Approximation des fonctions

I intervalle, F ev normé de dim finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de F

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

I Ensembles de fonctions

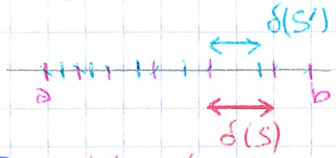
1 _ fonctions en escalier

$I = [ab]$ partage de I = subdivision de I = S

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $S = \{x_0, \dots, x_n\}$

S' subdivision plus fine que S : $S \subset S'$ (plus de pts dans S')

pas de la subdivision : $\delta(S) = \sup\{x_{i+1} - x_i,\ i \in \{0, \dots, n-1\}\}$



S' plus fine que S $\Longrightarrow$ $\delta(S') \leqslant \delta(S)$

S subd régulière : $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$

dans ce cas, $x_i = a + i \underbrace{\dfrac{b-a}{n}}_{\delta(S)}$

rem : si $\begin{cases} S \text{ subd de card } n+1 \\ \delta(S) = \dfrac{b-a}{n} \end{cases}$ $\Longrightarrow$ S subd régulière

$x_1 - x_0 \leqslant \dfrac{b-a}{n}$

$x_2 - x_1 \leqslant \dfrac{b-a}{n}$

$\vdots$

$x_n - x_{n-1} \leqslant \dfrac{b-a}{n}$

$x_n - x_0 = b - a \leqslant b - a$

donc $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$ donc S est **régulière**

$\varphi : I \to F$ est en escalier sur I $\Longleftrightarrow$ $\exists S$ subd de I / $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, φ est cste sur $]x_i, x_{i+1}[$: $\exists C_i \in F$ / $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[$, $\varphi(x) = C_i$

on dit que S est une subd adaptée à φ

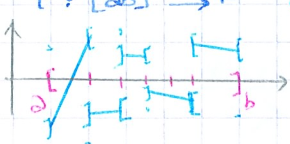
si S' est plus fine que S, S' est encore adaptée à φ

$\mathcal{E}([ab], F)$: ensemble des fct° en escalier sur $[ab]$ à valeurs ds F

Pp
1) $\mathcal{E}([ab], F)$ est un $\mathbb{K}$ ev
2) $\forall \varphi \in \mathcal{E}([ab], F)$, $\varphi([ab])$ est un ss ensemble fini de F, donc borné donc φ est bornée
3) $\mathcal{E}([ab], F)$ est muni de la norme sup (de la CV unif. N_∞)
   $\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(t)| \ / \ t \in [ab]\}$
4) si $F = \mathbb{K}$, $\mathcal{E}([ab], \mathbb{K})$ est une algèbre
5) si $F = \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{C})$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} Re(\varphi) \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{R}) \\ Im(\varphi) \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{R}) \end{cases}$
6) si $\dim F = n$,
   $\varphi \in F^{[ab]}$, ses appli. composantes dans $\mathcal{B}$ sont $\varphi_1, \dots, \varphi_n$
   $(\forall x \in [ab],\ \varphi(x) = \varphi_1(x) e_1 + \dots + \varphi_n(x) e_n)$
   $\varphi \in \mathcal{E}([ab], F) \Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \varphi_j \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{K})$

2 _ fonctions affines par morceaux

$\varphi : [ab] \to F$ affine par morceaux $\Longleftrightarrow$ $\exists S$ de $[ab]$ / $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, φ est affine sur $]x_i, x_{i+1}[$:

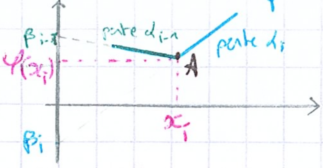


$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\exists (\alpha_i, \beta_i) \in F^2$ / $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[$, $\varphi(x) = \alpha_i x + \beta_i$

Pp
1) ss ev de $F^{[ab]}$
2) les fct° en escalier sont affines par morceaux
3) si $\begin{cases} \varphi \text{ est affine par m. sur } [ab] \\ S \text{ subd adaptée à } \varphi \end{cases}$
   φ continue sur $[ab]$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \varphi(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \varphi(x) \\ \varphi(b) = \lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x) \\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\},\ \varphi(x_i) = \lim\limits_{x_i^+} \varphi(x_i) = \lim\limits_{x_i^-} \varphi(x_i) \end{cases}$

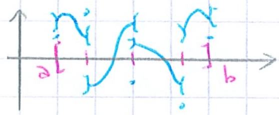
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(a) = \alpha_0 a + \beta_0 \\ \varphi(b) = \alpha_{n-1} b + \beta_{n-1} \\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \varphi(x_i) = \underline{\alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1}} = \underline{\alpha_i x_i + \beta_i} \end{cases}$$

en A, les 2 droites doivent se $\overbrace{\text{raccorder}}$



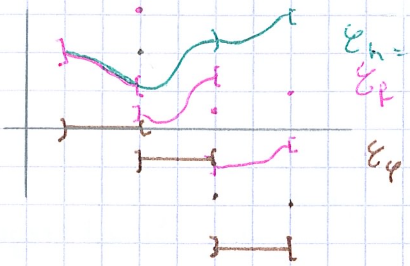
3 - fonctions continues par morceaux

$\varphi : [ab] \to F$ continue par morceaux $\Leftrightarrow$ $\exists S$ de $[ab]$ / $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$,
$\varphi \in CM([ab], F)$
$\begin{cases} \varphi \text{ continue sur }]x_i, x_{i+1}[\\ \varphi \text{ admet une lim en } x_i^+ \text{ et en } x_i^- \end{cases}$



Pp 1) $CM([ab], F)$ ss_ev de $F^{[ab]}$
2) $CM([ab], F) \subset \mathcal{B}([ab], F)$ $\quad$ $CM([ab], F)$ muni de la norme sup
3) $\mathcal{E}([ab], F) \subset CM([ab], F)$
4) affine par m $\Rightarrow$ CM
5) $C^0([ab], F) \subset CM([ab], F)$

6) $\begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{E}([ab], F) \\ \forall h \in C^0([ab], F) \end{cases}$, $f = \varphi + h \in CM([ab], F)$
réciproquement, $\forall f \in CM([ab], F) \; \exists \begin{cases} \varphi \in \mathcal{E}([ab], F) \\ h \in C^0([ab], F) \end{cases}$ / $f = \varphi + h$



4 - polynômes trigonométriques

$F = \mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$, $e_k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{ikx} \end{array}$ $\quad$ ens. des polynômes trigo $= \text{Vect}(e_k / k \in \mathbb{Z})$

P poly trigo $\Leftrightarrow$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists (a_k)_{-n_0 \leq k \leq n_0} \in \mathbb{C}^{2n_0+1}$ /

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_{-n_0} e^{-in_0 x} + a_{-n_0+1} e^{-i(n_0-1)x} + \dots + a_{-1} e^{-ix} + a_0 + a_1 e^{ix} + \dots + a_{n_0} e^{in_0 x}$

$F = \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$,
$\forall k \in \mathbb{N}$, $c_k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \cos(kx) \end{array}$, $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*$, $s_k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \sin(kx) \end{array}$

ens. des poly trigo $= \text{Vect}(\{c_k / k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k / k \in \mathbb{N}^*\})$

P poly trigo $\Leftrightarrow$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, \dots, a_{n_0}) \in \mathbb{K}^{n_0+1}$ /
$\exists (b_1, \dots, b_{n_0}) \in \mathbb{K}^{n_0}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; P(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \dots + a_{n_0} \cos(n_0 x) + b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + \dots + b_{n_0} \sin(n_0 x)$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n_0} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Pp 1) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les 2 déf. coïncident : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} e_k = c_k + i s_k \\ e_{-k} = c_k - i s_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_k = \frac{1}{2}(e_k + e_{-k}) \\ s_k = \frac{1}{2i}(e_k - e_{-k}) \end{cases}$

2) P poly trigo $\Rightarrow$ $\begin{cases} P \in \mathcal{C}^\infty \\ P \; 2\pi\text{-périodique} \\ P \text{ bornée} \end{cases}$

II Approximations

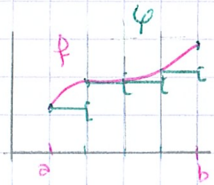
1 - approximations des fonctions continues par des fonctions en escalier

Th $\forall f \in C^0([ab], F)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in \mathcal{E}([ab], F)$ / $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$

corollaire Tte fct° continue sur $[ab]$ à valeurs ds F est limite uniforme d'une suite de fct° en escalier sur $[ab]$:
$\forall f \in C^0([ab], F)$, $\exists \varphi_n \in (\mathcal{E}([ab], F))^{\mathbb{N}}$ / $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV unif^t vers f

f continue sur le compact $[ab]$

$|\ |$ chez les réels
$\|\ \|$ ds un ev



donc Th de Heine : f unif^t continue sur $[ab]$:
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \,/\, \forall (x, x') \in [ab]^2,\ |x - x'| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
soit $S : x_0 < x_1 < \dots < x_n$ subd de $[ab]$ de pas $\delta \leq \eta$

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} [ab] \longrightarrow F \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[\text{ pour } i \in \{0, \dots, n-1\} \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases} \end{array} \right.$$

$\forall x \in [ab]$,
1er cas : $\exists i \in \{0, \dots, n-1\} \,/\, x \in [x_i, x_{i+1}[$,
$\|f(x) - \varphi(x)\| = \|f(x) - f(x_i)\|$
or, $0 \leq |x - x_i| \leq |x_{i+1} - x_i| \leq \eta$
donc $\|f(x) - \varphi(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
2ème cas : $x = b$: $\|f(x) - \varphi(x)\| = \|f(b) - \varphi(b)\| = 0 \leq \frac{\varepsilon}{2}$
donc $\forall x \in [ab]$, $\|f(x) - \varphi(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\|f - \varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$
$\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$

2 - approximations des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier

Th | $\forall f \in C\Pi([ab], F),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{E}([ab], F) \,/\, \|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$

corollaire idem avec tte fct° continue par m
$f = \psi + h$ avec $\begin{cases} \psi \in \mathcal{E}([ab], F) \\ h \in C^0([ab], F) \end{cases}$

3 - approximations des fonctions continues (par morceaux) par des fonctions affines par morceaux
idem

4 - approximations des fonctions continues par des fonctions affines par morceaux continues

Th | $\forall f \in C^0([ab], F),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \begin{cases} \text{affine par m} \\ \text{continue} \end{cases} / \|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$

corollaire idem

déf. barycentrique

$\hat{m}$ dém que 1 - $\exists$ la déf. de φ :

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} [ab] \longrightarrow F \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x = x_i \\ f(x_{i+1}) & \text{si } x = x_{i+1} \\ \varphi \text{ affine} & \text{si } x \in]x_i, x_{i+1}[\end{cases} \end{array} \right.$$

$\varphi \begin{cases} \text{affine par m} \\ \text{continue} \end{cases}$

$\forall x \in [ab],\ \exists i \in \{0, \dots, n-1\} \,/\, x \in [x_i, x_{i+1}]$
$\exists \lambda \in [0, 1] \,/\, x = \lambda x_i + (1 - \lambda) x_{i+1}$
φ affine sur $[x_i, x_{i+1}]$, $\varphi(x) = \lambda \varphi(x_i) + (1 - \lambda)\varphi(x_{i+1})$
$= \lambda f(x_i) + (1 - \lambda) f(x_{i+1})$
$\|f(x) - \varphi(x)\| = \|\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x) - \lambda f(x_i) - (1 - \lambda) f(x_{i+1})\|$
$= \lambda \|f(x) - f(x_i)\| + (1 - \lambda) \|f(x) - f(x_{i+1})\| \leq [\lambda + (1 - \lambda)] \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$
donc $\|f - \varphi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

rem : approx des fct° continues par m par des fct° aff. par m continues : **impossible** :
une lim unif de fct° continues doit être continue

5 - approximations des fonctions continues par des polynômes (cf poly p. 107)

Th de Weierstrass

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ | $\forall f \in C^0([ab], \mathbb{K}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists P$ fct° polynôme / $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$

corollaire : Tte fct° continue sur $[ab]$ à valeurs ds $\mathbb{K}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes

6 - approximations des fonctions continues 2π-périodiques par des polynômes trigonométriques
Th de W avec $f \begin{cases} 2\pi\text{-pér} \\ \text{continue} \end{cases}$, P fct° poly trigo

(1) $P_n(x)=\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right) x^p (1-x)^{n-p}$

(a) $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$

• en dérivant $/x$: $n(x+y)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} p\, x^{p-1} y^{n-p}$

en multipliant par x : $nx(x+y)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} p\, x^{p} y^{n-p}$ (b)

• en dérivant 2 fois (a), puis en multipliant par x^2 : $x^2 n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} p(p-1)\, x^p y^{n-p}$

(2) on pose $r_p(x) = \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}$

(3) avec $y = 1-x$: (a) : $(x+1-x)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}$

$\Leftrightarrow \quad 1 = \sum_{p=0}^{n} r_p(x)$

(b) : $nx = \sum_{p=0}^{n} p\, r_p(x)$

(c) : $n(n-1)x^2 = \sum_{p=0}^{n} p(p-1)\, r_p(x)$

donc $\sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x) = \sum_{p=0}^{n} (nx)^2 r_p(x) + \sum_{p=0}^{n} p^2 r_p(x) - \sum_{p=0}^{n} 2pnx\, r_p(x)$

$= (nx)^2 \sum_{p=0}^{n} r_p(x) + \sum_{p=0}^{n} [p(p-1)+p]\, r_p(x) - 2nx \sum_{p=0}^{n} p\, r_p(x)$

$= (nx)^2 + n(n-1)x^2 + (1-2nx) \sum_{p=0}^{n} p\, r_p(x)$

$= (nx)^2 + n(n-1)x^2 + (1-2nx)\, nx$

(4) $= (nx)^2 + (nx)^2 - nx^2 + nx - 2(nx)^2 = -nx^2 + nx = nx(1-x)$

(5) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ |x-x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$\Big| f(x) - \underbrace{\sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right) r_p(x)}_{P_n(x)} \Big| = \Big| \sum_{p=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right)\right) r_p(x) \Big|$

$\leqslant \Big| \sum_{|p-nx| \leq \delta n} \left(f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right)\right) r_p(x) \Big| + \Big| \sum_{|p-nx| > \delta n} \underbrace{\left(f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right)\right)}_{\leqslant 2M} r_p(x) \Big|$

$\left|\frac{p}{n} - x\right| \leq \delta \Rightarrow \left|f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right)\right| < \varepsilon$ car $|f(x)| \leqslant M$

$\leqslant \Big| \sum_{p=0}^{n} \varepsilon\, \underbrace{r_p(x)}_{\geq 0} \Big| + 2M \Big| \sum_{|p-nx| > \delta n} r_p(x) \Big|$ $\quad \frac{p-nx}{\delta n} > 1$

$\leqslant \varepsilon \sum_{p=0}^{n} r_p(x) + 2M \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{p-nx}{n\delta} \right)^2 r_p(x)$

$\leqslant \varepsilon + 2M \frac{1}{(n\delta)^2} \sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x)$

$2x(1-x) = -2(x^2 - x)$
$= -2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$
$= -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$

$\leqslant \varepsilon + \frac{2M}{(n\delta)^2} nx(1-x) = \varepsilon + \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2}$

$\leqslant \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{M}{n\delta^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Weierstrass' Polynomial Approximation Theorem. Let $f(x)$ be a real-valued (or complex-valued) continuous function on the closed interval $[0, 1]$. Then there exists a sequence of polynomials $P_n(x)$ which converges, as $n \to \infty$, to $f(x)$ uniformly on $[0, 1]$. According to S. BERNSTEIN, we may take

$$P_n(x) = \sum_{p=0}^{n} {}_nC_p\, f(p/n)\, x^p (1-x)^{n-p}. \tag{1}$$

Proof. Differentiating $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} {}_nC_p\, x^p y^{n-p}$ with respect to x and multiplying by x, we obtain $nx(x+y)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n} p\, {}_nC_p\, x^p y^{n-p}$. Similarly, by differentiating the first expression twice with respect to x and multiplying by x^2, we obtain $n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{p=0}^{n} p(p-1)\, {}_nC_p\, x^p y^{n-p}$. Thus, if we set

$$r_p(x) = {}_nC_p\, x^p (1-x)^{n-p}, \tag{2}$$

we have

$$\sum_{p=0}^{n} r_p(x) = 1,\quad \sum_{p=0}^{n} p\, r_p(x) = nx,\quad \sum_{p=0}^{n} p(p-1)\, r_p(x) = n(n-1)x^2. \tag{3}$$

Hence

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x) &= n^2x^2 \sum_{p=0}^{n} r_p(x) - 2nx \sum_{p=0}^{n} p\, r_p(x) + \sum_{p=0}^{n} p^2 r_p(x)\\ &= n^2x^2 - 2nx\cdot nx + (nx + n(n-1)x^2)\\ &= nx(1-x).\end{aligned} \tag{4}$$

We may assume that $|f(x)| \leqq M < \infty$ on $[0, 1]$. By the uniform continuity of $f(x)$, there exists, for any $\varepsilon > 0$, a $\delta > 0$ such that

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \text{ whenever } |x - x'| < \delta. \tag{5}$$

We have, by (3),

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n} f(p/n)\, r_p(x) \right| = \left| \sum_{p=0}^{n} (f(x) - f(p/n))\, r_p(x) \right|$$
$$\leqq \left| \sum_{|p-nx|\leqq \delta n} \right| + \left| \sum_{|p-nx|>\delta n} \right|.$$

For the first term on the right, we have, by $r_p(x) \geqq 0$ and (3),

$$\left| \sum_{|p-nx|\leqq \delta n} \right| \leqq \varepsilon \sum_{p=0}^{n} r_p(x) = \varepsilon.$$

For the second term on the right, we have, by (4) and $|f(x)| \leqq M$,

$$\begin{aligned}\left| \sum_{|p-nx|>\delta n} \right| &\leqq 2M \sum_{|p-nx|>\delta n} r_p(x) \leqq \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x)\\ &= \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leqq \frac{M}{2\delta^2 n} \to 0 \ (\text{as } n \to \infty).\end{aligned}$$

${}_nC_p = \binom{n}{p}$