Séries entières

I Convergence

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $u_n : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto a_n z^n \end{array}$ $\quad \sum u_n$: série entière $\sum a_n z^n$

rem : * pour $z=0$, la série entière $\sum a_n z^n$ CV
* série complexe / réelle d'une variable réelle : $x\in\mathbb{R}$, $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\sum a_n x^n$; $x\in\mathbb{R}$, $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
série définie à partir d'un certain rang : $\sum_{n\geq n_0} a_n z^n$

1 - rayon de convergence

a - lemme d'Abel

soit $\sum a_n z^n$ une série entière,
si $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ / $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $\forall z\in\mathbb{C}$,
$|z| < |z_0| \to \sum a_n z^n$ CV absolum^t

$(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\exists M\in\mathbb{R} / \forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n||z_0|^n \leq M$
soit $z\in\mathbb{C}$ / $|z|<|z_0|$, $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$

$|a_n z^n| = |a_n||z_0|^n \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ terme général d'une série géométrique CV

donc $\sum |a_n z^n|$ CV

corollaire : si $\exists z_0\in\mathbb{C} / \sum a_n z_0^n$ CV alors $\forall z\in\mathbb{C} / |z|<|z_0|$, $\sum a_n z^n$ CV absol^t

$(a_n z_0^n)$ CV vers 0 donc est bornée, lemme

rem : $I = \{r\in\mathbb{R}^+ / (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée$\}$

* $I\neq\emptyset$ car $0\in I$
* si $r\in I$, alors $[0,r]\subset I$ donc I intervalle

I non intervalle $\Rightarrow \exists r / [0,r]$

rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ = $\sup I = \rho$
$\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ (si I n'est pas majoré : $\rho = +\infty$)
la suite CV tjrs

Pp) $\sum a_n z^n$ de rayon de CV ρ, $z\in\mathbb{C}$
si $|z| < \rho$ alors $\sum a_n z^n$ CV absolum^t
$\quad |z| > \rho$ DV ($(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée)

si $|z|<\rho$: $\exists r\in\mathbb{R}^+ / |z|<r<\rho$
donc $r\in I$, donc $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
lemme : $\sum a_n z^n$ CV absolum^t
si $|z|>\rho$: $|z|\notin I$ donc $(a_n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée
donc $\sum a_n z^n$ DV

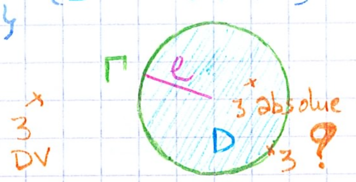
ex : $\sum z^n$ pour quelles valeurs de $r\in\mathbb{R}^+$ $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?
$(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée sur $[0,1]$ donc $\rho=1$

$\sum \frac{z^n}{n!}$ $\quad I=[0,+\infty[$ donc $\rho=+\infty$

$\sum n!\,z^n$ $\quad \lim_{n\to+\infty} n!\,r^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\left(\frac{1}{r}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n}{n!}} = +\infty$ $\quad I=[0,0]$ $\quad \rho=0$

$\sum n z^n$ $\quad$ si $r>1$, $nr^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
$r<1$, $\frac{1}{n} \in o(r^n)$ donc $nr^n \to 0$ $\quad I=[0,1[$ $\quad \rho=1$
n^{-1} $\quad e^{n\ln r}$

disque de convergence de la série $\sum a_n z^n$ = $D = \{z\in\mathbb{C} / |z|<\rho\}$ (ouvert)
cercle d'incertitude : $\Gamma = \{z\in\mathbb{C} / |z| = \rho\}$



somme de la série entière :
$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
développement de S en série entière en 0 : $\sum a_n z^n$

b - recherche du rayon de convergence

* comparaison : $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ séries entières de rayons de CV ρ_a, ρ_b

si $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $\forall r\in\mathbb{R}^+$, $(|b_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Rightarrow (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée

donc si $|a_n|<K$, alors $\rho\geqslant K$

$r<\rho_b \Rightarrow r\leqslant\rho_a$

$\rho_b\leqslant\rho_a$ car $[0,\rho_b[\ \subset [0,\rho_a]$

si $a_n\in O(b_n)$ alors $\rho_a\geqslant\rho_b$ (b_nr^n) bornée ρ_b

si $a_n\sim b_n$ alors $\rho_a=\rho_b$

a_nr^n bornée $\rho_a<\rho_b$ (a_nr^n) non bornée impossible

* critère de d'Alembert

$\sum a_nz^n$ série entière, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$, $r\in\mathbb{R}^{+*}$ $\left|\dfrac{a_{n+1}r^{n+1}}{a_nr^n}\right| = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| r$

si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|r = \ell r$ avec $\ell\in[0,+\infty]$

$r<\dfrac{1}{\ell}$ $\sum a_nr^n$ CV absolum^t

$r>\dfrac{1}{\ell}$ .... DV

donc $\rho=\dfrac{1}{\ell}$ avec $\begin{cases}\dfrac{1}{0^+}=+\infty\\ \dfrac{1}{+\infty}=0^+\end{cases}$

ex $\sum\sqrt{\dfrac{n+3}{n+1}}z^n$ $a_n=\sqrt{\dfrac{n+3}{n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq0$

$\forall r\in\mathbb{R}^{+*}$, $\left|\dfrac{a_{n+1}r^{n+1}}{a_nr^n}\right| = \left|\sqrt{\dfrac{n+4}{n+2}\,\dfrac{n+1}{n+3}}\right|r \longrightarrow r$ si $r<1$ alors $\sum a_nr^n$ CV abs ; $r>1$ DV

donc $\rho=1$

rem : $a_n\sim1 \Rightarrow \rho=1$

$\rightarrow$ condit° suffisante

$\rightarrow$ ~~adaptable~~ : $\sum n^2z^{2n}$ $\left|\dfrac{a_{2n+2}r^{2n+2}}{a_{2n}r^{2n}}\right| = \dfrac{(n+1)^2}{n^2}r^2 \to r^2$; a_n ; $\dfrac{2^2(n+1)^2}{2^2n^2}$

II Opérations

* $\lambda\in\mathbb{C}^*$, $\sum\lambda a_nz^n$ a pour rayon de CV ρ_a

$(a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow$ $(\lambda a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée

car $(\lambda a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée sinon DV

$\forall z\in\mathbb{C}\ /\ |z|<\rho_a$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda a_nz^n = \lambda\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$

* $\sum(a_n+b_n)z^n$ a pour rayon de CV ρ avec $\rho\geqslant\min\{\rho_a,\rho_b\}$

$\forall r\in\mathbb{R}^+$, $r<\min\{\rho_a,\rho_b\} \Rightarrow (a_nr^n)$ et (b_nr^n) bornées $\Rightarrow ((a_n+b_n)r^n)$ bornée $\Rightarrow r\leq\rho$

pour $\forall r\in\min\{\rho_a,\rho_b\}$, $r\leqslant\rho$ donc $[0,\min]\subset[0,\rho]$

et $\forall z\in\mathbb{C}\ /\ |z|<\min\{\rho_a,\rho_b\}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$

rem : si $\rho_a\neq\rho_b$ alors $\rho=\min\{\rho_a,\rho_b\}$

si $\rho_a=\rho_b$ $\rho=\min$ ou $+\infty$ par ex : $\sum a_nz^n=\sum z^n$ $\rho_a=1$; $\sum b_nz^n=\sum(-z^n)$ $\rho_b=1$; $\sum(a_n+b_n)z^n=0$ $\rho=+\infty$

* $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ $\sum c_nz^n$ a pour rayon de CV $\rho\geqslant\min\{\rho_a,\rho_b\}$

produit de Cauchy

et $\forall z\in\mathbb{C}\ /\ |z|<\min\{\rho_a,\rho_b\}$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$

$\forall r\in\mathbb{R}^+\ /\ r<\min\{\rho_a,\rho_b\}$ $\sum a_nr^n$, $\sum b_nr^n$ CV absolum^t

donc leur produit de Cauchy CV absol^t :

$\sum\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_kr^kb_{n-k}r^{n-k}\right)=\sum\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)r^n=\sum c_nr^n$

donc $r\leq\rho$

ex : $1-z$; $\sum z^n$ $a_0=1$, $a_1=-1$, $a_{n\geqslant2}=0$; $\rho_a=+\infty$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=1$; $\rho_b=1$; $c_1=a_0b_0+a_1b_1=1.1+(-1)1=0$

$c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$ $\begin{cases}c_0=1,\\ c_1=-1\end{cases}$ $c_{n\geqslant2}=0$ $\rho=+\infty$

$\forall z\in\mathbb{C}$, $|z|<1 \Rightarrow (1-z)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n\right)=1$

$\Rightarrow (1-z)\dfrac{1}{1-z}=1$

Ccl : L'ensemble des séries entières ayant un $\rho\neq0$ est une algèbre

* **dérivation formelle**

$\underbrace{\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}}_{}$ a même ρ que $\sum a_n z^n$

série entière dérivée formelle de $\sum a_n z^n$

$\rho_a > 0$, ρ rayon de CV de $\sum n a_n z^{n-1}$

$\forall r \in \,]0, \rho_a[$, soit $0 < r < r' < \rho_a$

$(|a_n| r'^n)$ est bornée

$|n a_n r^n| = n |a_n| r'^n \left(\frac{r}{r'}\right)^n = \underbrace{|a_n| r'^n}_{\text{bornée}} \; \underbrace{n\left(\frac{r}{r'}\right)^n}_{\to 0}$ bornée

$\sum b_n r^n$ CV $\Rightarrow r \leq \rho_b$

$\forall r < \rho_a,\ r \leq \rho$ — $0 \quad r \quad \rho_a \quad \rho$

donc $r \leq \rho$ *

donc $\rho_a \leq \rho$

or, $n \geq 1 \Rightarrow |n a_n| \geq |a_n|$ donc $\rho \leq \rho_a$ donc $\rho = \rho_a$

intégration formelle

$\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a même rayon de CV que $\sum a_n z^n$

$\sum a_n z^n$ est la dérivée formelle de $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$

conséquences

série	ρ	série	ρ
$\sum z^n$	1		
$\sum_{n\geq 1} n z^{n-1}$	1	$\sum \frac{1}{n+1} z^{n+1}$	1
$\sum n z^n$	1	$\sum \frac{1}{n} z^n$	1
$\sum_{n\geq 2} n(n-1) z^{n-2}$	1	$\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)} z^n$	1
$\sum n^2 z^{n-2}$	1	$\sum \frac{1}{n^2} z^n$	1
$\sum n^2 z^n$	1		
$k \in \mathbb{N}, \sum n^k z^n$	1	$\sum \frac{1}{n^k} z^n$	1

$P \in \mathbb{C}[X]$ normal : $\sum P(n) z^n$: $\rho = 1$

$(P(n) \sim a_k n^k$ avec $k = \deg P)$

$F \in \mathbb{C}(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} F \text{ non nulle} \\ n \text{ non pôle de } F \end{cases}$

$\sum F(n) z^n$; $\rho = 1$

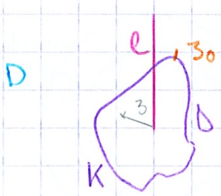
$\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$: $\rho = 1$

$E(\alpha) \leq \alpha < E(\alpha) + 1$

$\sum n^{E(\alpha)} z^n$ — $\rho = 1$; $\sum n^{E(\alpha)+1} z^n$ — $\rho = 1$.

III Somme d'une série entière

th Une série entière CV normalement (donc unif^t) sur tt compact inclus dans le disque de CV (ouvert)



D

K compact $K \subset D$, $d : \begin{array}{l} K \to \mathbb{R} \\ z \mapsto |z| \end{array}$ continue

d, continue sur un compact, est majorée et atteint ses bornes

$\exists z_0 \in K \,/\, \forall z \in K,\ d(z) \leq d(z_0) \Leftrightarrow |z| \leq |z_0| < \rho$

$|z_0| \neq \rho$ car $\begin{cases} K \text{ compact donc fermé} \\ D \text{ ouvert} \end{cases}$

$\forall z \in K,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n z^n| \leq |a_n| |z_0|^n$

or $|z_0| < \rho$ donc $\sum a_n z_0^n$ CV abso

donc $\sum |a_n| |z_0|^n$ CV

critère de CV normale p99 ... donc $\sum a_n z^n$ CV normal^t sur $\underbrace{B_f(0, |z_0|)}_{K}$

corollaire

① si $\rho > 0$ alors $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de CV

c2 p.98 : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ continue sur } D \\ \sum u_n \text{ CV unif}^t \text{ sur } D \end{cases}$

donc $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ continue sur D

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n : \begin{array}{l} D \to \mathbb{C} \\ z \mapsto a_n z^n \end{array}$ est continue

$\sum u_n$ CV normal^t sur tt compact de D (th) donc unif^t

donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est continue sur D

② .... possède 1 DL en 0 à tout ordre :

$\forall m \in \mathbb{N}$, $S(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n + o(z^m)$ (troncature de la série entière)

$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \rho$ $S(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n z^n$ $z^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+1+n} z^n$

or, $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \rho \Rightarrow (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée

$\Rightarrow (a_{m+n+1} z^{m+n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ bornée (suite extraite)

$\Rightarrow (a_{m+n+1} z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée (par dérivation)

comparaison : $\overset{\rho}{(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}}$ bornée $\Rightarrow \overset{\rho'}{(a_{m+n+1} z^n)_{n \in \mathbb{N}}}$ bornée

p.109 donc $\rho \leq \rho'$

donc la série $\sum a_{m+1+n} z^n$ a un rayon de CV $\geq \rho > 0$

donc $\varepsilon : \begin{array}{l} D \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n+1} z^n \end{array}$ est continue (c1)

$\forall z \in D,\ S(z) = \sum_{n=0}^{n} a_n z^n + z^{m+1} \varepsilon(z)$

th si $\sum a_n x^n$ est une série entière de la variable **réelle** x de rayon de CV $\rho > 0$

alors, $S :]-\rho,\rho[\to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

et $\forall x \in]-\rho,\rho[,\ \frac{d}{dx} S(x) = S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n : \begin{cases}]-\rho,\rho[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto a_n x^n \end{cases}$ de classe C^∞

$\sum u_n$ CV simplt vers S sur $]-\rho,\rho[$ compact inclus dans D

$\sum u_n'$ a pour rayon de C' ρ (dérivat° formelle)

donc $\sum u_n'$ CV normt donc unift sur tt segment de $]-\rho,\rho[$ Thp.

donc $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \in C^1(]-\rho,\rho[)$ et $S' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'$

$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) a_{p+1} x^p$

$p = n-1$
$n = p+1$

corollaire si $\begin{cases} \rho > 0 \\ S : \begin{cases}]-\rho,\rho[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{cases} \end{cases}$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

$p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-\rho,\rho[,\ S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}$

termes de la somme tjrs nuls sauf pr $n = p : x^{n-p} = x^0 = 1$

$S^{(p)}(0) = p!\, a_p + 0$

$S^{(p)}(0) = p(p-1)\dots(p-p+1) a_p x^0$

th hyp du th précédent
alors, $S :]-\rho,\rho[\to \mathbb{C}$ est **primitivable** sur $]-\rho,\rho[$

$\forall x \in]-\rho,\rho[,\ \int_0^x S(t)dt = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

$\sum u_n$ CV normt donc unift sur tt segmt de $]-\rho,\rho[$

$v_n : \begin{cases}]-\rho,\rho[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$ primitive de u_n qui s'annule en 0

$x \mapsto \int_0^x S(t)dt$ primitive de S qui s'annule en 0

donc $\sum v_n$ CV normt sur tt segmt de $]-\rho,\rho[$ vers $x \mapsto \int_0^x S(t)dt$

IV Fonctions développables en série entière

U voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

f développable en série entière en 0

$\iff \begin{cases} \exists \sum a_n x^n \text{ de rayon de CV} > 0 \\ \exists r \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases} \Big/ \begin{cases}]-r,r[\subset U \\ ]-r,r[\subset]-\rho,\rho[\\ \forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{cases}$

dans ce cas, $\sum a_n x^n$ est **le** dvp en série entière de f en 0.

rem : * f possède un dse en 0 $\Rightarrow$ f possède un $dl(0)$ à tt ordre :
$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n + o(x^m)$

* f paire $\Rightarrow$ son dse est pair : n impair $\Rightarrow a_n = 0$
impaire — impair : n pair $\Rightarrow a_n = 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$\Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0

⚠ pas de récip

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$

$\lim_0 e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$; f continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ $\quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$

$\lim_0 f'(x) = 0$ $\quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ f'(0) = 0$

récurrence : $\exists H_n$ fct° rationnelle, de pôle 0 / $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = H_n(x) f(x)$

alors $\lim_0 f^{(n)}(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n+1)}(x) = \underbrace{\left(H_n'(x) + \frac{2H_n(x)}{x^3}\right)}_{\text{fct° rat° de pôle } 0 \,:\, H_{n+1}(x)} f(x)$

alors $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0)=0$

Taylor-Young : f admet un dl à n^{ième} ordre : $f(x) = 0 + o(x^n)$

si f est dvpable en série entière :

$\exists r>0 / \forall x \in]-r,r[, \ f(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, $f(x) = 0$

f est nulle sur un voisinage de 0, ce qui n'est pas le cas

donc f n'est pas un dse.

Pp 1) l'ensemble des fct° dvpables en s.e. en 0 est une algèbre

2) l'applicat° qui à une fct° dse associe ~~en dse~~ est un morphisme d'algèbres

série de Taylor

Th si $\begin{cases} f :]-a,a[\to \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[) \\ \exists r \in]0,a], \exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in]-r,r[, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M n!}{r^n} \end{cases}$

alors f est dvpable en se en 0 et $\rho \geqslant r$

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \right| \leqslant \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n |f^{(n+1)}(t)|}{n!} dt \right|$$

← peut être <0

$$\leqslant \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{r^{n+1}} \frac{M(n+1)!}{n!} dt \right| \leqslant \frac{(n+1)M}{r^{n+1}} \left| \int_0^x |x-t|^n dt \right|$$

$$\leqslant \frac{(n+1)M}{r^{n+1}} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqslant M \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\frac{|x|}{r} < 1$

$$\left| \int_0^x |x-t|^n dt \right| = \left| \frac{|x-x|^{n+1}}{n+1} - \frac{|x-0|^{n+1}}{n+1} \right| = \left| \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

ccl : $\forall x \in]-r,r[$ $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ CV et $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

$X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $x_0 \in \mathring{X}$,

f dvpable en se en x_0

si $f_{x_0} : x \mapsto f(x-x_0)$ est dse en 0

alors $\exists r>0, \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) / $\forall x \in]x_0-r, x_0+r[$, $\sum a_n (x-x_0)^n$ CV

et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)$

V Développements en séries entières usuels en 0

1. Fractions rationnelles

* $\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n}$ $\quad \rho = 1$

$a \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{1-az} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$ $\quad \rho = \frac{1}{|a|}$

$b \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{b-z} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{b}z}\right) = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} z^n$ $\quad \rho = |b|$

* $(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $\quad \rho = 1$

$(1-z)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ $\quad \rho = 1$

$2(1-z)^{-3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$

$2.3 \ldots (k-1)(1-z)^{-k} = \sum_{n=k-1}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+2) z^{n-k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-1)\ldots(n+1) z^n$

soit $\boxed{\frac{1}{(1-z)^k}} = \sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} z^{n-k+1} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} z^n}$ $\quad \rho = 1$

$\frac{1}{(b-z)^k} = \frac{1}{b^k} \frac{1}{(1-\frac{1}{b}z)^k} = \frac{1}{b^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \frac{1}{b^n} z^n$ $\quad \rho = |b|$

applications :

① Fractions rationnelles sans pôle 0 :

→ décomposit° en él^{ts} simples

→ $\rho = \inf\{|b|, b \text{ pôle de } F\}$

② $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ $\quad \ln(1+x) = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\quad -\ln(1-x) = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

③ $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0} (-1)^n x^{2n}$ $\quad \arctan x = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

2 - puissances

$\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $f: \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1+x)^\alpha \end{cases}$ $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$

$\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$\alpha f(x) - (1+x) f'(x) = 0$

f est la solution sur $]-1,1[$ de l'equa diff linéaire homo à coeffs continus qui vaut 1 en 0 : $\alpha y - (1+x)y' = 0$

soit $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}_{a_n} x^n$

rayon de CV : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$

$r > 0$, $\frac{|a_{n+1}| r^{n+1}}{|a_n| r^n} = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)\, n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(n+1)!} \right| r = \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| r \longrightarrow r$

d'Alembert : si $r < \frac{1}{1}$, $\sum a_n r^n$ CV abs (et $\rho = \frac{1}{1}$)

Th p. 111 : $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

donc $g \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$ et $\forall x \in]-1,1[$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

$\forall x \in]-1,1[$, $\alpha g(x) - (1+x) g'(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n$

$= \alpha a_0 - a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n - (n+1) a_{n+1} - n a_n) x^n$

$a_0 = 1$ car $a_n = \frac{\text{produit de } (n-1)+1 = n \text{ facteurs}}{n \text{ facteurs}}$

donc $a_0 = \frac{\dots\ 0 \text{ facteurs}}{0!} = 1$

or, $\alpha a_0 - a_1 = \alpha \cdot 1 - \alpha = 0$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha - n) a_n - (n+1) a_{n+1} = (\alpha - n) \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} - (n+1) \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-}{(n+1)!}$

$= (\alpha - n) \left[\frac{\alpha \dots (\alpha-n+1)}{n!} - \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \right] = ($

donc g vérifie $\alpha y - (1+x)y' = 0$ sur $]-1,1[$ et $g(0) = 1$* donc $f = g$

* terme ts nuls sauf pr $n=0$

applications :

$\forall x \in]-1,1[$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}^{n \text{ facteurs}}}{n!} x^n$

$= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 1.1.3.5\dots(2n-3)}{2^n n!} x^n$

$= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} x^n$

$\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n$

$= 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1.1.3.5\dots(2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$

$\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$

$\arcsin x = 0 + x + \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\arccos = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

3 - exponentielle complexe

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ $\rho = +\infty$

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\mathrm{Re}(z)} = (e^{\mathrm{Re}(z)})^2$

applications.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iz)^n \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [1 + (-1)^n]\, i^n z^n$

soit $g : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}}_{a_n} x^n$ $\quad \alpha y - (1+x)y' = 0$

d'Alembert : si $r < \frac{1}{1}$, $\sum a_n r^n$ CV abs (et $\rho = \frac{1}{1}$)

Th p. 111 : $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

rayon de CV. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$

$r > 0$, $\frac{|a_{n+1}| r^{n+1}}{|a_n| r^n} = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)\, n!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(n+1)!} \right| r = \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| r \longrightarrow r$

donc $g \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$ et $\forall x \in]-1,1[$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

$\forall x \in]-1,1[$, $\alpha g(x) - (1+x)g'(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n$

$a_0 = 1$ car $a_n = \frac{\text{produit de } (n-1)+1 = n \text{ facteurs}}{n \text{ facteurs}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n$

donc $a_0 = \frac{\ldots\ldots 0 \text{ facteurs}}{0!} = 1$

$= \alpha a_0 - a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n - (n+1) a_{n+1} - n a_n) x^n$

or, $\alpha a_0 - a_1 = \alpha \cdot 1 - \alpha = 0$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha - n) a_n - (n+1) a_{n+1} = (\alpha - n) \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} - (n+1) \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}$

$= (\alpha - n) \left[\frac{\alpha\ldots(\alpha-n+1)}{n!} - \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \right] = 0$

donc g vérifie $\alpha y - (1+x)y' = 0$ sur $]-1,1[$ et $g(0) = 1$ * $\quad$ donc $f = g$

* terme ts nuls sauf pr $n=0$

applications :

$\forall x \in]-1,1[$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}^{n \text{ facteurs}}}{n!} x^n$

$= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n\, n!} x^n$

$= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} x^n$

$\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n$

$= 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1.1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\, n!} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$

$\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$

$\arcsin x = 0 + x + \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\arccos = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

3 . exponentielle complexe

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad \rho = +\infty$

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\mathrm{Re}(z)} = (e^{\mathrm{Re}(z)})^2$

applications.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iz)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iz)^n \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [1+(-1)^n] i^n z^n$

$\cos z = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} i^{2p} z^{2p} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} z^{2p}$ $\qquad$ 113

$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}((iz)^n - (-iz)^n) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(1-(-1)^n) i^n z^n$

$= \frac{1}{2i} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!} i^{2p+1} z^{2p+1} = \frac{1}{2i} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} z^{2p+1}$

$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} z^{2p}$ $\qquad$ partie paire du dse

$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!} z^{2p+1}$

$\begin{cases} \cos(iz) = \mathrm{ch}\, z \\ \mathrm{ch}(iz) = \cos z \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(iz) = i\, \mathrm{sh}\, z \\ \mathrm{sh}(iz) = i \sin z \end{cases}$