2\sqrt{6}y+5=0 \\ x-2\sqrt{6}y+5=0 \end{cases}$

* tangentes passant par P.

(D) : $ax+by+c=0$ $(a,b)\neq(0,0)$ $\begin{cases} P\in(D) \\ d(O,(D))=1 \end{cases}$

$P\in(D) \iff \frac{5}{3}a+c=0 \iff c=-\frac{5}{3}a$

(D) : $ax+by-\frac{5}{3}a=0$

$d(J,(D)) = \frac{|\frac{5}{3}a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \iff \frac{25}{9}a^2 = a^2+b^2 \iff b^2 = \frac{16}{9}a^2$

Les tangentes communes passant par P ont pour équation.

$\begin{cases} ax+\frac{4}{3}ay-\frac{5}{3}a=0 \\ ax-\frac{4}{3}ay-\frac{5}{3}a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+\frac{4}{3}y-\frac{5}{3}=0 \\ x-\frac{4}{3}y-\frac{5}{3}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+4y-5=0 \\ 3x-4y-5=0 \end{cases}$

* points de contact T_1 et T_2.

- T_1 est la projection orthogonale de O sur (D_1).

$D_1(L,\vec{u})$ avec $\begin{cases} L(-5,0) \\ \vec{u}(2\sqrt{6},1) \end{cases}$

D_1 est définie par : $\vec{LT_1} = \frac{\vec{LO}\cdot\vec{u}}{\vec{u}^2}\vec{u} = \frac{5\times2\sqrt{6}}{4\times6+1}\begin{pmatrix}2\sqrt{6}\\1\end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix}x+5\\y\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\sqrt{6}\begin{pmatrix}2\sqrt{6}\\1\end{pmatrix}$ d'où $T_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{2\sqrt{6}}{5}\end{pmatrix}$

- $H_{L,2}(T_1) = T_2$: $\vec{LT_2} = 2\vec{LT_1}$

$\iff \begin{pmatrix}x+5\\y\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}+5\\\frac{2\sqrt{6}}{5}\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{48}{5}-5 \\ y = \frac{4}{5}\sqrt{6} \end{cases}$ d'où $T_2\begin{pmatrix}\frac{23}{5}\\\frac{4}{5}\sqrt{6}\end{pmatrix}$

rem : pour trouver géométriquement les autres points de contact :
Les cercles $\mathcal{C}(P,\frac{OP}{2})$ et $\mathcal{C}(J,\frac{PJ}{2})$ coupent les cercles initiaux aux points de contact.