<u>**Notations :**</u> $\mathcal{E}$ désigne l'espace affine usuel et $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

- Modes de repérage

1 - Repère cartésien

<u>Rappels</u>

Un repère cartésien de l'espace $\mathcal{E}$ est un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point donné de $\mathcal{E}$, appelé origine, et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de $\mathcal{W}$. Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathcal{W}$.

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux le repère est dit **orthogonal** et la base est dite **orthogonale.**

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1 le repère est dit **orthonormal** et la base est dite **orthonormale.**

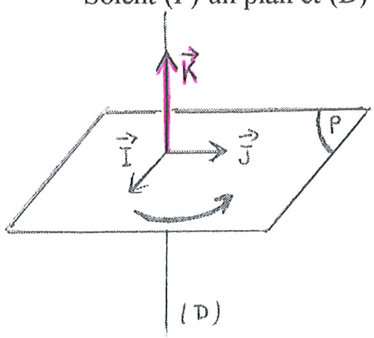
Orienter l'espace c'est classer les bases en deux catégories : les bases directes, les bases indirectes.

La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite **directe** si elle obéit à :

- la règle du "tournevis"
- la règle du tire-bouchon
- la règle d'Ampère
- etc ...

<u>**Remarque**</u> L'espace $\mathcal{E}$ est supposé orienté.

Soient (P) un plan et (D) une droite perpendiculaire.



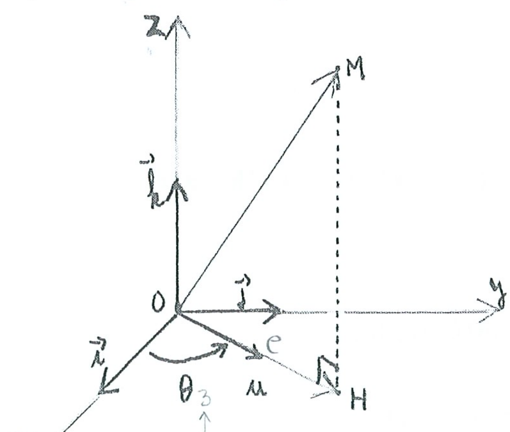
- On oriente la droite (D) par un vecteur $\vec{K}$ unitaire (il y a deux choix).
- Une base orthonormale $(\vec{I}, \vec{J})$ de (P) sera dite directe si la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ de $\mathcal{W}$ est directe.

On dit que l'on a orienté le plan (P) par le vecteur normal $\vec{K}$

2 - Coordonnées cylindriques

L'espace $\mathcal{E}$ est orienté, rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le plan xOy est orienté par le vecteur normal $\vec{k}$.



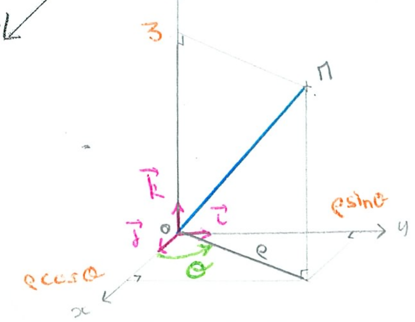
Le point $M(x, y, z)$ se projette orthogonalement en H sur le plan xOy :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HM} = z\,\vec{k}$$

Dans le plan orienté xOy les coordonnées polaires de H sont (ρ, θ), c'est-à-dire $\overrightarrow{OH} = \rho\,\vec{u}$ avec $\vec{u} = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}$

On a donc $\overrightarrow{OM} = \rho\cos(\theta)\,\vec{i} + \rho\sin(\theta)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

Le triplet (ρ, θ, z) est un triplet de **coordonnées cylindriques** de M.

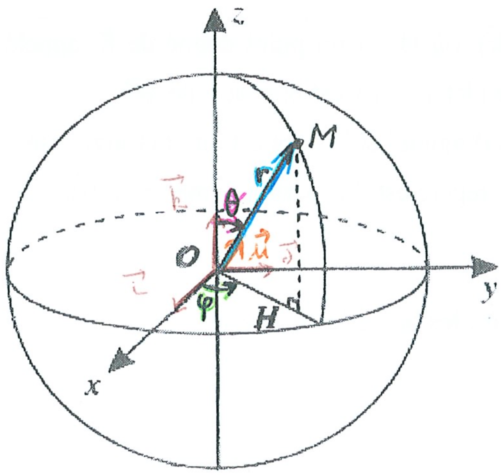


On a donc : $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$

3 - Coordonnées sphériques

L'espace $\mathcal{E}$ est orienté, rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Le plan xOy est orienté par le vecteur normal $\vec{k}$.



Le point $M(x,y,z)$ se projette orthogonalement en H sur le plan xOy :

On pose :

- $r = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$
- θ une mesure appartenant à $[0,\pi]$ de l'angle $(\vec{k},\overrightarrow{OM})$
  θ est la **colatitude** de M
- φ une mesure de l'angle orienté de l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{OH})$. Si $M \in z'Oz$ alors φ peut être quelconque.
  φ est la **longitude** de M

$\overrightarrow{OH} = r\sin(\theta)\,\vec{u}$, avec $\vec{u} = \cos(\varphi)\,\vec{i} + \sin(\varphi)\,\vec{j}$, et $\overrightarrow{HM} = \cos(\theta)\,\vec{k}$

Le triplet (r,θ,φ) est un triplet de **coordonnées sphériques** de M.

On a donc : $\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$

Remarque On utilise parfois la latitude $\lambda = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

- Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

Définition	**Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Ils appartiennent à (au moins) un plan P. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ leur produit scalaire dans le plan P, c'est-à-dire :** • **si l'un des vecteurs est nul : $\vec{u}.\vec{v} = 0$** • **si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$**

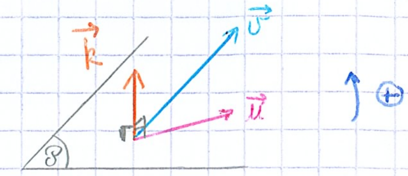
Rappels	**Comme dans le plan :** **Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tout réel λ et μ :** • $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ • $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$, $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$ • $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$, $\vec{u}.(\mu\vec{v}) = \mu(\vec{u}.\vec{v})$

Théorème	**$B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormale. Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ alors :** $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Application	**L' espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.** Si $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ alors $AB = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2}$

III Produit vectoriel de 2 vecteurs de l'espace

1) Définition



Soient $\vec{u}, \vec{v}$ 2 vecteurs de l'espace.
Soit $\mathcal{P}$ 1 plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$
Soit $\vec{k}$ 1 vecteur unitaire normal à $\mathcal{P}$
On oriente $\mathcal{P}$ par la donnée de $\vec{k}$ $\quad$ ($(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ directe)
On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, défini par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{k}$$

rem : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ne dépend pas du choix de $\vec{k}$.

2) Condition nécessaire et suffisante pour que 2 vecteurs soient colinéaires

$\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Th $\boxed{\vec{u}, \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}}$

3) Norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = |\det(\vec{u}, \vec{v})| \cdot \|\vec{k}\| = |\det(\vec{u}, \vec{v})|$ car $\vec{k}$ est unitaire

Th $\boxed{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|}$

interprétation géométrique : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$

4) Direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est colinéaire à $\vec{k}$, donc orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

1er cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

2ème cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires
$\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$

$(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi] \Rightarrow \sin(\vec{u}, \vec{v}) > 0$
$\Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) > 0$
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe

$(\vec{u}, \vec{v}) \in [-\pi, 0] \Rightarrow \sin(\vec{u}, \vec{v}) < 0$
$\Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) < 0$
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe

Th [$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est de sens direct]

5) Autre définition du produit vectoriel

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont
- colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- non colinéaires :
  - $\rightarrow$ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
  - $\rightarrow$ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$
  - $\rightarrow$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ de sens direct

6) Propriétés

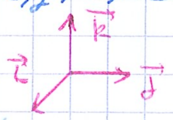
- $\vec{v} \wedge \vec{u} = \det(\vec{v}, \vec{u}) \cdot \vec{k} = -\det(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{k} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$
- soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}'$ 4 vecteurs de l'espace
  soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
  $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \det(\alpha \vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{k} = \alpha \det(\vec{u}, \vec{v}) \vec{k} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$
  $(\vec{u} + \vec{u}') \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u}' \wedge \vec{v}$
  $\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$
  $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{v}') = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}'$

Ex : Simplifier :

- $\vec u \wedge (\vec u + 3\vec v) = \vec u \wedge \vec u + 3(\vec u \wedge \vec v) = 3(\vec u \wedge \vec v)$
- $(2\vec u + \vec v) \wedge (3\vec u - 4\vec v) = 6(\vec u \wedge \vec u) - 8(\vec u \wedge \vec v) + 3(\vec v \wedge \vec u) - 4(\vec v \wedge \vec v) = 11(\vec v \wedge \vec u)$
- $(4\vec u + 5\vec v) \wedge (2\vec u + 3\vec v) = 12(\vec u \wedge \vec v) - 10(\vec v \wedge \vec u) = 22(\vec u \wedge \vec v)$

7) Coordonnées de $\vec u \wedge \vec v$

$(\vec i, \vec j, \vec k)$ est orthonormale directe



$\vec i \wedge \vec j = \vec k$ $\qquad$ $\vec j \wedge \vec i = -\vec k$

$\vec j \wedge \vec k = \vec i$ $\qquad$ $\vec k \wedge \vec j = -\vec i$

$\vec k \wedge \vec i = \vec j$ $\qquad$ $\vec i \wedge \vec k = -\vec j$

$$(x\vec i + y\vec j + z\vec k) \wedge (x'\vec i + y'\vec j + z'\vec k) = xy'\vec k + xz'(-\vec j) + yx'(-\vec k) + yz'\vec i + zx'\vec j + zy'(-\vec i)$$
$$= (yz' - zy')\vec i + (zx' - xz')\vec j + (xy' - yx')\vec k$$

Th

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}}$$

8) Exemples

a calculer $\vec u \wedge \vec v$

- $\vec u(1, -2, 3)$, $\vec v(4, 6, 5)$

$$\vec u \wedge \vec v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\vec u\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $\vec v\left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{4}{3}\right)$

$$\vec u \wedge \vec v = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -41 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b soit $\mathcal{P} : (A, \vec u, \vec v)$ avec $\vec u(1, 2, 1)$, $\vec v(2, 4, 3)$

déterminer 1 vecteur normal à $\mathcal{P}$

1 vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec u \wedge \vec v$

$$\vec u \wedge \vec v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 vecteur unitaire est $\dfrac{\vec u \wedge \vec v}{\|\vec u \wedge \vec v\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\vec u \wedge \vec v}{\sqrt 5}$

c $\vec I\ \frac{1}{3}(1, 2, 1)$, $\vec J\ \frac{1}{3}(2, 1, -2)$

vérifier que $\vec I$ et $\vec J$ sont normés et orthogonaux

construire $\vec K$ / $(\vec I, \vec J, \vec K)$ soit 1 base orthonormale directe

$\|\vec I\| = \|\vec J\| = 1$ et $\vec I \cdot \vec J = 0$

$$\vec K = I \wedge J = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d $A(1, 1, 0)$ $\quad$ $B(-1, 4, -2)$ $\quad$ $C(2, -3, 7)$

calculer l'aire de ABC

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$ $\qquad$ or, $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{169 + 144 + 25} = \frac{13\sqrt 2}{2}$

e déterminer tous les vecteurs $\vec x$ / $\vec u \wedge \vec x = \vec u \wedge \vec v$ (1)

(1) $\iff \vec u \wedge \vec x - \vec u \wedge \vec v = \vec 0 \iff \vec u \wedge (\vec x - \vec v) = \vec 0$

$\iff \vec x - \vec v$ colinéaire à $\vec u$ $\iff \exists k \in \mathbb{R}$ / $\vec x - \vec v = k\vec u$

Les vecteurs vérifiant (1) sont : $\vec x = \vec v + k\vec u$

f simplifier $\vec S = \vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} + \vec{MC} \wedge \vec{MA}$

déterminer tous les points M / $\vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} = \vec{MC} \wedge \vec{MA}$ (1)

$\vec{S} = \vec{MA}\wedge(\vec{MA}+\vec{AB}) + (\vec{MA}+\vec{AB})\wedge(\vec{MA}+\vec{AC}) + (\vec{MA}+\vec{AC})\wedge\vec{MA}$

$= \vec{MA}\wedge\vec{AB} + \vec{MA}\wedge\vec{AC} + \vec{AB}\wedge\vec{MA} + \vec{AB}\wedge\vec{AC} + \vec{AC}\wedge\vec{MA} = \underline{\vec{AB}\wedge\vec{AC}}$

(1) $\Leftrightarrow \vec{S} - \vec{MC}\wedge\vec{MA} = \vec{MC}\wedge\vec{MA}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}\wedge\vec{AC} - 2\,\vec{MC}\wedge\vec{MA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}\wedge\vec{AC} - 2(\vec{MA}+\vec{AC})\wedge\vec{MA} = \vec{0}$

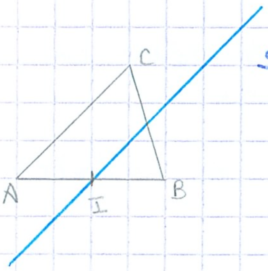
$\Leftrightarrow \vec{AB}\wedge\vec{AC} - 2\,\vec{AC}\wedge\vec{MA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}\wedge\vec{AC} + 2\,\vec{MA}\wedge\vec{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\vec{AB}+2\vec{MA})\wedge\vec{AC} = \vec{0}$ donc $\vec{AB}+2\vec{MA}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \,/\, \vec{AB}+2\vec{MA} = \alpha\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{MA} = \frac{\alpha}{2}\vec{AC} - \frac{\vec{AB}}{2}$

$\Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{\vec{AB}}{2} - \frac{\alpha}{2}\vec{AC}$



soit I le milieu de [AB] : $\vec{AM} = \vec{AI} + \beta\vec{AC}$ $(\beta \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \underline{\vec{IM} = \beta\vec{AC}}$

1er cas : $A \neq C$:

l'ensemble des points est la droite $(I, \vec{AC})$

2ème cas : $A = C$

(1) $\Leftrightarrow (\vec{AB} + 2\vec{MA})\wedge\vec{0} = \vec{0}$ ce qui est toujours vrai

donc tous les points de $\mathcal{E}$ conviennent.

IV Déterminant de 3 vecteurs de l'espace

1) Définition

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ le réel, noté $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, défini par : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est appelé produit mixte de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.

2) Condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ soient confondus

1er cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

$\vec{u}\wedge\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ coplanaires ssi $\vec{w} \perp \vec{u}\wedge\vec{v}$

$\Leftrightarrow (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = 0$

$\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$

2ème cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont coplanaires

$\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$

Th $\boxed{\vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ coplanaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0}$

3) Interprétation géométrique

$\det(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}) = (\vec{OA}\wedge\vec{OB})\cdot\vec{OC} = \vec{OD}\cdot\vec{OC}$

$|\det(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC})| = \underbrace{\|\vec{OD}\|}_{\text{aire du parallélogramme construit sur } \vec{OA},\vec{OB}} \underbrace{\|\vec{OC}\|\;|\cos(\vec{OC},\vec{OD})|}_{\|\vec{CH}\|}$

Th $|\det(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC})|$ représente le volume du parallépipède construit sur $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$

ex : $A(1,2,1)$ $B(3,4,5)$ $C(7,11,-2)$

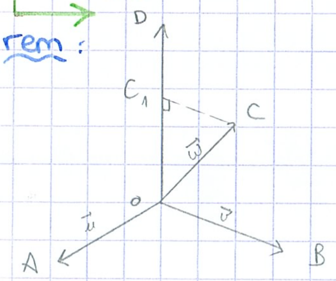
Calculer V le volume de la pyramide OABC.

$V = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{1}{6}\left|\det(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC})\right| = \frac{1}{6}\left|(\vec{OA}\wedge\vec{OB})\cdot\vec{OC}\right|$

$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} = 42 - 22 + 4$

$V = \frac{1}{6}(42 - 22 + 4) = 4$

rem :



supposons $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ non coplanaires. $\det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) \neq 0$
donc $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ est 1 base

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{OD} \cdot \vec{OC} = \vec{OD} \cdot \vec{OC_1}$

si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$ alors $\vec{OD} \cdot \vec{OC_1} > 0$
$\vec{OD}$ et $\vec{OC_1}$ sont de même sens
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe

si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) < 0$ alors $\vec{OD} \cdot \vec{OC_1} < 0$
$\vec{OD}$ et $\vec{OC_1}$ sont de sens contraire

Th $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est 1 base ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$
↳ directe ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$

ex. 1. $\vec{u}(1, -1, 2)$, $\vec{v}(2, 3, 1)$, $\vec{w}(4, 1, 5)$
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle 1 base ?

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -28 + 3 + 25 = 0$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas 1 base
$\vec{w}$ s'exprime en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$: $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$

2. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle 1 base ? $\vec{u}(1, -1, 2)$, $\vec{v}(2, 3, 1)$ $\vec{w}(4, 1, 7)$

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = -28 + 3 + 35 = 10 > 0$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est 1 base directe

4) Antisymétrie

Pb : Que devient $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ si on échange 2 vecteurs ?

1er cas : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires
ils le restent

2ème cas : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non coplanaires
$|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ reste inchangé
le signe de $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ change

Echanger 2 vecteurs transforme $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en son opposé.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$
$$= -\det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$$
$$= -\det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$$

Pb : Comparer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ avec $(\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{w}$, $(\vec{w} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}$ et $(u \wedge w) \cdot \vec{v}$

$(\vec{w} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = \det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -\det(u, \vec{v}, w) = -(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$
$(\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{w} = \det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$
$(\vec{u} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Pb : Que devient $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ si on effectue 1 permutation circulaire de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$?

$\det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
$\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Une permutation circulaire laisse $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ inchangé !

5) Trilinéarité

$\det(\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\alpha\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w} = [\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})].\vec{w} = \alpha[(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}] = \alpha\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

$\det(\vec{u}+\vec{u}',\vec{v},\vec{w}) = [(\vec{u}+\vec{u}')\wedge\vec{v}].\vec{w} = [\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}'\wedge\vec{v}].\vec{w} = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}+(\vec{u}'\wedge\vec{v}).\vec{w}$

$= \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + \det(\vec{u}',\vec{v},\vec{w})$

donc $\det(\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}',\vec{v},\vec{w}) = \alpha\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + \beta\det(\vec{u}',\vec{v},\vec{w})$

de même, $\det(\vec{u},\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}',\vec{w}) = -[\alpha\det(\vec{v},\vec{u},\vec{w})+\beta\det(\vec{v}',\vec{u},\vec{w})]$

$= \alpha\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + \beta\det(\vec{u},\vec{v}',\vec{w})$

$\det(\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}+\beta\vec{w}') = \alpha\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + \beta\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}')$

Le déterminant (de 3 vecteurs de l'espace) est trilinéaire.
C'est 1 forme (associe 1 réel au déterminant).

ex : 1. Simplifier

- $\det(\vec{u},2\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = 2\det(\vec{u},\vec{u},\vec{w}) + \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$
- $\det(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v},\vec{w}) = \det(\vec{u},\vec{u},\vec{w}) - \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + \det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) - \det(\vec{v},\vec{v},\vec{w})$
  $= -2\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

6) Calcul du déterminant dans une base orthonormale directe

$\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est 1 base orthonormale directe.
$\vec{u}(x,y,z)$ $\quad \vec{v}(x',y',z')$ $\quad \vec{w}(x'',y'',z'')$

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w} = \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}yz'-zy'\\-(xz'-zx')\\xy'-yx'\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix} = x''\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix} - y''\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix} + z''\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}$$

(développement du déterminant selon la $3^{\text{ème}}$ colonne)

ex :

$A = \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 4 & 7 & 11\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix} = 0$ car $\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}$ donc $A = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{u}+\vec{v})$ $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

$B = \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 4 & 7 & 6\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}4 & 7\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 7\end{vmatrix} = 4\times(-10) - 6(-5) + (-5) = -15 < 0$

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est 1 base indirecte

$C = \begin{vmatrix}1 & 4 & 5\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 9\end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 2\end{vmatrix} = 5(-4) + 2(-13) + 9(10) = 44 > 0$

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ base directe

$D = \begin{vmatrix}3 & 0 & 7\\ -1 & 4 & -1\\ -2 & 2 & 4\end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -2 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix} = 7(6) + 6 + 4(12) = 96 > 0$

V Droites et plans de l'espace

1) Représentation paramétrique d'une droite

Pb : La droite (D) est définie par la donnée de $A(x_0,y_0,z_0)$ et du vecteur directeur $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma) \neq \vec{0}$. Caractériser (D).

$M(x,y,z) \in (D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \,/\, \vec{AM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x = x_0 + k\alpha\\ y = y_0 + k\beta\\ z = z_0 + k\gamma\end{cases}}$ (1)

(1) est 1 représentation paramétrique de (D).

ex : 1. $D = (AB)$ avec $A(4,1,2)$ et $B(1,4,1)$

$M(x,y,z) \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \vec{AM} = t\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$

2. Que représente $(I) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 4 - t \\ z = 7 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$?

(I) représente la droite / passant par $A(0,4,7)$ / de vecteur directeur $u(2,-1,0)$

$(D) \parallel xOy$

2) Équation cartésienne d'un plan

Pb : le plan (P) est défini par $A(x_0, y_0, z_0)$ et 2 vecteurs non colinéaires $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Ecrire 1 équation paramétrique de P.

$M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AM}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & x - x_0 \\ \beta & \beta' & y - y_0 \\ \gamma & \gamma' & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (\beta\gamma' - \beta'\gamma)(x - x_0) - (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)(y - y_0) + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(z - z_0) = 0$

on obtient 1 équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$

$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

$\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta\gamma' - \beta'\gamma \\ -(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1 équation cartésienne de P est de la forme :
$ax + by + cz + d = 0 \qquad (a, b, c) \neq (0,0,0)$

ex : Ecrire 1 équation du plan ABC avec $A(1,2,1)$ $B(-1,-2,-5)$ $C(-2,3,7)$.

$M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AM}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & -3 & x-1 \\ -4 & 1 & y-2 \\ -6 & 6 & z-1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(-18) - (y-2)(-30) + (z-1)(-14) = 0$

$\Leftrightarrow -9x + 15y - 7z + 9 - 30 + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9x - 15y + 7z + 14 = 0$

rem : Dans l'espace, 2 plans non parallèles se coupent selon 1 droite.
1 droite peut être définie comme intersection de 2 plans non parallèles.

ex : Que représente $(I) : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$?

Les plans $(P_1) : x - y + z - 1 = 0$ et $(P_2) : 3x - y + 2z - 3 = 0$ ne sont pas parallèles, ils se coupent donc selon 1 droite (D).

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + 2 \\ x - y - 2x + 2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

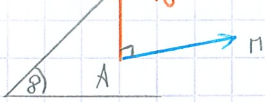
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ (I) représente la droite $(A, \vec{u})$ avec $A(0,1,2)$ et $\vec{u}(1,-1,-2)$

mieux : $A(1,0,0)$, $\vec{u}(-1,1,2)$

3) Vecteur normal à un plan

$\vec{n}$ est normal au plan P ssi : $\begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \text{ orthogonal à tous les vecteurs de } P \end{cases}$

rem : P peut être défini par la donnée : – d'un point $A(x_0, y_0, z_0)$
– d'un vecteur normal $\vec{n}(a,b,c) \neq \vec{0}$



$M \in \mathcal{P} \iff \vec{AM} \perp \vec{n} \iff \vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$

$\iff (x-x_0)a + (y-y_0)b + (z-z_0)c = 0$

On obtient 1 équation de la forme :

(1) : $ax + by + cz + d = 0$ $\quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$

Pb : Que représente cette équation ?

$\exists A(x_0, y_0, z_0)$ vérifiant (1) : $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$

(1) $\iff a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

(1) $\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \iff \vec{n}\cdot\vec{AM} = 0 \iff \vec{n} \perp \vec{AM}$

(1) est l'équation du plan | passant par $A(x_0, y_0, z_0)$
| de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$

Th
- $(\mathcal{P})$: $ax + by + cz + d = 0$ $\quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$
- $(\mathcal{P})$ est 1 plan dont 1 vecteur normal est $\vec{n}(a,b,c)$
- $\vec{u}(X,Y,Z) \in \mathcal{P}$ ssi $aX + bY + cZ = 0$ $\quad (\vec{u} \perp \vec{n} \iff \vec{u}\cdot\vec{n} = 0)$

ex : $\mathcal{P}$: $2x + y + 3z - 5 = 0$
Détermine 2 vecteurs de $\mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ est 1 plan | passant par $A(0,5,0)$
| dont 1 vecteur normal est $\vec{n}(2,1,3)$

2 vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ sont /

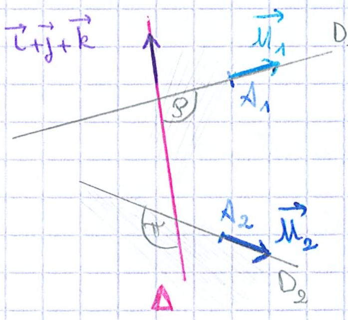
$2X + Y + 3Z = 0$ et $2X' + Y' + 3Z' = 0$

$\vec{u}(1,1,0)$ $\qquad \vec{v}'(1,-2,0)$

4) Exemples usuels

a) déterminer la droite Δ | de vecteur directeur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$
| s'appuyant sur D_1 et D_2

$D_1 : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 & (1) \\ 2x + y + z + 3 = 0 & (2) \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 & (3) \\ 3x + y + 2z - 5 = 0 & (4) \end{cases}$



D_1 et Δ appartiennent à 1 même plan $\mathcal{P}$

$\mathcal{P} = (A_1, \vec{u}_1, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

D_2 et Δ .... Π

$\Pi = (A_2, \vec{u}_2, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

* détermination de A_1 et $\vec{u}_1$:

$D_1 : \begin{cases} 3x + 2z + 2 = 0 & (1)+(2) \\ x + 2y + 4 = 0 & (2)-(1) \end{cases} \qquad D_1 : \begin{cases} x = -2y - 4 \\ z = -1 - \frac{3}{2}(-2y-4) \end{cases}$

$D_1 : \begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = t \\ z = 5 + 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ $\quad$ donc $A_1(-4, 0, 5)$, $\vec{u}_1(-2, 1, 3)$

* équation de $(\mathcal{P})$:

$M \in (\mathcal{P}) \iff \det(\vec{u}_1, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{A_1M}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} -2 & 1 & x+4 \\ 1 & 1 & y \\ 3 & 1 & z-5 \end{vmatrix} = (x+4)(1-3) - y(-2-3) + (z-5)(-2-1) = -2(x+4) + 5y - 3(z-5)$

$\iff 2x - 5y + 3z - 7 = 0$

* détermination de A_2 et $\vec{u}_2$:

$D_2 : \begin{cases} x + 3z - 4 = 0 & (4)-(3) \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x = 4 - 3z \\ y = 1 - z - 2(4 - 3z) \end{cases}$

$D_2 : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -7 + 7t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ $\quad$ donc $A_2(4, -7, 0)$, $\vec{u}_2(-3, 7, 1)$

* équation de (Π) :

$M \in (\Pi) \iff \det(\vec{u}_2, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{A_2M}) = 0$

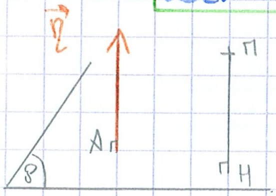
$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 7 & 1 & y+7 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (x-4)(7-1) - (y+7)(-3-1) + 3(-3-7) = 6(x-4) + 4(y+7) - 10z$

$\Leftrightarrow \underline{3x + 2y - 5z + 2 = 0}$

Conclusion : $\Delta = (\mathcal{P}) \cap (\pi)$ donc $\Delta : \begin{cases} 2x - 5y + 3z - 7 = 0 \\ 3x + 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$

b projection orthogonale d'un point sur un plan

Pb : $\mathcal{P}$ est défini par 1 point A et 1 vecteur normal $\vec{n}$.
Déterminer H, projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.



H est défini par $\begin{cases} \overrightarrow{HM} \text{ colinéaire à } \vec{n} \\ \overrightarrow{AH} \perp \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{HM} = \lambda \vec{n} \\ \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{HM} = \lambda \vec{n} \\ (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH}) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} - \lambda \vec{n}^2 = 0$

$\rightarrow \lambda = \dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{HM} = \dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2} \cdot \vec{n}}$

ex : $\mathcal{P} : 2x - y + 4z - 7 = 0$ $\quad M(1, 2, 1)$

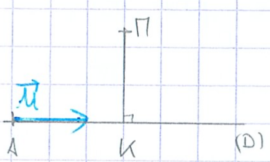
$\vec{n}(2, -1, 4)$ $\quad A(0, -7, 0)$

$\overrightarrow{HM} = \dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2} \vec{n} = \dfrac{2 - (2+7) + 4}{2^2 + 1^2 + 4^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{-3}{21} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \\ 1-z \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ d'où $H \begin{pmatrix} 9/7 \\ 13/7 \\ 11/7 \end{pmatrix}$

c projection orthogonale d'un point sur une droite

Pb : $D(A, \vec{u})$ $\vec{u} \neq 0$. Déterminer K, projeté orthogonal de M sur D.



$K : \begin{cases} K \in D \\ \overrightarrow{KM} \perp \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{AK} = \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{KM} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$

$\rightarrow (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -\lambda \vec{u}^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}$

$\boxed{\overrightarrow{AK} = \dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2} \cdot \vec{u}}$

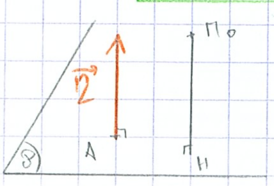
ex : $D : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad M(1, 1, 1)$

$D : \begin{cases} y = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t + 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ $\quad D(A, \vec{u})$ avec $\begin{cases} A(0, 0, 1) \\ \vec{u}(1, 0, 1) \end{cases}$

$\overrightarrow{AK} = \dfrac{1+1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

d distance d'un point à un plan

Pb : $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ $\quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ $\quad M_0(x_0, y_0, z_0)$
Calculer $d(M_0, \mathcal{P})$



$H : \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{HM_0} = \lambda \vec{n} \\ H \in \mathcal{P} \end{cases}$ $\quad H : \begin{cases} x = x_0 - \lambda a \\ y = y_0 - \lambda b \\ z = z_0 - \lambda c \end{cases}$

$H \in \mathcal{P}$: $a(x_0-\lambda a)+b(y_0-\lambda b)+c(z_0-\lambda c)+d=0$ H

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$

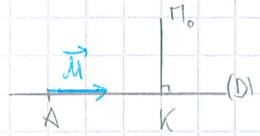
d'où $\|\overrightarrow{HM_0}\| = \boxed{d(M_0,\mathcal{P}) = |\lambda|\,\|\vec{n}\|} = \boxed{\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$= \boxed{\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

ex : $\mathcal{P}$: $x+2y-2z+5=0$ $\quad M_0(2,1,3)$

$d(M_0,\mathcal{P}) = \dfrac{|1\times 2+2\times 1-2\times 3+5|}{1^2+2^2+(-2)^2}\sqrt{1+4+4} = \dfrac{3}{9}\sqrt{9} = 1$

e distance d'un point à une droite



→ on n'a pas besoin des coordonnées de K

Pb : $D(A,\vec{u})$ $(\vec{u}\neq\vec{0})$. On donne M_0, calculer $d(M_0,D)$

$\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM_0}$

$\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM_0} = \vec{u}\wedge\overrightarrow{KM_0}$

$\Rightarrow \|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM_0}\| = \|\vec{u}\wedge\overrightarrow{KM_0}\| = \|\vec{u}\|\,\|\overrightarrow{KM_0}\|$ (car $\vec{u}\perp\overrightarrow{KM_0}$)

d'où $\boxed{d(M_0,D) = \dfrac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM_0}\|}{\|\vec{u}\|}}$

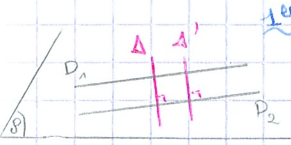
ex : $D(A,\vec{u})$ avec $A(1,1,0)$ $\vec{u}(1,1,1)$ Calculer $d(O,D)$

$d(O,D) = \dfrac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AO}\|}{\|\vec{u}\|}$ $\qquad \vec{u}\wedge\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$d(O,D) = \dfrac{\sqrt{1^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

f perpendiculaire commune à 2 droites

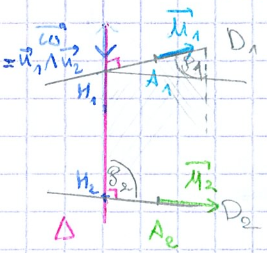
Pb : $D_1(A_1,\vec{u_1})$ $D_2(A_2,\vec{u_2})$. On recherche Δ / $\begin{cases}\Delta\perp D_1,\ \Delta\perp D_2\\ \Delta \text{ rencontre } D_1 \text{ et } D_2\end{cases}$



1er cas : $D_1 \parallel D_2$

il existe 1 infinité de droites Δ.

2ème cas : D_1 non parallèle à D_2



Si Δ existe, 1 vecteur directeur est $\vec{\omega} = \vec{u_1}\wedge\vec{u_2}$

$\Delta = \mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$ $\qquad \mathcal{P}_1(A_1,\vec{u_1},\vec{\omega})$

$\qquad\qquad\qquad \mathcal{P}_2(A_2,\vec{u_2},\vec{\omega})$

calcul de la distance entre D_1 et D_2 : $d(D_1,D_2) = H_1H_2$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2A_2}$

$\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{\omega}\cdot\overrightarrow{H_1H_2}$

$\Rightarrow |\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}| = |\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{H_1H_2}| = \|\vec{\omega}\|\,\|\overrightarrow{H_1H_2}\|$

$\Leftrightarrow \boxed{d(D_1,D_2) = \dfrac{|\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}|}{\|\vec{\omega}\|}} = \dfrac{|(\vec{u_1}\wedge\vec{u_2})\cdot\overrightarrow{A_1A_2}|}{\|\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}\|} = \boxed{\dfrac{|\det(\vec{u_1},\vec{u_2},\overrightarrow{A_1A_2})|}{\|\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}\|}}$

ex 1 : $D_1 : \begin{cases}3x-2y-z-5=0\\ x+y-z+4=0\end{cases}$ $\qquad D_2 : x=y=2z$

Déterminer la perpendiculaire commune, calculer $d(D_1,D_2)$

$D_1 : \begin{cases}2x-3y-9=0\\ z=x+y+4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=t\\ y=\frac{2}{3}t-3\\ z=\frac{2}{3}t-3+t+4=\frac{5}{3}t+1\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ $\qquad A_1(0,-3,1)$

$\vec{u_1}\left(1,\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$

$\vec{u_1}(3,2,5)$

$D_2 : \begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=\frac{t}{2}\end{cases}$ $\qquad A_2 = O$

$\vec{u_2}(2,2,1)$

1 vecteur directeur de Δ est $\omega = u_1 \wedge u_2$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\7\\2\end{pmatrix}$$

$\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = (A_1, \vec{u_1}, \vec{\omega})$ et $\mathcal{P}_2 = (O, \vec{u_2}, \vec{\omega})$

* équation de $\mathcal{P}_1$:

$M(x,y,z) \in \mathcal{P}_1 \iff \det(\vec{u_1}, \vec{\omega}, \vec{A_1M}) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} 3 & -8 & x \\ 2 & 7 & y+3 \\ 5 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = x(4-35) - (y+3)(6+40) + (z-1)(21+16) = -31x - 46y + 37z - 175 = 0$$

$$\mathcal{P}_1 : \underline{\underline{31x + 46y - 37z + 175 = 0}}$$

équation de $\mathcal{P}_2$:

$M(x,y,z) \in \mathcal{P}_2 \iff \det(\vec{u_2}, \vec{\omega}, \vec{OM}) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} 2 & -8 & x \\ 2 & 7 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = -3x - y(4+8) + z(14+16) = 0 \qquad \mathcal{P}_2 : 3x + 12y - 30z = 0$$

$$\underline{\underline{x + 4y - 10z = 0}}$$

$$\Delta : \begin{cases} 31x + 46y - 37z + 175 = 0 \\ x + 4y - 10z = 0 \end{cases}$$

* $\underline{\underline{d(D_1, D_2)}} = \dfrac{|\vec{\omega} \cdot \vec{OA_1}|}{\|\vec{\omega}\|} = \dfrac{|-3\times 7 + 2|}{\sqrt{8^2+7^2+2^2}} = \dfrac{19}{\sqrt{117}} = \underline{\underline{\dfrac{19}{3\sqrt{13}}}}$

2. $D_1 : \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y + 6z - 3 = 0 \end{cases}$ $D_2 = (AB)$ avec $A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-4\\4\\1\end{pmatrix}$

$D_1 : \begin{cases} 3x + 3z - 2 = 0 \\ x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - \frac{2}{3} \\ y = 3z - 1 - z - \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t + \frac{2}{3} \\ y = 4t - \frac{5}{3} \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ $A_1(0, 1, \frac{2}{3})$ $\vec{u_1}(-1, 4, 1)$

Δ a pour vecteur directeur $\vec{\omega} = \vec{u_1} \wedge \vec{AB}$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-6\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-6\\19\end{pmatrix}$$

$\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = (A_1, \vec{u_1}, \vec{\omega})$ $\mathcal{P}_2 = (A, \vec{AB}, \vec{\omega})$

équation de $\mathcal{P}_1$:

$M \in \mathcal{P}_1 \iff \det(\vec{u_1}, \vec{\omega}, \vec{A_1M}) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} -1 & -5 & x \\ 4 & -6 & y-1 \\ 1 & 19 & z-\frac{2}{3} \end{vmatrix} = x(76+6) - (y-1)(-19+5) + (z-\tfrac{2}{3})(6+20) = 0$$

$\iff 82x + 14y + 26z - \frac{94}{3} = 0 \iff \underline{\underline{41x + 7y + 13z - \frac{47}{3} = 0}}$

équation de $\mathcal{P}_2$:

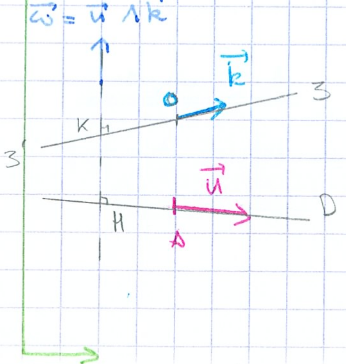
$M \in \mathcal{P}_2 \iff \det(\vec{AB}, \vec{\omega}, \vec{AM}) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} -6 & -5 & x-2 \\ 5 & -6 & y+1 \\ 0 & 19 & z-1 \end{vmatrix} = (x-2)(95) - (y+1)(-114) + (z-1)(36+25) = 0$$

$\iff \underline{\underline{95x + 114y + 61z - 137 = 0}}$

3. Calculer la distance de $z'Oz$ à $D = (A, \vec{u})$ avec $A(1,1,1)$ $\vec{u}(1,2,3)$

$\vec{\omega} = \vec{u} \wedge \vec{k}$



$\vec{OA} = \vec{OK} + \vec{KH} + \vec{HA}$

$\vec{\omega} \cdot \vec{OA} = \vec{\omega} \cdot \vec{KH}$

$|\vec{\omega} \cdot \vec{OA}| = \|\vec{\omega}\| \, \|\vec{KH}\|$ $\qquad \|\vec{KH}\| = \dfrac{|\vec{\omega} \cdot \vec{OA}|}{\|\vec{\omega}\|}$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\|\vec{KH}\| = \frac{|2-1|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

VI Sphères

1) équation cartésienne

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(x_0, y_0, z_0)$, de rayon R.

$M(x,y,z) \in \mathcal{S} \iff \Omega M^2 = R^2 \iff (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

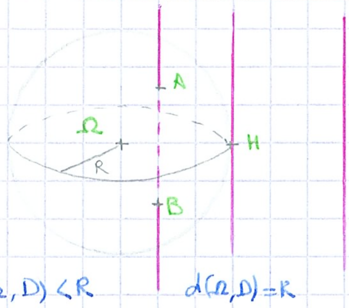
ex: Que représente $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-10=0$?

$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 - 10 = 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 24$

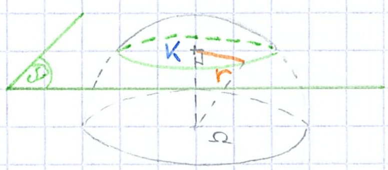
→ sphère de centre $\Omega(1,2,3)$, rayon $R = 2\sqrt{6}$

2) intersection d'une sphère et d'une droite

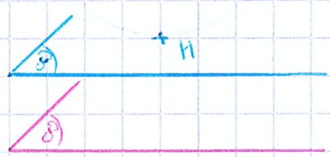


$d(\Omega, D) < R$ $\qquad$ $d(\Omega, D) = R$, $H = P_\Omega(D)$ $\qquad$ $d(\Omega, D) > R$

3) intersection d'une sphère et d'un plan



$d(\Omega, \mathcal{P}) < R$, l'intersection est 1 cercle de centre $K = P_\Omega(\mathcal{P})$, rayon $r = \sqrt{R^2 - \Omega K^2}$



$d(\Omega, \mathcal{P}) = R$ $\qquad$ $H = P_\Omega(\mathcal{P})$

$d(\Omega, \mathcal{P}) > R$

ex: Reconnaître $\mathcal{S}$: $x^2+y^2+z^2-4y-8z-5=0$

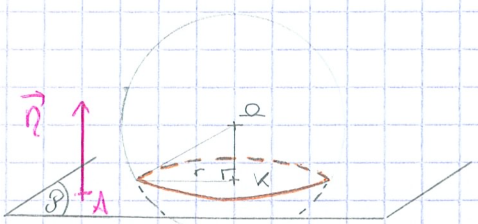
Etudier l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$: $x+2y+2z-3=0$

- $\mathcal{S}$: $x^2 + (y-2)^2 - 4 + (z-4)^2 - 16 - 5 = 0 \iff x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 25$

  Sphère de centre $\Omega(0,2,4)$, rayon 5

- $d(\Omega, \mathcal{P}) = \dfrac{|2\times 2 + 2\times 4 - 3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = 3 < 5$ $\qquad$ $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{S}$ selon 1 cercle.

$K = P_\Omega(\mathcal{P})$ $\qquad$ $A\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ $\qquad$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$



$K : \begin{cases} \vec{\Omega K} = \lambda \vec{n} \\ \vec{AK} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow (\vec{A\Omega} + \vec{\Omega K}) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (\vec{A\Omega} + \lambda \vec{n}) \cdot \vec{n} = 0$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{-\vec{A\Omega} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2}$ $\qquad$ $\vec{\Omega K} = \dfrac{\vec{\Omega A} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2} \cdot \vec{n}$

$\vec{\Omega K} = \dfrac{3\times 1 - 2\times 2 - 4\times 2}{1+2^2+2^2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y-2\\z-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ donc $K\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

$r = \sqrt{25 - [1+2^2+2^2]} = 4$

$\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \mathcal{C}$ $\qquad$ $\mathcal{C}$ cercle de $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{centre } K(-1, 0, 2)} \\ \underline{\text{rayon } r = 4} \end{array} \right.$