Fonctions d'une variable réelle

F ev normé de dim finie
I intervalle, $\mathring{I} \neq \emptyset$

I Dérivation

1. dérivation en a

f dérivable en a $\Leftrightarrow$ f possède un $dl_1(a)$

alors $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + o_a(1)$

$\Leftrightarrow$ $f(x) - f(a) = [f'(a) + o_a(1)](x-a)$

.... $\Leftrightarrow$ $\lim f'(a) = \lim f'_d(a) = \lim f'_g(a)$

$\rightarrow$ si $F = \mathbb{C}$,
f dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ dérivables en a
alors $f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i(\mathrm{Im}(f))'(a)$

$\rightarrow$ si $F = \mathbb{R}$ .... $\Leftrightarrow$ les composantes de f sont dérivables en a

2. dérivation sur I

f dérivable sur I $\Leftrightarrow$ f dérivable en chaque point de I

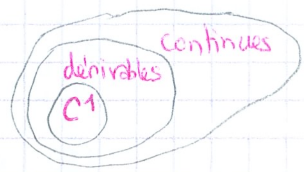
$f' : \begin{array}{l} I \longrightarrow F \\ a \longmapsto f'(a) \end{array}$ fct° dérivée de f

notations : f', Df, $\dfrac{d}{dx}f$
$f'(x)$, $Df(x)$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$

$D^1(I,F)$: ensemble des fct° dérivables sur I

Pp 1) $D^1(I,F) \subset C^0(I,F)$ (dérivable $\Rightarrow$ continue)
2) $D^1(I,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev (somme des dérivées = dérivée des sommes, idem avec . pas $\times$)
3) : $\begin{array}{l} D^1(I,F) \longrightarrow F^I \\ f \longmapsto f' \end{array}$ est linéaire (lim d'une Σ = Σ de la lim / combi lin. Σ = Σ de la combi lin)

II Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I



notation : $C^1(I,F)$ si $F = \mathbb{R}$: $C^1(I)$

$f \in \mathcal{C}^1(I)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ dérivable sur } I \\ f' \text{ continue sur } I \end{cases}$

Pp 1) $C^1(I,F) \subset D^1(I,F) \subset C^0(I,F)$ $\left(\begin{cases} f \text{ dérivable sur } I \\ f' \text{ continue sur } I \end{cases}\right.$ $\Rightarrow$ f dérivable sur I $\Rightarrow$ f continue sur I$)$
2) $C^1(I,F)$ est un $\mathbb{K}$ ev
3) : $\begin{array}{l} C^1(I,F) \longrightarrow C^0(I,F) \\ f \longmapsto f' \end{array}$ est linéaire

ex pour 1) : fct° dérivable, de dérivée non continue ($C^1(I,F) \subset D(I,F)$)

$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

* $f \in C^0(\mathbb{R})$ car $\lim\limits_0 f(x) = 0 = f(0)$
* si $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$
f' continue sur $\mathbb{R}^*$
si $x = 0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{borné}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$
f dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

f est dérivable en 0 : $f \in D^1(\mathbb{R})$
mais f' non continue en 0 : $f \notin C^1(\mathbb{R})$
donc $D^1(\mathbb{R}) \not\subset C^1(\mathbb{R})$

Pp 1) E ev normé de dim finie, $u \in \mathcal{L}(F,E)$ (u continue)
$f \in C^1(I,F)$
alors $u \circ f \in C^1(I,E)$ et $(u \circ f)' = u \circ (f')$
$\forall x \in I$, $(u \circ f)'(x) = u \circ f'(x)$

$a \in I$, f dérivable admet un $dl_1(a)$
$u \circ f(a+h) = u(f(a+h)) = u(f(a) + hf'(a) + o(h))$
$= u(f(a)) + u(hf'(a)) + u(o(h))$ linéarité de u
$= u \circ f(a) + h(u \circ f')(a) + o(h)$ u continue
$u \circ f$ dérivable en a* et $(u \circ f)' = u \circ f'$
$u \circ f'$ continue par composition
$\rightarrow u \circ f' \in C^1(I,E)$

* donc sur I

2) G, E ev normés de dim finie, B bilinéaire de $F \times E$ dans G (donc continue dim finie)
$(f,g) \in C^1(I,E) \times C^1(I,F)$, $B(f,g) : \begin{vmatrix} I \longrightarrow G \\ x \longmapsto B(f(x), g(x)) \end{vmatrix}$

alors $\begin{cases} B(f,g) \in C^1(I,G) \\ (B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g') \end{cases}$

$a \in I$, $h \in \mathbb{R}$, $a+h \in I$
$B(f,g)(a+h) = B(f(a+h), g(a+h))$
$= B(f(a) + hf'(a) + o(h), g(a) + hg'(a) + o(h))$
$= B(f(a),g(a)) + h B(f'(a),g(a)) + h B(f(a),g'(a)) + \underbrace{B(o(h), g(a)+hg'(a)+o(h)) + B(f(a)+hf'(a), o(h)) + B(hf'(a), hg'(a))}_{o(h)}$
$= B(f,g)(a) + h(B(f',g) + B(f,g'))(a) + o(h)$
et $\begin{vmatrix} I \longrightarrow G \\ a \longmapsto B((f',g) + B(f,g'))(a) \end{vmatrix}$ dérivable en a donc sur continue par composition

applications: 1 **produit**
$F = E = G = \mathbb{K}$ si $(f,g) \in (C^1(I,\mathbb{K}))^2$ alors $\begin{cases} fg \in C^1(I,\mathbb{K}) \\ (fg)' = f'g + fg' \end{cases}$

2 $E = F = G = \mathbb{R}^3$ euclidien, orienté
si $(f,g) \in C^1(I, \mathbb{R}^3)^2$ alors $\begin{cases} f \wedge g \in C^1(I, \mathbb{R}^3) \\ (f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g' \end{cases}$

3 $E = F$ euclidiens, $G = \mathbb{R}$
si $(f,g) \in C^1(I,E)^2$ alors $\begin{cases} f \mid g \in C^1(I,\mathbb{R}) \\ (f \mid g)' \ (f' \mid g) + (f \mid g') \end{cases}$

4 généralisat° : **application multilinéaire**
ex : $\dim F = n$, $\mathcal{B}$ base de F
si $(f_1, \dots, f_n) \in C^1(I,F)$ alors $\begin{cases} \det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n) \in C^1(I,\mathbb{K}) \\ (\det_{\mathcal{B}}(f_1,\dots,f_n))' = \det_{\mathcal{B}}(f_1', f_2, \dots, f_n) \\ \quad + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2', \dots, f_n) \\ \quad + \dots \end{cases}$

rem : $C_1, \dots, C_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1
$\det_{bc}(C_1(x), \dots, C_n(x))$ $C^1(I, \mathbb{R}^n)$
$\det_{bc}(C_1(x+h), \dots, C_n(x+h)) = \det_{bc}(C_1(x) + h C_1'(x) + o(h), \dots)$

5 **composition**
si $\begin{cases} f \in C^1(I,F) \\ g \in C^1(J,\mathbb{R}) \end{cases}$ avec $\begin{cases} J \text{ intervalle de } \mathbb{R} \\ \mathring{J} \neq \emptyset \\ g(J) \subset I \end{cases}$ alors $\begin{cases} f \circ g \in C^1(J,F) \\ (f \circ g)' = g' (f' \circ g) \end{cases}$

$a \in J$, $h \in \mathbb{R}$, $a+h \in J$
$\to dl_1(a)$ pour g
$\to dl_1(g(a))$ pour f
$f \circ g(a+h) = f(g(a+h)) = f(g(a) + \underbrace{hg'(a) + o(h)}_{o(h)})$ $\in I$
$= f(g(a)) + (hg'(a) + o(h)) f'(g(a)) + o(hg'(a) + o(h))$
$= f \circ g(a) + h \, g'(a) . f' \circ g(a) + o(h)$
et $g' . (f' \circ g)$ continue par composition et produit

ex : $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $\forall x \in J, g(x) > 0$
$f : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{vmatrix}$ de classe C^1 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

* $g(J) \subset \mathbb{R}^{+*}$
* $f \circ g \in C^1(J)$ et $(f \circ g)' = g'(f' \circ g) = -\frac{g'}{g^2}$

III Applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I

déf récursive : $k \in \mathbb{N}^*$ $f \in C^k(I,F) \iff \begin{cases} f \in C^1(I,F) \\ f' \in C^{k-1}(I,F) \end{cases}$

notation : si $f \in C^n(I,F)$, $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = D f(x)$
$f''(x) = (f')'(x) = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = D^2 f(x) = f^{(2)}(x)$

$f^{(k)}(x) = \dfrac{d^k}{dx^k} f(x) = D^k f(x)$

$f : I \to F$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I) \iff \forall k \in \mathbb{N},\ f \in \mathcal{C}^k(I,F)$

$\mathcal{C}^\infty(I,F) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I,F)$

Pp 1) $\mathcal{C}^\infty(I,F) \subset \dots \subset \mathcal{C}^{k+1}(I,F) \subset \mathcal{C}^k(I,F) \subset \mathcal{C}^{k-1}(I,F) \subset \dots \subset \mathcal{C}^0(I,F)$

2) $k \geq 1$, $\mathcal{C}^k(I,F)$ est un ss_ev de $\mathcal{C}^{k-1}(I,F)$

3) $D : \begin{vmatrix} \mathcal{C}^k(I,F) \longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(I,F) \\ f \longmapsto Df \end{vmatrix}$ est linéaire

$j \leq k$, $D^j : \begin{vmatrix} \mathcal{C}^k(I,F) \longrightarrow \mathcal{C}^{k-j}(I,F) \\ f \longmapsto D^j f \end{vmatrix}$ est linéaire

Pp 1) E, F de dim finies, $u \in \mathcal{L}(F,E)$
$f \in \mathcal{C}^k(I,F)$

alors $u \circ f \in \mathcal{C}^k(I,E)$ et $(u\circ f)^k = u \circ f^k$

2) si $\begin{cases} B : F \times E \longrightarrow G \text{ bilinéaire} \\ (f,g) \in \mathcal{C}^k(I,F) \times \mathcal{C}^k(I,E) \end{cases}$ alors $\begin{cases} B(f,g) \in \mathcal{C}^k(I,G) \\ B(f,g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)}) \end{cases}$

3) si $\begin{cases} f \in \mathcal{C}^k(I,F) \\ g \in \mathcal{C}^k(J,\mathbb{R}) \end{cases}$ avec $g(J) \subset I$ alors $f\circ g \in \mathcal{C}^k(J,F)$

- $k=0$, $k=1$, déjà fait
- hyp : $k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \forall \varphi \in \mathcal{C}^k(I,F) \\ \forall \psi \in \mathcal{C}^k(J,\mathbb{R}) \text{ avec } \psi(J) \subset I \end{cases}$, $\varphi \circ \psi \in \mathcal{C}^k(J,F)$

soit $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I,F)$, $g \in \mathcal{C}^{k+1}(J,\mathbb{R})$ avec $g(J) \subset I$,

alors $\begin{cases} f \in \mathcal{C}^1(I,F) \\ g \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R}) \text{ avec } g(J) \subset I \end{cases}$

donc $f\circ g \in \mathcal{C}^1(J,F)$ et $(f\circ g)' = g' \cdot (f' \circ g)$

avec $g' \in \mathcal{C}^k(J,\mathbb{R})$

$\begin{cases} f' \in \mathcal{C}^k(I,F) \\ g \in \mathcal{C}^k(J,\mathbb{R}) \text{ avec } g(J) \subset I \end{cases}$

donc $f' \circ g \in \mathcal{C}^k(J,F)$ (hyp)

par produit : $g' \cdot (f'\circ g) \in \mathcal{C}^k(J,F)$

$(f\circ g)' \in \mathcal{C}^k(J,F)$

d'où $f\circ g \in \mathcal{C}^{k+1}(I,F)$

IV Applications de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I

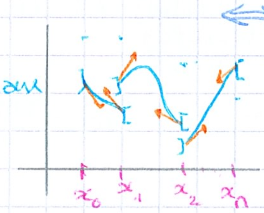
I intervalle fermé borné (segment),

$f : I \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I

$\iff \exists\ S$ subdivision $/ \ \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$,

la restrict° de f à $]x_i, x_{i+1}[$ possède un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ $([x_i, x_{i+1}])$

$\mathcal{C}^1$ par morceaux



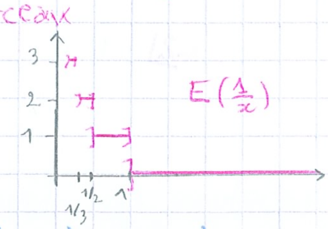
* S est adaptée à f.
* $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $D^i : \begin{vmatrix} I \setminus S \longrightarrow F \\ f \longmapsto D^i f \end{vmatrix}$

I intervalle qcq, $\mathring{I} \neq \emptyset$

f $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $I \iff$ la restrict° de f à $\forall$ segment de I est $\mathcal{C}^k$ par morceaux

ex : $E : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto E(x) \end{vmatrix}$ $E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par morceaux

$f : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto E(\frac{1}{x}) \end{vmatrix}$ $f \in \mathcal{C}^\infty$ par morceaux



Pp 1) $f \in \mathcal{C}^k$ par morceaux sur I si ses composantes le sont

2) $f \in \begin{cases} \mathcal{C}^j(I) \\ \mathcal{C}^k \text{ par morceaux sur } I \ (j \leq k) \end{cases} \implies D^j f \in \mathcal{C}^{k-j}$ par morceaux

ex : $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{vmatrix}$ f continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux

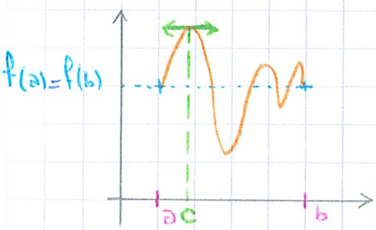
V Accroissements finis : fonctions réelles

1 _ Théorème de Rolle $a<b$ réels

soit $f : [ab] \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} f \text{ continue sur } [ab] \\ f \text{ dérivable sur }]ab[\\ f(a)=f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]ab[\ / \ f'(c)=0$

1er cas : f cste sur $[ab]$, soit $c=\frac{a+b}{2}$ $f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0$

2ème cas : f non cste sur $[ab]$,
$\exists d \in [ab] \ / \ f(d) \neq f(a)=f(b)$
f continue sur le compact $[ab]$ (segment : intervalle fermé, borné)
donc f majorée et atteint sa borne sup en $c \in [ab]$:
$\forall x \in [ab]$ $f(x) \leq f(c)$
$\begin{cases} f(a) < f(d) \leq f(c) \\ f(b) < f(d) \leq f(c) \end{cases}$ donc $a<c<b$
alors $\forall x \in]ac[$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \Rightarrow f'_g(c) \geq 0$
$\forall x \in]cb[$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \Rightarrow f'_d(c) \leq 0$
f dérivable : $f'(c)=f'_d(c)=f'_g(c)=0$



rem : * c n'est pas unique
* s'applique en cascade :
$f \begin{cases} \text{continue sur } [ab] \\ \text{2 fois dérivable sur }]ab[\end{cases}$
$\exists e \in]ab[\ / \ f(a)=f(e)=f(b)$ alors $\exists \ c_1 \in]ae[\ / \ f'(c_1)=0$
$\exists \ c_2 \in]eb[\ / \ f'(c_2)=0$
donc $f'(c_1)=f'(c_2)$ donc $\exists \ c \in]c_1, c_2[\subset]ab[\ / \ f''(c)=0$

x	a	c_1 e c	c_2 b
f	0	0	0
f'	0		0
f''		0	

2 _ Formule des accroissements finis (égalité)

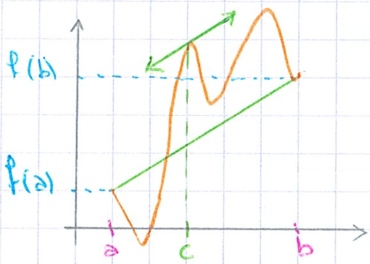
soit $f : [ab] \to \mathbb{R}$ $f \begin{cases} \text{continue sur } [ab] \\ \text{dérivable sur }]ab[\end{cases} \Rightarrow \exists c \in]ab[\ / \ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

soit $\varphi : \begin{array}{l} [ab] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x \end{array}$

φ est $\begin{cases} \text{continue sur } [ab] \\ \text{dérivable sur }]ab[\end{cases}$

$\begin{cases} \varphi(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{(b-a)f(a) - af(b)+af(a)}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \\ \varphi(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b = \frac{(b-a)f(b)-bf(b)+bf(a)}{b-a} = \frac{-af(b)+bf(a)}{b-a} \end{cases}$

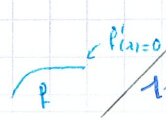
donc $\varphi(a)=\varphi(b)$ th de Rolle : $\exists c \in]ab[\ / \ \varphi'(c)=0$
or, $\forall x \in]ab[$, $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
d'où $\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Leftrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



corollaire c1) $f \begin{cases} \text{continue sur } [ab] \\ \text{dérivable sur }]ab[\\ \exists K \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall x \in]ab[, \ |f'(x)| \leq K \end{cases} \Rightarrow |f(b)-f(a)| \leq K|b-a|$
et $\forall (x,x') \in [ab]^2$,
$|f(x)-f(x')| \leq K|x-x'|$
(f K-lips. sur $[ab]$)

c2) $f \in C^1([ab]) \Rightarrow f$ lips
* dans $\mathbb{R}$ || f' continue sur le compact $[ab]$ *
c2) p.85 || donc f' bornée

3 _ variations des fonctions

si f est définie, dérivable sur un intervalle I, $f : I \to \mathbb{R}$ alors :
(1) f cste sur I $\Leftrightarrow \forall x \in I$, $f'(x)=0$
(2) $\nearrow$ ≥ 0
(3) $\searrow$ ≤ 0
(4) $\forall x \in I$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ st^t $\nearrow$ sur I (car il se peut que 
(5) < 0 $\searrow$

(6) si $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, f a un extremum local en $x_0 \implies f'(x_0) = 0$

(1) $\Rightarrow$ f cste $\Rightarrow \left(\forall (x,x') \in I^2,\ x \neq x' \Rightarrow \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = 0 \right)$

$\Rightarrow \forall x \in I,\ f'(x) = 0$

$\Leftarrow$ $\forall c \in I,\ f'(c) = 0$

$\forall (x,x') \in I^2$ avec $x \neq x'$, formule des acc. finis entre x et x'

$\exists c \in]x,x'[\ /\ \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = f'(c) = 0$

donc $\forall (x,x') \in I^2,\ f(x) = f(x')$

(2) $\forall c \in I,\ f'(c) \geq 0$,

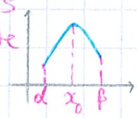
$\forall (x,x') \in I^2,\ x \neq x' \rightarrow \exists c \in]x,x'[\ /\ \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \geq 0$

donc si $x > x'$ alors $f(x) \geq f(x')$

(4) $\forall c \in I,\ f'(c) > 0$, $\forall (x,x') \in I^2,\ x \neq x'$

$\exists c \in]x,x'[\ /\ f'(c) = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} > 0$

x_0 à l'intérieur de I pour pouvoir mettre des pts à gauche et à droite



(6) $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ maximum local, $\exists (\alpha,\beta) \in I^2$, $\alpha < x_0 < \beta$ /*

$\forall x \in [\alpha,\beta],\ f(x) \leq f(x_0)$

$\forall x \in]\alpha, x_0[,\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$

$\forall x \in]x_0, \beta[,\ \ldots\ldots \leq 0$ $\quad f'(x) \leq 0$

d'où $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = 0$

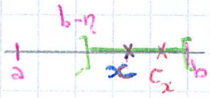
4 - prolongement de la dérivée

$f : [ab] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (b > a)$

th $\begin{cases} f \begin{cases} \text{continue sur } [ab] \\ \text{dérivable sur } [ab[\end{cases} \\ f' \text{ admet une limite } \ell \text{ en } b \end{cases} \implies \begin{cases} f \text{ dérivable en } b \\ f'(b) = \ell \\ f' \text{ est continue en } b \end{cases}$ (pas de prolongement)

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 / \forall c \in]b - \eta, b[,\ |f'(c) - \ell| < \varepsilon$

$\forall x \in]b-\eta, b[,\ \exists c_x \in]x,b[\subset]b-\eta, b[\ / f'(c_x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$



$\left| \frac{f(x) - f(b)}{x - b} - \ell \right| < \varepsilon$

donc f est dérivable en b et $f'(b) = \ell$

et $\lim_b f' = \ell = f'(b)$ donc f' est continue en b

rem : si $\ell = +\infty$ alors $\lim_b \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = +\infty$

et $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale en b

corollaire $\begin{cases} f \in C^1([ab[), \quad f : [ab[\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \text{ et } f' \text{ admettent une limite finie en } b \end{cases}$

$\begin{cases} f \text{ dérivable sur } [ab[\\ f' \text{ continue sur } [ab[\end{cases}$

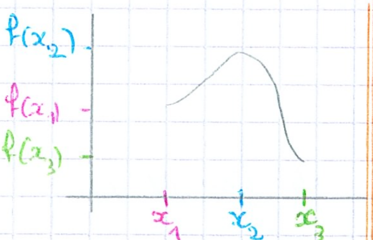
$\implies \begin{cases} f \text{ admet un prolongement par continuité } \overline{f} : \begin{array}{l} [ab] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [ab[\\ \lim_b f & \text{si } x = b \end{cases} \end{array} \\ \overline{f} \text{ dérivable sur } [ab] \\ \overline{f}' \text{ continue en } b, \text{ sur } [ab[\text{ donc sur } [ab] \\ \text{donc } \overline{f} \in C^1([ab]) \end{cases}$

(généralisat° $\rightarrow$ en a $\rightarrow$ dérivées d'ordre supérieur)

VI C^k - difféomorphismes (fct° réelles)

Pp 1) I intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue,

f injective $\iff$ f strictement monotone



$\Rightarrow$ contraposée : supposons f non st^t monotone.

$\exists (x_1, x_2, x_3) \in I^3 / x_1 < x_2 < x_3$ et $f(x_2) \notin]f(x_1), f(x_3)[$

par ex : $f(x_3) \leq f(x_1) < f(x_2)$

$\begin{cases} [x_1, x_2] \text{ intervalle} \\ f \text{ continue} \end{cases} \implies f([x_1, x_2])$ intervalle

$[f(x_1) f(x_2)] \subset f([x_1, x_2])$

de $\hat{m}$, $[f(x_3) f(x_2)] \subset f([x_2 x_3])$

• soit $y \in]f(x_1), f(x_2)[\cap]f(x_3) f(x_2)[$ $\quad (\neq \emptyset)$

alors $y \in f([x_1, x_2])$ donc $\exists x_1' \in [x_1, x_2]$ / $f(x_1') = y$

or, $\begin{cases} f(x_1) \neq y \\ f(x_2) \neq y \end{cases}$ donc $x_1' \in]x_1, x_2[$

et $y \in f([x_2\ x_3])$ donc $\exists x_3' \in [x_2 x_3]$ / $f(x_3') = y$

or, $\begin{cases} f(x_3) \neq y \\ f(x_2) \neq y \end{cases}$ donc $x_3' \in]x_2, x_3[$

alors, $x_1 < x_1' < x_2 < x_3' < x_3$: $\begin{cases} x_1' \neq x_3' \\ f(x_1') = f(x_3') = 3 \end{cases}$: f non injective

$\Leftarrow$ f st^t monotone $\Rightarrow$ f injective

2) I intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $f(I) = J$ (intervalle),

$f : I \to J$ homéomorphisme $\Leftrightarrow$ f st^t monotone

$\Rightarrow$ f homéo $\Rightarrow$ f injective (et continue)

$\Rightarrow$ f st^t monotone

$\Leftarrow$ on supp. f continue et st^t $\nearrow$

* f est injective
* f surjection de I sur $f(I) = J$ } biject° de I sur J
* f continue
* continuité de f^{-1} :

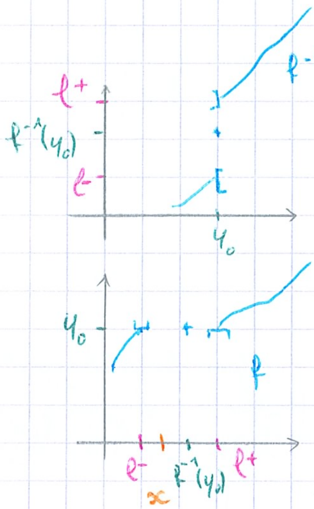
f et f^{-1} ont la m̂ monotonie (on supp. st^t $\nearrow$)

$\forall y_0 \in \mathring{J}$, par le th de la limite monotone, f^{-1} admet une lim à gauche et à droite en y_0

$\lim\limits_{y_0^+} f^{-1}(y) = \ell^+$

$\lim\limits_{y_0^-} f^{-1}(y) = \ell^-$

$\ell^- \leq f^{-1}(y_0) \leq \ell^+$



si $\ell^- < \ell^+$

alors $\exists x \in]\ell^-, \ell^+[\setminus \{f^{-1}(y_0)\} =]\ell^-, f^{-1}(y_0)[\cup]f^{-1}(y_0), \ell^+[$

or, $\forall z \in I$, $\begin{cases} z > \ell^+ \Leftrightarrow f(z) > y_0 \\ z < \ell^- \Leftrightarrow f(z) < y_0 \\ z = f^{-1}(y_0) \Leftrightarrow f(z) = y_0 \end{cases}$ bijection

$f(x) \in J \Rightarrow \begin{cases} f(x) > y_0 \\ \text{ou} \\ f(x) < y_0 \\ \text{ou} \\ f(x) = y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \ell^+ \\ \text{ou} \\ x < \ell^- \\ \text{ou} \\ x = f^{-1}(y_0) \end{cases}$ donc $\exists x$ qui n'a pas d'antécédant or f bijective

donc $\ell^- = \ell^+ = f^{-1}(y_0)$

généralisat° des homéomorphismes, pour lesquels $k = 0$

($k \geq 1$), I, J intervalles, $f : I \to J$

f C^k-difféomorphisme $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ bijective} \\ f \text{ de classe } C^k \\ f^{-1} \text{ de classe } C^k \end{cases}$

Th si $f : I \to J$ $\begin{cases} \text{bijective} \\ \text{de classe } C^k \end{cases}$ $(k \geq 1)$,

f C^k difféomorphisme $\Leftrightarrow$ f' ne s'annule pas sur I

hyp utiles pour $\Leftarrow$

ou bien :

"ce qu'il manque à une fct bijective de classe C^k pour être un C^k-difféo, c'est que f' ne s'annule pas"

$\Rightarrow$ on supp. f biject° de I sur J, de classe C^k

alors f est st^t monotone

$\forall (x, x') \in I^2$, $\begin{cases} y = f(x) \in J \\ y' = f(x') \in J \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ x' = f^{-1}(y') \end{cases}$

$x \neq x' \Leftrightarrow y \neq y'$

$\underbrace{\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y')}{y - y'}}_{\xrightarrow[y \to y']{} (f^{-1})'(y)} = \underbrace{\dfrac{x - x'}{f(x) - f(x')}}_{\xrightarrow[x \to x']{} \frac{1}{f'(x)}}$

1er cas : $f'(x) \neq 0$

alors $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y')}{y - y'} \xrightarrow[y \to y']{} \dfrac{1}{f'(x)}$

2ème cas : $f'(x) = 0$

alors $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y')}{y - y'}$ n'a pas de lim qd $y \to y'$

ccl : f^{-1} dérivable en y $\Leftrightarrow$ $f'(x) = f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ *

dans ce cas, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

* $f \circ f^{-1} = Id_J$

$\forall y \in J$, $f(f^{-1}(y)) = y$

par dérivation :

$f'(f^{-1}(y)) . (f^{-1})'(y) = 1$

d'où $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

donc f^{-1} dérivable sur J $\Leftrightarrow$ f' ne s'annule pas sur I

$\Leftarrow$ si f' ne s'annule pas sur I,

$\forall y \in J$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$f : I \to J$

$f^{-1} : J \to I$

f est C^k $\quad f^{-1}$ est C^0 $\quad$ (f bijective)
f' est C^{k-1} sur I
$f' \circ f^{-1}$ est au moins C^0 et ne s'annule pas sur J $\quad$ ⑤ p. 116
$(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est au moins C^0 sur J (par quotient)
donc f^{-1} est au moins C^1 sur J $\quad$ ($f^{-1} \in C^1(J)$)

* récurrence

$\begin{cases} f \text{ est } C^k \\ f^{-1} \text{ est } C^1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ est C^2

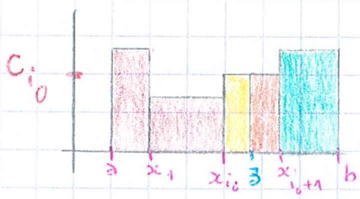
$\begin{cases} f \text{ est } C^k \\ f^{-1} \text{ est } C^2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ est C^3

Th $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k $(k \geq 1)$, $J = f(I)$
f C^k-difféo de I sur J $\iff$ $(\forall x \in I, f'(x) > 0)$ ou $(\forall x \in I, f'(x) < 0)$

VII Intégration des fonctions en escalier

$\varphi \in \mathcal{E}([ab], F)$, $\quad S : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ subd adaptée à φ
$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[$, $\varphi(x) = c_i \in F$

Le vecteur $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i$ ne dépend pas de S, on le note $\displaystyle\int_{[ab]} \varphi$



soit $S \cup \{3\}$ une nouvelle subdivision
$\exists i_0 \in \{0, \dots, n-1\} \;/\; x_{i_0} < 3 < x_{i_0+1}$

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i = \sum_{i=0}^{i_0-1} (x_{i+1} - x_i) c_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i + (x_{i_0+1} - x_{i_0}) c_{i_0}$

calcul pour S

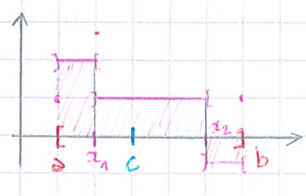
calcul pour $S \cup \{3\}$ = $\displaystyle\sum_{i=0}^{i_0-1} (x_{i+1} - x_i) c_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i + (3 - x_{i_0}) c_{i_0} + (x_{i_0+1} - 3) c_{i_0}$

si S et S' sont adaptées à φ alors $S \cup S'$ est | adaptée à φ / plus fine que S et S'

le calcul est le m̂ sur $\begin{cases} S \text{ et } S \cup S' \\ S' \text{ et } S \cup S' \end{cases}$ donc sur S et S'

Pp 1) $\varphi \in \mathcal{E}([ab], F)$, $c \in]ab[$,
$\varphi_{/[ac]} \in \mathcal{E}([ac], F)$, $\varphi_{/[cb]} \in \mathcal{E}([cb], F)$

$$\int_{[ac]} \varphi_{/[ac]} + \int_{[cb]} \varphi_{/[cb]} = \int_{[ab]} \varphi$$



2) $\begin{cases} \varphi \in \mathcal{E}([ab], F) \\ \psi \in \mathcal{E}([ab], F) \end{cases}$ si φ et ψ coïncident sauf pour un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_{[ab]} \varphi = \int_{[ab]} \psi$

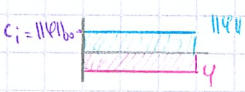
3) si $\varphi \in \mathcal{E}([ab], F)$ alors $\|\varphi\| : \begin{array}{l} [ab] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|\varphi(x)\| \end{array} \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{R})$

et $\displaystyle\left\| \int_{[ab]} \varphi \right\| \leq \int_{[ab]} \|\varphi\|$

$\displaystyle\left\| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| \, \|c_i\|$
$\displaystyle\leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \|c_i\|$

4) on munit $\mathcal{E}([ab], F)$ de la norme $\| \|_\infty$,
$f : \begin{array}{l} \mathcal{E}([ab], F) \to F \\ \varphi \mapsto \int_{[ab]} \varphi \end{array}$ est : - linéaire
- continue, de norme $b - a$

$\displaystyle\left\| \int_{[ab]} \varphi \right\| \leq \int_{[ab]} \|\varphi\| = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \|c_i\| \leq \left[\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \right] \|\varphi\|_\infty = (b-a) \|\varphi\|_\infty$



si φ cste non nulle : $\displaystyle\left\| \int_{[ab]} \varphi \right\| = (b-a) \|\varphi\|_\infty$ $\quad$ $\forall \varphi$ $\; \|f(\varphi)\| \leq (b-a) \underbrace{\|\varphi\|}_{|||\varphi|||}$

5) $\begin{cases} \varphi \in \mathcal{E}([ab], F) \\ u \in \mathcal{L}(F, G) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \circ \varphi \in \mathcal{E}([ab], G) \\ \int_{[ab]} u \circ \varphi = u\left(\int_{[ab]} \varphi \right) \end{cases}$

$\int$ est une appli. linéaire $\quad \int_{[ab]} u \circ \varphi = \sum_{i=0} (x_{i+1} - x_i)\, u(c_i) = u\left(\sum_{i=0} (x_{i+1} - x_i)\, c_i\right) = u\left(\int_{[ab]} \varphi\right)$

6) si $\varphi \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{C})$ alors $\begin{cases} Re(\varphi) \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{R}) \\ Im(\varphi) \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{R}) \end{cases}$

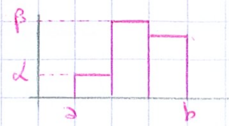
et $\boxed{\int_{[ab]} \varphi = \int_{[ab]} Re(\varphi) + i \int_{[ab]} Im(\varphi)}$

7) si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont les composantes de φ dans $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de F
$\forall x \in [ab],\ \varphi(x) = \varphi_1(x) e_1 + \dots + \varphi_n(x) e_n$

alors $\forall j \in \{1, \dots, n\},\ \varphi_j \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{K})$ et $\boxed{\int_{[ab]} \varphi = \sum_{j=1} \left(\int_{[ab]} \varphi_j\right) e_j}$

8) $\begin{cases} \varphi \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{R}) \\ \psi \in \mathcal{E}([ab], \mathbb{R}) \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} \varphi \geqslant 0 & \Rightarrow & \int_{[ab]} \varphi \geqslant 0 \\ \varphi \geqslant \psi & \Rightarrow & \int_{[ab]} \varphi \geqslant \int_{[ab]} \psi \end{matrix}$ $\quad (\varphi - \psi \geqslant 0)$

9) si $\begin{cases} \alpha = \min\{\varphi(x),\ x \in [ab]\} \\ \beta = \max\{\varphi(x),\ x \in [ab]\} \end{cases}$ $\quad (b-a)\alpha \leqslant \int_{[ab]} \varphi \leqslant (b-a)\beta$



VIII Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment

1.

th $f \in C\Pi([ab], F)$,
si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 suites de fct° en escalier qui CV unif^t vers f sur $[ab]$
alors $\left(\int_{[ab]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[ab]} \psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV et ont la même limite

on veut mq il y a une lim, mais on ne la connait pas $\Rightarrow$ Cauchy

• on mq $\left(\int_{[ab]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F, ev normé de dim finie, donc complet.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \overset{*}{\Rightarrow} (b-a)\|\varphi_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$* \Rightarrow \forall x \in [ab], \|\varphi_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$
vrai $\forall x$, donc
$\|\varphi_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$q > p \geqslant n_0 \Rightarrow \left\|\int_{[ab]} \varphi_q - \int_{[ab]} \varphi_p\right\| = \left\|\int_{[ab]} \varphi_p - \varphi_q\right\| \leqslant \int_{[ab]} \|\varphi_p - \varphi_q\|$

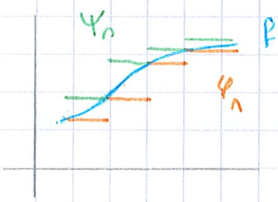
$\leqslant (b-a)\|\varphi_p - \varphi_q\|_\infty = (b-a)\|\varphi_p - f + f - \varphi_q\|_\infty$

$\leqslant (b-a)(\|\varphi_p - f\|_\infty + \|\varphi_q - f\|_\infty) < \varepsilon$

donc les 2 suites CV

$*$ $f - \theta_n$ vaut soit $f - \varphi_n$, soit $f - \psi_n$ donc $\leqslant$ leur somme

• soit $\theta_n = \begin{cases} \varphi_n & \text{si } n \text{ pair} \\ \psi_n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$, $\|f - \theta_n\|_\infty \leqslant \|f - \varphi_n\|_\infty + \|f - \psi_n\|_\infty$ *



donc $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fct° en escalier qui cv unif^t vers f

donc $\left(\int_{[ab]} \theta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV

$\left(\int_{[ab]} \theta_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $\lim_{n\to+\infty} \int \theta_n$
$\quad \|$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \|$
$\left(\int_{[ab]} \varphi_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $\lim_{n\to+\infty} \int \varphi_n$

de m̂ $\left(\int_{[ab]} \theta_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[ab]} \psi_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV

d'où $\lim_{n\to+\infty} \int_{[ab]} \theta_n = \lim \int \varphi_n$

corollaire On munit $C\Pi([ab], F)$ de la norme infinie
$\mathcal{E} \subset C\Pi$
densité : $\overline{\mathcal{E}} = C\Pi$

$\left| \begin{array}{l} C\Pi([ab], F) \longrightarrow F \\ f \longmapsto \int_{[ab]} f \end{array} \right.$ est l'unique appli linéaire continue qui prolonge $\left| \begin{array}{l} \mathcal{E}([ab], F) \longrightarrow F \\ \varphi \longmapsto \int_{[ab]} \varphi \end{array} \right.$

sa norme est $b - a$

Pp) obtenues par passage à la lim

1)' idem que 1) p. 121
ou : $\chi_{[ac]}$: caractéristique de $[ac]$ dans $[ab]$: $\chi_{[ac]} \left| \begin{array}{l} [ab] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [ac] \\ 0 & \text{si } x \in]cb] \end{cases} \end{array} \right.$

$\int_{[ab]} \chi_{[ac]} f + \int_{[ab]} \chi_{[cb]} f = \int_{[ab]} f$

notat° : $\int_{[ac]} f + \int_{[cb]} f = \int_{[ab]} f$

dém de 5)'

F, G de dim finie donc u continue, $u \circ \varphi$ est $C\Pi$

soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui CV unif^t vers φ sur $[ab]$

* $\varphi_n \in C\Pi([ab],F)$ $\varphi_n \in \mathcal{E}([ab],F)$*

car continue sur le fermé $[ab]$

u unif^t continue* donc $(u\circ\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif^t vers $u\circ\varphi$

l'intégrat° est continue donc

$\left(\int_{[ab]} u\circ\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $\int_{[ab]} u\circ\varphi$

$\left(u\left(\int_{[ab]}\varphi_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $\int_{[ab]} u\circ\varphi$

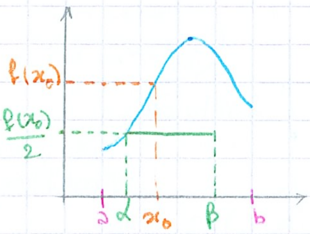
u continue : $\left(u\left(\int_{[ab]}\varphi_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $u\left(\int_{[ab]} f\right)$

Pp 5) p. 121

avec $\begin{cases}\varphi_n \in \mathcal{E}([ab],F)\\ u \in \mathcal{L}(F,G)\end{cases}$

8)' $\begin{cases} f \in C\Pi([ab],\mathbb{R}), & \forall x\in[ab],\ f(x)\geq 0 \implies \int_{[ab]} f \geq 0\\ g\in C\Pi([ab],\mathbb{R}), & \forall x\in[ab],\ f(x)\geq g(x) \implies \int_{[ab]} f \geq \int_{[ab]} g\end{cases}$

10) $f\in C\Pi([ab],\mathbb{R})$, $\begin{cases}\forall x\in[ab],\ f(x)\geq 0\\ \exists x_0\in[ab] / \begin{cases} f(x_0)>0\\ f \text{ continue en } x_0\end{cases}\end{cases} \implies \int_{[ab]} f > 0$



$\begin{cases} f(x_0)>0\\ f \text{ continue en } x_0\end{cases}$ donc $\exists(\alpha,\beta)\in[ab]^2$, $\alpha<\beta$ / $x_0\in[\alpha\beta]$ /

$\forall x\in[\alpha,\beta]$, $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$ alors $\begin{cases}\theta : \begin{vmatrix}[ab] \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto \begin{cases}\frac{f(x_0)}{2} & \text{si } x\in[\alpha\beta]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{vmatrix}\\ \forall x\in[ab],\ f(x)\geq\theta(x)\end{cases}$

donc $\int_{[ab]} f \geq \int_{[ab]}\theta = (\beta-\alpha)\frac{f(x_0)}{2} > 0$

11) E, F, G ev normés de dim finie,

$B : E\times F \longrightarrow G$ bilinéaire

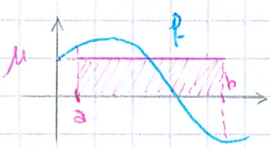
donc B est continue : $\exists K\in\mathbb{R} / \forall(u,v)\in E\times F$, $\|B(u,v)\|\leq K\|u\|\,\|v\|$

soit $\begin{cases} f\in C\Pi([ab],E)\\ g\in C\Pi([ab],F)\end{cases}$ alors $B(f,g) : \begin{vmatrix}[ab] \longrightarrow G\\ x\longmapsto B(f(x),g(x))\end{vmatrix} \in C\Pi([ab],G)$

et $\left\|\int_{[ab]} B(f,g)\right\| \leq K\|f\|_\infty \int_{[ab]}\|g\|$

$\underbrace{\left\|\int_{[ab]} B(f,g)\right\|}_{\text{scalaire}} \leq \underbrace{\int_{[ab]}\|B(f,g)\|}_{\text{fct}} \leq \int_{[ab]} K\|f\|\,\|g\| \leq \int_{[ab]} \underbrace{K\|f\|_\infty}_{\text{scalaire}} \underbrace{\|g\|}_{\text{fct}} \leq K\|f\|_\infty\int_{[ab]}\|g\|$

2. moyenne



$f\in C\Pi([ab],F)$

valeur moyenne de f : $\mu(f) = \frac{1}{b-a}\int_{[ab]} f$

$\|\mu(f)\| \leq \|f\|_\infty$

$\|\mu(f)\| = \left\|\frac{1}{b-a}\int_{[ab]} f\right\| \leq \frac{1}{|b-a|}\|f\|_\infty\int_{[ab]}|1| = \|f\|_\infty$

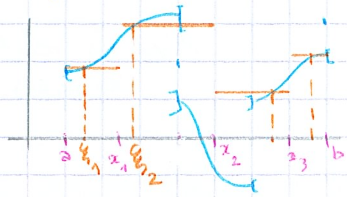
3. somme de Riemann

$f\in C\Pi([ab],F)$, $S : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ subd de $[ab]$

$S' = (\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ famille de réels / $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

somme de Riemann de f associée à S et S' :

$$\sigma(S,S',f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\,f(\xi_i)$$



Th $\forall f\in C\Pi([ab],F)$,

$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0$ / pour tte subd S de $[ab]$ et tte famille S' adaptée,

$\delta(S)\leq\eta \implies \left\|\int_{[ab]} f - \sigma(S,S',f)\right\| < \varepsilon$

1er cas : f continue sur $[ab]$

Heine : f unif^t continue sur $[ab]$:

$\exists \eta > 0 \;/\; \forall (x,x') \in [ab]^2, \quad |x - x'| \leq \eta \Rightarrow \| f(x) - f(x') \| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$\int_{[ab]} f - \sigma(S,S',f) = \int_{[ab]} f - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{[x_{i-1}, x_i]} f - (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1}, x_i]} \left(f - f(\xi_i) \right)$$

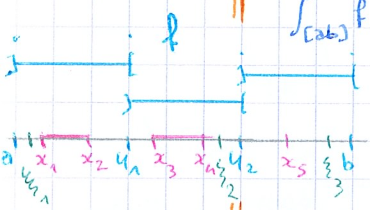
or, $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad |x - \xi_i| < \eta$

donc $\quad \| f(x) - f(\xi_i) \| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

donc $\left\| \int_{[ab]} f - \sigma(S,S',f) \right\| \underbrace{\leq}_{\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1}, x_i]} \|f - f(\xi_i)\|} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq (b-a) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \varepsilon$

2ème cas : f en escalier sur $[ab]$

$S_1 : a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$ subd. adaptée à f



$$\int_{[ab]} f - \sigma(S,S',f) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1}, x_i]} (f - f(\xi_i)) = \sum_{\substack{i=1 \\ \forall j \in \{1,\dots,m\}, \\ y_j \notin [x_{i-1}, x_i]}}^{n} \int_{[x_{i-1}, x_i]} (f - f(\xi_i)) + \sum_{\substack{i=1 \\ \exists j \in \{1,\dots,m\} / \\ y_j \in [x_{i-1}, x_i]}}^{n} \int_{[x_{i-1}, x_i]} (f - f(\xi_i))$$

f cste sur $[x_{i-1}, x_i]$ égale à $f(\xi_i)$

0

y_j appartient au plus à 2 intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ (si $y_j = x_i$)

au plus $2(m+1)$ termes

$$\left\| \int_{[x_i, x_{i-1}]} f - f(\xi_i) \right\| \leq \int_{[x_i, x_{i-1}]} \| f - f(\xi_i) \| \leq \int_{[x_i, x_{i-1}]} 2 \|f\|_\infty = (x_i - x_{i-1})\, 2 \|f\|_\infty$$
$$\leq 2\, \delta(S) \|f\|_\infty$$

donc $\left\| \int_{[ab]} f - \sigma(S,S',f) \right\| \leq 4(m+1)\, \delta(S) \|f\|_\infty$

3ème cas : f continue par morceaux sur $[ab]$

$\exists \begin{cases} g \text{ continue sur } [ab] \\ h \text{ en escal sur } [ab] \end{cases} \;/\; f = g + h$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \;/\;$ pr tte subd S de $[ab]$, tte famille S' adaptée,

$$\delta(S) \leq \eta \Rightarrow \begin{cases} \left\| \int_{[ab]} g - \sigma(S,S',g) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} & (1^{er} \text{ cas}) \\ \left\| \int_{[ab]} h - \sigma(S,S',h) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} & (2^{ème} \text{ cas}) \end{cases}$$

$$\left\| \int_{[ab]} f - \sigma(S,S',f) \right\| = \left\| \int_{[ab]} g + \int_{[ab]} h - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \left(g(\xi_i) + h(\xi_i) \right) \right\|$$
$$= \left\| \int_{[ab]} g - \sigma(S,S',g) + \int_{[ab]} h - \sigma(S,S',h) \right\|$$
$$\leq \left\| \int_{[ab]} g - \sigma(S,S',g) \right\| + \left\| \int_{[ab]} h - \sigma(S,S',h) \right\| < \varepsilon$$

corollaire si $f \in CM([ab])$ alors $\begin{cases} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \\ \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$ convergent vers f

notation : $f \in CM(J,F)$,
$\forall (a,b) \in J^2, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{[ab]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[ab]} f & \text{si } a > b \end{cases}$

d'où la relat° de Chasles.
$\forall (a,b,c) \in J^3, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

si $a < b < c$, $\int_{[ab]} f + \int_{[bc]} f = \int_{[ac]} f$

donc $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \iff \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$

4 - semi-normes

$N_1 : \begin{array}{l} CM([ab],F) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_{[ab]} \|f\| \end{array}$ $\qquad N_2 : \begin{array}{l} CM([ab],F) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \left(\int_{[ab]} \|f\|^2 \right)^{1/2} \end{array}$

$\forall (f,g) \in CM([a,b],F)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \begin{cases} N(\lambda f) = |\lambda|\, N(f) \\ N(f+g) \leq N(f) + N(g) \end{cases}$

5_ primitives de fonctions continues

I intervalle, $f \in C^0(I,E)$
F est une primitive de $f \iff \begin{cases} F \text{ est } \begin{cases}\text{définie} \\ \text{dérivable}\end{cases} \text{ sur } I \\ F' = f \end{cases}$

th (1) $a \in I$, $F : \begin{array}{l} I \longrightarrow E \\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$ est une primitive de f

(2) G une primitive de $f \iff \exists \lambda \in E \,/\, G = F + \lambda$
(3) F est la primitive de f qui s'annule en a
(4) G une primitive de f, $(b,c) \in I^2$,
$\int_b^c f(x)\,dx = G(c) - G(b) = [G(x)]_b^c$

(1) soit $x \in I$, f continue en x :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall t \in I,\ |t-x| < \eta \Rightarrow \|f(t) - f(x)\| < \varepsilon$
$\forall h \in \mathbb{R} \,/\, |h| < \eta$,
$F(x+h) - F(x) - hf(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt - hf(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt - hf(x)$
$= \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt$

$t \in [x, x+h] \Rightarrow |t-x| \leq |h| < \eta$ donc

$\|F(x+h) - F(x) - hf(x)\| \leq \left| \int_x^{x+h} \|f(t) - f(x)\|\,dt \right| \leq \left| \int_x^{x+h} \varepsilon\,dt \right| = |h|\,\varepsilon$

d'où $F(x+h) = F(x) + hf(x) + o(h)$: $\begin{cases} F \text{ dérivable en } x, \text{ donc sur } I \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

(2) G primitive de f sur $I \iff G$ dérivable sur I et $G' = f$
$\iff$ .... $G' = F'$ $\}\ (G-F)' = 0$
$\iff$ .... $G - F$ cste
$\iff$ .... $\exists \lambda \in E \,/\, G = F + \lambda$

(3) • $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$
• si G est la primitive de f qui s'annule en a,
alors $\exists \lambda \in E \,/\, G = F + \lambda$ et $G(a) = F(a) + \lambda$; $0 = 0 + \lambda \Rightarrow \lambda = 0$
donc $G = F$

(4) $\int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt = F(c) - F(b) = (G(c) - \lambda) - (G(b) - \lambda)$
$= G(c) - G(b)$

th si $f \in C^1(I)$ alors $\forall (a,b) \in I^2$, $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$

f' continue sur I donc f est dérivable sur I
donc f est une primitive de f' sur I

6_ primitives de fonctions continues par morceaux

I intervalle, $f \in CM(I,E)$
F est une primitive de $f \iff F$ est $\begin{cases} \text{continue sur } I \\ C^1(I) \end{cases}$
et $\forall x \in I$, si f est continue en x
alors F est dérivable en x
et $F'(x) = f(x)$

rem : (1) $\forall x \in I$, si f continue en x, $DF(x) = f(x)$
(2) $\forall x \in I$, $F'_d(x) = f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$ $\quad F'_g(x) = f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t)$

si f continue en x, $F'_d(x) = F'_g(x) = f(x) = f(x^+) = f(x^-)$
si f n'est pas continue en x,
$\exists \alpha > 0 \,/\, f$ continue sur $]x-\alpha, x[$, et sur $]x, x+\alpha[$

$$\begin{cases} \forall t \in \,]x-\alpha, x[\,, & F'(t) = f(t) \\ \forall t \in \,]x, x+\alpha[\,, & F'(t) = f(t) \end{cases}$$

F continue en x et $\lim\limits_{t \to x^-} f(t) = f(x^-)$ donc $\lim\limits_{t \to x^-} F'(t) = f(x^-)$

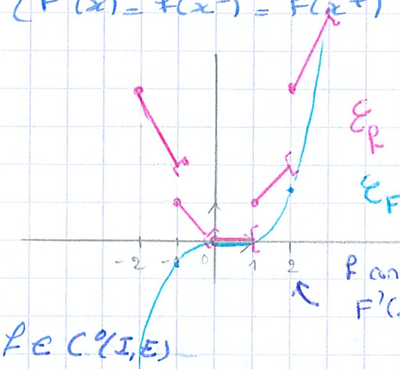
donc $\begin{cases} F \text{ dérivable en } x \text{ à gauche} \\ F'_g(x) = f(x^-) \end{cases}$

idem à droite

(3) $\forall x \in I$,
si $f(x^-) = f(x^+)$ alors $\begin{cases} F \text{ dérivable en } x \\ F'(x) = f(x^-) = f(x^+) \end{cases}$

ex : $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x\,E(x) \end{vmatrix}$

x	-2		-1		0		1		2	
$f(x)$	4	$-2x$	1	$-x$	0	0	1	x	4	$2x$
$F(x)$	$-\frac{7}{2}$	$-x^2+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{x^2}{2}$	0	0	0	$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$x^2-\frac{5}{2}$
ordre du choix	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5



f continue à droite donc
$F'(2) = f(2) = 4$

th | $f \in C\Pi(I, E)$, $a \in I$,
les 4 th de la page précédente pour $f \in C^0(I, E)$

$\forall x \in I$, si f est continue en x, alors F $\begin{cases} \text{continue en } x \\ \text{dérivable en } x \end{cases}$
et $F'(x) = f(x)$

si f n'est pas continue en x,
f est localement bornée au voisinage de x :

f non continue mais F continue

$\exists \alpha > 0,\ \exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall t \in \,]x-\alpha, x+\alpha[\, \cap I,\ \|f(t)\| < M$

$\forall y \in \,]x-\alpha, x+\alpha[\,,\ \|F(y) - F(x)\| = \left\| \int_x^y f(t)\,dt \right\|$
$\leq \left| \int_x^y \|f(t)\|\,dt \right| = M\,|y-x|$

donc $\lim\limits_{y \to x} F(y) - F(x) = 0$ donc F continue en x

th | si f $\begin{cases} \text{continue sur } I \\ \text{de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } I \end{cases}$ alors $\forall (a,b) \in I^2$, $\int_a^b Df(t)\,dt = f(b) - f(a)$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
$f \in C^1(]x_i, x_{i+1}[)$ est prolongeable par continuité
f est une primitive de $\begin{cases} Df \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[\\ Df_i \text{ sur } [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$

$$\int_a^b Df(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Df(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Df_i(t)\,dt$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i+1}^-) - f(x_i^+) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(b) - f(a)$$

7 - calcul des intégrales et des primitives

notation : si $f \in C\Pi(I, E)$, on note $\int f(x)\,dx$ une primitive de f

a. intégration par parties

si $\begin{cases} f \text{ continue, de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } I \text{, à valeurs dans } E & \text{(fct vectorielle)} \\ g \text{ -- } \mathbb{K} & \text{(fct scalaire)} \\ (a,b) \in I^2 \end{cases}$

alors $\int_a^b g(t)\,f'(t)\,dt = \left[g(t)\,f(t) \right]_a^b - \int_a^b g'(t)\,f(t)\,dt$

gf est continue, C^1 par morceaux sur I
$(gf)' = g'f + gf'$ et $\int_a^b (gf)'\,dt = \left[g(t)\,f(t) \right]_a^b$
$= \int_a^b g'(t)\,f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,f'(t)\,dt$

b. changement de variable

si $\begin{cases} f : I \longrightarrow E & \text{continue sur } I \\ \varphi : J \longrightarrow \mathbb{R} & \text{de classe } C^1 \\ \varphi(J) \subset I \end{cases}$ si $(a,b) \in J^2$, $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b \varphi'(u) \cdot f \circ \varphi(u)\,du$

soit F une primitive de f sur I, F de classe C^1 sur I.
$F \circ \varphi$ est de classe C^1 sur J
$(F \circ \varphi)' = \varphi' \cdot F' \circ \varphi = \varphi' \cdot f \circ \varphi$
$\int_a^b \varphi'(u) \cdot f \circ \varphi(u)\,du = \int_a^b (F \circ \varphi)'(u)\,du = \left[F \circ \varphi(u) \right]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

primitives

$I=\mathbb{R}^{+*}, a\in\mathbb{R}-\{-1\}$	$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$I=\mathbb{R}^{+*}$ ou $I=\mathbb{R}^{-*}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$
$I=\mathbb{R}$	$\int e^x dx = e^x$
$I=\mathbb{R}^{+*}$ ou $I=\mathbb{R}^{-*}$	$\int \ln(\lvert x\rvert)dx = x\ln\lvert x\rvert - x$
$I=]-1;1[$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$I=]-a;a[$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$
$I=\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$
$a\in\mathbb{R}^{+*}$ $I=\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$I=]1;+\infty[$ ou $I=]-\infty,-1[$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$
$a\in\mathbb{R}^{+*}, I=]a;+\infty[$ ou $I=]-\infty,-a[$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$
$I=\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$
$a\in\mathbb{R}^{+*}, I=\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$I=]-\infty;-1[$ ou $I=]-1;1[$ ou $I=]1;+\infty[$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$
$a\in\mathbb{R}^{+*}, I=]-\infty,-a[$ ou $I=]-a;a[$ ou $I=]a;+\infty[$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$
$I=\mathbb{R}$	$\int \text{ch}x\,dx = \text{sh}x \quad \int \text{sh}x\,dx = \text{ch}x$
$I=\mathbb{R}$	$\int \cos x\,dx = \sin x \quad \int \sin x\,dx = -\cos x$
$I=]-\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi[, n\in\mathbb{Z}$	$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert$
$I=]n\pi,(n+1)\pi[, n\in\mathbb{Z}$	$\int \text{cotan}x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert$
$I=\mathbb{R}$	$\int \text{th}x\,dx = \ln\text{ch}x$
$I=\mathbb{R}^{+*}$ ou $I=\mathbb{R}^{-*}$	$\int \coth x\,dx = \ln\lvert\text{sh}x\rvert$
$I=]-\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi[, n\in\mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$
$I=]n\pi,(n+1)\pi[, n\in\mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotan}x$
$I=\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th}x$
$I=\mathbb{R}^{+*}$ ou $I=\mathbb{R}^{-*}$	$\int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\coth x$
$I=]n\pi,(n+1)\pi[, n\in\mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert$
$I=]n\pi,(n+1)\pi[, n\in\mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$I=\mathbb{R}^{+*}$ ou $I=\mathbb{R}^{-*}$	$\int \frac{dx}{\text{sh}x} = \ln\left\lvert\text{th}\frac{x}{2}\right\rvert$
$I=\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{\text{ch}x} = 2\arctan e^x$ ou

$$\int_a^b \varphi'(u)\cdot f\circ\varphi(u)\,du = [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

corollaire : (1) si φ réalise une bijection de J sur I,
$\forall (\alpha,\beta)\in I^2 / \begin{cases} a=\varphi^{-1}(\alpha) \\ b=\varphi^{-1}(\beta)\end{cases}$, $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_a^b \varphi'(u)\, f\circ\varphi(u)\,du = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \varphi'(u)\, f\circ\varphi(u)\,du$

(2) si $\begin{cases}\varphi \text{ réalise un } C^1 \text{ difféomorphisme de J sur I,} \\ H \text{ est une primitive de } \varphi'.f\circ\varphi \text{ sur J}\end{cases}$
alors $H\circ\varphi^{-1}$ est une primitive de f sur I

$H\circ\varphi^{-1}\in C^1(I)$
$(H\circ\varphi^{-1})' = (\varphi^{-1})'.H'\circ\varphi^{-1} = (\varphi^{-1})'\,\varphi'(f\circ\varphi)\circ\varphi^{-1} = f$

8. Fractions rationnelles

décomposition dans $\mathbb{C}$

$k>1$, $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} = \frac{-1}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}$

$k=1$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\int\frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$

$\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\alpha=a+ib$, $b\neq 0$ $\quad \int\frac{dx}{x-a-ib} = \int\frac{x-a+ib}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\ln[(x-a)^2+b^2] + i\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$

dans $\mathbb{R}$: élmts de 1ère espèce → ĉ ds $\mathbb{C}$
------- 2nde espèce :

$I=\int\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^2}dx$ $\quad \begin{cases}(a,b)\neq(0,0)\\ p^2-4q<0\end{cases}$ $\quad I=\int\frac{ax+b}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\underbrace{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}_{>0}\right]^k}dx$

on pose $u=\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$ $\quad I=\int\frac{\alpha u+\beta}{(u^2+1)^k}du = \alpha\underbrace{\int\frac{u}{(u^2+1)^k}du}_{1^{\text{ère}}\text{ espèce}} + \beta\underbrace{\int\frac{du}{(u^2+1)^k}}_{J}$

J : pour calculer $\int\frac{du}{(u^2+1)^k}$ on calcule $\int\frac{du}{(u^2+1)^{k-1}}$ par parties

ex. $\int\frac{du}{(u^2+1)^2}$ $\quad \int\frac{du}{u^2+1} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] - \int\frac{-2u^2}{(u^2+1)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2\int\frac{du}{u^2+1} - 2\int\frac{du}{(u^2+1)^2}$

* règles de Bioche :
si $f(\sin x,\cos x)dx$ est invariant quand :
$x \leftarrow -x$ on pose $u=\cos x$
$x\leftarrow \pi-x$ $u=\sin x$
$x\leftarrow\pi+x$ $u=\tan x$
si 2 transformat° fonctionnent, alors la 3ème aussi, on pose $u=\cos 2x$

* métamorphose trigonométrique
$u=\tan\frac{x}{2}$ $\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\tan x=\frac{2u}{1-u^2}$

$x=2\arctan u$ $\quad dx=\frac{2\,du}{1+u^2}$

* fract° rationnelles en e^x / $\operatorname{ch}x, \operatorname{sh}x$: on pose $u=e^x$ ou Bioche

* intégrales abéliennes.
1er type : $\int f\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ on pose $u^n=\frac{ax+b}{cx+d}$

2nd type : $\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ on met le trinôme ss forme canonique puis chgt de var

$\int g(u,\sqrt{1-u^2})\,du$, $u=\sin t$ $(u=\cos t)$
$\int g(u, u^2-1)\,du$, $u=\operatorname{ch}t$ $\left(u=\frac{1}{\cos t}\right)$
$\int g(u,u^2+1)\,du$, $u=\operatorname{sh}t$ $\left(u=\frac{\cos t}{\tan t}\right)$

9 – accroissements finis : fonctions vectorielles

a – inégalité des accroissements finis

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$

f $\begin{cases}\text{continue sur } [ab]\\ \text{de classe } C^1 \text{ sur }]ab[\\ \text{à valeurs ds } E \text{ (ev normé de dim finie)}\end{cases}$

on suppose : $\exists K\in\mathbb{R} \;/\; \forall x\in]ab[,\quad \|f'(x)\|\leqslant K$

alors, $\|f(b)-f(a)\|\leqslant K(b-a)$

soit $\varepsilon>0 \;/\; a<a+\varepsilon<b-\varepsilon<b$ $\big\}\; f\in C^1\,]ab[$ donc

donc $f\in C^1([a+\varepsilon, b-\varepsilon])$

$f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f'(t)\,dt$

$\|f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon)\|\leqslant \left|\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\|f'(t)\|\,dt\right|\leqslant K(b-\varepsilon-(a+\varepsilon))$

$\leqslant K(b-a-2\varepsilon)$

or, f continue en a et en b

si $\varepsilon\to 0$: $\|f(b)-f(a)\|\leqslant K(b-a)$

rem : * ~~pas de th de Rolle~~ :

$f:\left|\begin{array}{l}[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{C}\\ t\longmapsto e^{it}=\cos t+i\sin t\end{array}\right.$ $\quad$ * $f\in C^\infty([0,2\pi],\mathbb{C})$ $\quad$ * $f(0)=f(2\pi)=1$

mais $\forall t\in[0,2\pi]$, $f'(t)=ie^{it}\neq 0$

en fait le th de Rolle fonctionne composante par composante, mais les annulations des dérivées n'ont lieu pour des valeurs $\neq$ du paramètre t :
($t=\frac{\pi}{2}$ pour cos, $t=0$ pour sin) donc la dérivée globale n'est jms nulle

* ~~pas de formule des acc. finis~~, qui est une généralisat. du th de Rolle

corollaire
I intervalle

c1) si $\begin{cases}f\in C^1(I,E)\\ \exists K\in\mathbb{R} \;/\; \forall x\in I,\ \|f'(x)\|\leqslant K\end{cases}$ alors $\forall(a,b)\in I^2$, $\|f(b)-f(a)\|\leqslant K|b-a|$ (f K-lips)

rem : $\begin{cases}f\ C^1 \text{ par morceaux et continue sur } I\\ \forall x\in I,\ f \text{ dérivable en } x \Rightarrow \|f'(x)\|\leqslant K\end{cases}$ suffit

c2) $f\in C^1(I,E)$, $\quad f$ cste sur $I \iff f'=0$

c3) prolongemt de la dérivée

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$ $\quad f:[ab]\to E$

$\begin{cases}f\ \begin{cases}\text{continue sur } [ab]\\ C^1 \text{ sur } [ab[\end{cases}\\ f' \text{ admet la limite } \ell \text{ en } b\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}f \text{ dérivable en } b\\ f'(b)=\ell\\ f\in C^1([ab])\end{cases}$

$g:\left|\begin{array}{l}[ab]\longrightarrow E\\ x\longmapsto f(x)-(x-b)\ell\end{array}\right.$

$\begin{cases}g \text{ est } \begin{cases}\text{continue sur } [ab]\\ C^1 \text{ sur } [ab[\end{cases}\\ \lim_b g'=0 \quad (\text{car } g'(x)=f'(x)-\ell \text{ et } \lim_b f'=\ell)\end{cases}$

$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0 \;/\; \forall x\in]b-\alpha,b[,\ \|g'(x)\|<\varepsilon$ $\quad\int_x^b$

$\|g(x)-g(b)\|\leqslant\varepsilon|b-x|$

$\left\|\frac{g(x)-g(b)}{x-b}\right\|\leqslant\varepsilon$

donc $\lim_{x\to b}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=0$

donc g dérivable en b et $g'(b)=0=f'(b)-\ell$

donc f dérivable en b et $f'(b)=\ell$

donc $\lim_b f'=\ell=f'(b)$ donc f' continue en b

10 – théorème du relèvement $\quad E=\mathbb{C}$

Th | I intervalle, $\begin{cases}f:I\longrightarrow\mathbb{C} \text{ de classe } C^k\ (k\geqslant 1)\\ \forall x\in I,\ |f(t)|=1\end{cases}$
alors $\exists\,\theta:I\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^k / $\forall t\in I$, $f(t)=e^{i\theta(t)}$

• soit $t_0\in I$,

$\frac{f'}{f}$ est C^{k-1} sur I, $k-1\geqslant 0$ $\quad (C^{k-1}\to f',\ C^k\to f)$

$$\varphi : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto -i\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du \end{cases} \qquad \varphi \text{ est } C^k$$

$$g : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t)e^{-i\varphi(t)} \end{cases} \qquad g \text{ est } C^k$$

$\forall t \in I,\ g'(t) = e^{-i\varphi(t)}\left[f'(t) - i\underbrace{\varphi'(t)}_{-i\frac{f'(t)}{f(t)}} f(t)\right] = e^{-i\varphi(t)}\left[f'(t) - \frac{f'(t)}{f(t)} f(t)\right] = 0$

donc g cste sur I : $\forall t \in I,\ g(t) = g(t_0)$

$\forall t \in I,\ f(t)e^{-i\varphi(t)} = f(t_0)e^{-i\varphi(t_0)} = \underbrace{|f(t_0)|}_{1} e^{i\theta_0} = e^{i\theta_0}$ θ_0 argument de $f(t_0)$

$f(t) = e^{i(\theta_0 + \varphi(t))}$

- de plus, $\forall t \in I,\ |f(t)| = 1 \Rightarrow |f(t)|^2 = 1$

$f(t)\overline{f(t)} = 1$ en dérivant : $f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)} = 0$

$\Rightarrow \frac{f'(t)\overline{f(t)}}{f(t)\overline{f(t)}} + \frac{f(t)\overline{f'(t)}}{f(t)\overline{f(t)}} = 0 = \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{\overline{f'(t)}}{\overline{f(t)}} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)$

donc $\frac{f'(t)}{f(t)} \in i\mathbb{R}$ donc $\theta(t) \in \mathbb{R}$

$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{e^{i\theta(t)}} = i\theta'(t) \in i\mathbb{R}$

$\theta'(t) \in \mathbb{R}$

$P_p)$ m̂ hyp θ_1, θ_2 C^k sur I / $\forall t \in I,\ f(t) = e^{i\theta_1(t)} = e^{i\theta_2(t)}$

alors $\exists p \in \mathbb{Z} / \forall t \in I,\ \theta_2(t) = \theta_1(t) + 2p\pi$

$\forall t \in I,\ f'(t) = i\theta_1'(t)\underbrace{e^{i\theta_1(t)}}_{f(t)} = i\theta_2'(t)\underbrace{e^{i\theta_2(t)}}_{f(t)} \Rightarrow \theta_1'(t) = \theta_2'(t)$

$\Rightarrow \theta_2'(t) - \theta_1'(t) = 0 \Rightarrow \theta_2 - \theta_1$ cste sur I

or, $\forall t \in I,\ e^{i\theta_1(t)} = e^{i\theta_2(t)}$ donc $e^{i(\theta_2(t) - \theta_1(t))} = e^{i2\pi}$

donc $\forall t \in I,\ \theta_2(t) - \theta_1(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$

d'où $\exists p \in \mathbb{Z} / \forall t \in I,\ \theta_2(t) = \theta_1(t) + 2p\pi$

th I intervalle, $\begin{cases} g : I \to \mathbb{C} \text{ de classe } C^k\ (k \geq 1) \\ \forall t \in I,\ g(t) \neq 0 \end{cases}$

alors $\exists \begin{cases} e \in C^k(I, \mathbb{R}) \\ \theta \in C^k(I, \mathbb{R}) \end{cases}$ / $\forall t \in I,\ g(t) = e(t)\,e^{i\theta(t)}$

$$e : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto |g(t)| = \sqrt{g(t)\overline{g(t)}} \end{cases}$$

$$\psi : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto g(t)\overline{g}(t) \end{cases} \text{ est de classe } C^k$$

$\psi(I) \in \mathbb{R}^{+*}$ ($g(t) \neq 0$ donc $\overline{g}(t) \neq 0$) et $\begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est C^∞

donc e est $C^k(I)$ par composit°

$e = \sqrt{\ } \circ \psi$

$\begin{cases} \psi : I \to \mathbb{R}^{+*} \\ \sqrt{\ } : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \end{cases}$

$e : I \to \mathbb{R}$

$\forall t \in I,\ e(t) \neq 0,\ \left|\frac{g(t)}{e(t)}\right| = 1$

donc $\exists\, \theta \in C^k(I, \mathbb{R}) / \forall t \in I,\ \frac{g(t)}{e(t)} = e^{i\theta(t)}$

corollaire hyp et ccl du th

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \ln|e(b)| - \ln|e(a)| + i(\theta(b) - \theta(a))$$

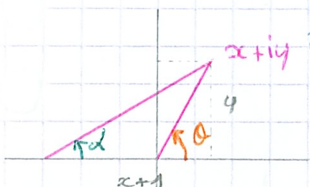
$\forall t \in I,\ g'(t) = e^{i\theta(t)}\left[e'(t) + ie(t)\theta'(t)\right]$

$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{e'(t)}{e(t)} + i\theta'(t)$

$\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \int_a^b \frac{e'(t)}{e(t)}\,dt + i\int_a^b \theta'(t)\,dt = \left[\ln|e(t)|\right]_a^b + i\left[\theta(t)\right]_a^b$

rem : * si $u = x + iy \in \mathbb{C}$ vérifie $\begin{cases} |u| = 1 \\ u \neq -1 \end{cases}$

alors $2\arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)$ est l'argument de u de $]-\pi, \pi[$

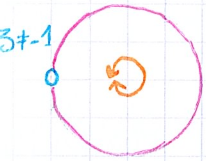


$\theta \in]-\pi, \pi[$, $\exists \alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[/ \theta = 2\alpha$

donc $\frac{\theta}{2} = \alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et $\tan\frac{\theta}{2} = \tan\alpha = \frac{y}{x+1}$ donc $\frac{\theta}{2} = \arctan\frac{y}{x+1}$

$* \quad U = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1 ,\ z \neq -1 \} \qquad \arg : \left| \begin{array}{l} U \longrightarrow i\mathbb{R} \\ x+iy \longmapsto 2 \arctan \dfrac{y}{x+1} \end{array} \right.$



$\theta \in]-\pi, \pi[$

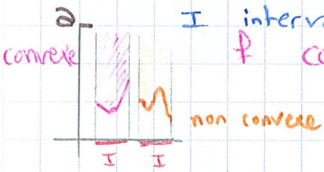
alors $\forall f : I \longrightarrow U$ de classe C^k

$\begin{cases} \theta = \arg \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est } C^k \\ \forall t \in I,\ f(t) = e^{i \arg (f(t))} \end{cases}$

11. convexité

a) I intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

f convexe sur $I \iff D = \{ (x,y) \,/\, x \in I,\ y \geq f(x) \}$ (épigraphe) est une partie convexe du plan affine $\mathbb{R}^2$



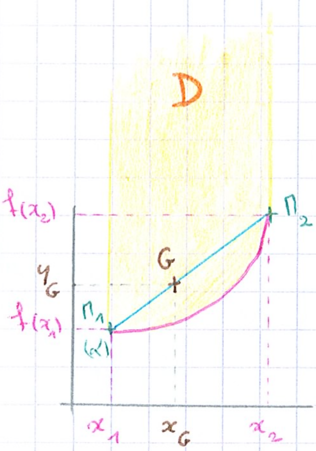
Pp) équivalentes

2) $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+2}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$,
$f\left(\dfrac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha + \beta} \right) \leq \dfrac{\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)}{\alpha + \beta}$

3) $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1]$
$f\big((1-\lambda) x_1 + \lambda x_2 \big) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n,\ \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{+n}$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$
$f\left(\dfrac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \right) \leq \dfrac{\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$

5) $\forall x_0 \in I,\ \varphi_{x_0} : \left| \begin{array}{l} I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \right. \nearrow$



1) $\Rightarrow$ 2) $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ \big(\underbrace{(x_1, f(x_1))}_{M_1}, \underbrace{(x_2, f(x_2))}_{M_2} \big) \in D^2$

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha + \beta \neq 0$, $\underbrace{\text{bary} \{ ((x_1, f(x_1)), \alpha), ((x_2, f(x_2)), \beta) \}}_{G} \in D$

$G = \Big(\underbrace{\dfrac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha + \beta}}_{x_G}, \underbrace{\dfrac{\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)}{\alpha + \beta}}_{y_G} \Big) \in D$

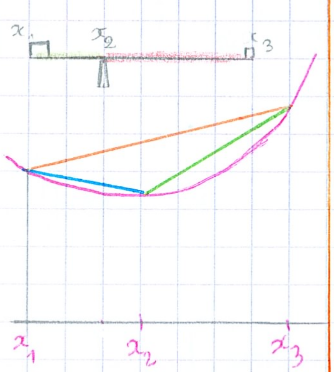
d'où $\dfrac{\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)}{\alpha + \beta} \geq f\left(\dfrac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha + \beta} \right)$

2) $\Rightarrow$ 1) $\forall \big((x_1, y_1), (x_2, y_2) \big) \in D^2$, $\begin{cases} y_1 \geq f(x_1) \\ y_2 \geq f(x_2) \end{cases}$

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+2}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$,
$G = \text{bary} \{ ((x_1, y_1), \alpha), ((x_2, y_2), \beta) \} = \left(\dfrac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha + \beta}, \dfrac{\alpha y_1 + \beta y_2}{\alpha + \beta} \right)$

or, $\dfrac{\alpha y_1 + \beta y_2}{\alpha + \beta} \geq \dfrac{\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)}{\alpha + \beta} \geq f\left(\dfrac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha + \beta} \right)$

donc $\big(((x_1, y_1), \alpha), ((x_2, y_2), \beta) \big) \in D$



3) $\Rightarrow$ 5) soit $x_1 < x_2 < x_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in I^3$

alors $x_2 = \underbrace{\dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}}_{\alpha \quad 1-\lambda} x_1 + \underbrace{\dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}}_{\lambda \quad \beta} x_3 \qquad \alpha + \beta = 1$

3) $\Rightarrow f(x_2) \leq \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$

$x_3 - x_2 = (x_3 - x_1) + (x_1 - x_2)$

$\Rightarrow (x_3 - x_1) f(x_2) \leq (x_3 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3)$

comparaison des pentes : et

$\Rightarrow (x_3 - x_1)\big(f(x_2) - f(x_1) \big) \leq (x_2 - x_1) \big(f(x_3) - f(x_1) \big)$ *

$\Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$

de m̂ : $\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$

J

5) ⇒ 3) $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall (x_1,x_3)\in I^2$, $x_2=(1-\lambda)x_1+\lambda x_3$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \Rightarrow f(x_2)\leq \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)+\left(1-\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)f(x_1)$$

$x_3-x_2 = x_3-(1-\lambda)x_1-\lambda x_3 = (x_3-x_1)(1-\lambda)$

$\lambda = 1-\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} = \frac{-x_1+x_3-x_3+x_2}{x_3-x_1} = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$

$$\Rightarrow f(x_2)\leq \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$$

$$\Rightarrow f((1-\lambda)x_1+\lambda x_3)\leq (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_3)$$

b- stricte convexité

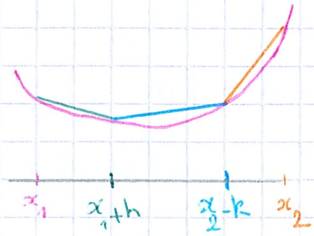
$f: I \to \mathbb{R}$ st^t convexe $\Leftrightarrow$ $\forall (x_1,x_2)\in I^2$, $x_1\neq x_2$
$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}^{+*2}$, $\alpha+\beta\neq 0$

$$f\left(\frac{\alpha x_1+\beta x_2}{\alpha+\beta}\right) < \frac{\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)}{\alpha+\beta}$$

c- fonctions convexes dérivables

$f: I\to\mathbb{R}$, si f est dérivable sur I, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f convexe
(2) f' ↗
(3) $\mathcal{C}_f$ au-dessus de ses tangentes



(1) ⇒ (2) soit $x_1 < x_2$
soit $(k,h)\in\mathbb{R}^2$ / $x_1 < x_1+h < x_2-k < x_2$

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leq \frac{f(x_2-k)-f(x_1+h)}{x_2-k-x_1-h} \leq \frac{f(x_2)-f(x_2-k)}{k}$$

passage à la lim

$$f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

(2) ⇒ (3) équat° de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_1 : $y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$

soit $t: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$

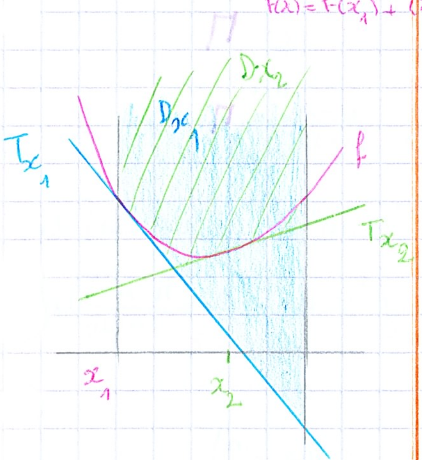
alors $\mathcal{C}_t$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_1

$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f'(c)$

$\forall x\in I$, $f(x)-t(x) = f(x)-f(x_1) - f'(x_1)(x-x_1)$

$\exists c\in[x,x_1]$ / $f(x)-t(x) = (f'(c)-f'(x_1))(x-x_1)$

si $x>x_1$, $c>x_1$ $\quad >0 \quad >0$ donc $f(x)-t(x)>$
si $x<x_1$, $c<x_1$ $\quad <0 \quad <0$ $\quad f(x)-t(x)>$



(3) ⇒ (1) $\forall x\in I$, $D_x = \{M(a,b),\ a\in I \ /\ M$ situé au-dessus de $T\mathcal{C}_f$ en $x\}$
$= \{M(a,b),\ a\in I \ /\ b \geq f'(x)(a-x)+f(x)\}$

par hyp : $D\subset D_x$ donc $D \subset \bigcap_{x\in I} D_x$

récip^t $\forall M(a,b)\in \bigcap_{x\in I} D_x$ on a $a\in I$ et $M\in D_x$
et $b\geq f(a)$
donc $M\in D$

d'où $D=\bigcap_{x\in I} D_x$

or, chaque D_x est convexe donc $\bigcap_{x\in I} D_x$ aussi, donc D aussi
ainsi, f est convexe

conséquences :
si f est 2 fois dérivable sur I

$\forall x\in I$, $f''(x)\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f' ↗ \\ f \text{ convexe } (\mathcal{C}_f \text{ tourne sa concavité vers le haut}) \end{cases}$

$\leq 0 \Rightarrow -f$ convexe

si $\exists x_0\in I$ / f'' s'annule en x_0 en changeant de signe
alors $\mathcal{C}_f$ $\begin{cases}\text{change de concavité en } x_0 \\ \text{traverse sa tangente} \\ \text{présente un pt d'inflexion}\end{cases}$

ex : $f: [0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \sin x$ $\quad$ $-f$ est convexe

tangente en 0 : $y=x$ $\quad$ donc $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin x\leq x$
corde entre 0 et $\frac{\pi}{2}$: $y=\frac{2}{\pi}x$ $\quad$ $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x\leq \sin x$
par stricte convexité :

$$\forall x\in\left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[\quad \frac{2x}{\pi} < \sin x < x$$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan x \geqslant x$

$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1+x$

XVI Formules de Taylor

1. Formule de Taylor avec reste intégral

I intervalle, E de dim finie,

$f \in C^{n+1}(I,E)$, $\forall (a,b) \in I^2$,

$$f(b) = \underbrace{f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}_{\text{polynôme de Taylor}} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \left[\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^b - \int \frac{-(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

dérivat° intégrat° — récurrence

$$= \left[\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + \dots + \frac{(b-t)^2}{2} f''(t) + (b-t) f'(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f'(t)$$

$$= \left[\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + \dots + (b-t) f'(t) + f(t)\right]_a^b$$

$$= f(b) - \left(\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots + (b-a) f'(a) + f(a)\right)$$

rem : chg^t de var pour intégrer entre 0 et 1

on pose $t = a + u(b-a)$ $\quad dt = (b-a)\,du$

$b - t = b - a - u(b-a) = (b-a)(1-u)$

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{(b-a)^n (1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+u(b-a))\,(b-a)\,du$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+u(b-a))\,du$$

2. inégalité de Taylor-Lagrange

$f : I \to E \in C^{n+1}$

$\forall (a,b) \in I^2$, on suppose $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall t \in [ab]$, $\|f^{(n+1)}(t)\| \leqslant M$

alors $$\left\| f(b) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right)\right\| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right\| = \left\| \int_0^1 \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} (1-u)^n f^{n+1}(\overbrace{a+u(b-a)}^{\in [ab]})\,du\right\|$$

$$\leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n M\,du = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

$$\int_0^1 (1-u)^n du = \left[\frac{-(1-u)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

3. Formule de Taylor-Young

$f : I \to E \in C^n$ $\quad a \in I$

$\forall x \in I$, $\quad f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o_a((x-a)^n)$

$$\int_a^x (t-a)^n\,dt = \left[\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

$$\left|\int_a^x |(t-a)^n|\,dt\right| = \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$$

$f \in C^n(I)$ donc $f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a) + o_a(1)$ (f a un $dl_a(n)$)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in [a-\alpha, a+\alpha] \cap I$, $\quad \|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)\| \leqslant \varepsilon$

intégration entre a et x : $\|f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - (x-a) f^{(n)}(a)\| \leqslant \varepsilon |x-a|$

$$\int_a^x (f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a))\,dx = \underbrace{\int_a^x f^{(n)}(x)\,dx}_{[f^{(n-1)}(x)]_a^x} - (x-a) f^{(n)}(a)$$

$$\|f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a) f^{(n-1)}(a) - \frac{(x-a)^2}{2} f^{(n)}(a)\| \leqslant \varepsilon \frac{|x-a|^2}{2}$$

$\vdots$

$$\|f(x) - f(a) - (x-a) f'(a) \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\| \leqslant \varepsilon \frac{|x-a|^n}{n!} \leqslant \varepsilon |x-a|^n$$

XVII Comparaison des fonctions - développements limités

1. en 0

$(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\quad o_0(x^n) + o_0(x^m) = o_0(x^{\min\{n,m\}})$

$\forall x \in [-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$

XVI Formules de Taylor

1. Formule de Taylor avec reste intégral

I intervalle, E de dim finie,
$f \in C^{n+1}(I,E)$, $\forall (a,b) \in I^2$,

$$f(b) = \underbrace{f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}_{\text{polynôme de Taylor}} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$\int_a^b \underbrace{\frac{(b-t)^n}{n!}}_{\text{dérivat}} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\text{intégrat}}\,dt = \left[\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^b - \int \frac{-(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$ récurrence

$$= \left[\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + \dots + \frac{(b-t)^2}{2} f''(t) + (b-t) f'(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f'(t)\,dt$$

$$= \left[\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + \dots + (b-t) f'(t) + f(t)\right]_a^b$$

$$= f(b) - \left(\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots + (b-a) f'(a) + f(a)\right)$$

rem : chg^t de var pour intégrer entre 0 et 1

on pose $t = a + u(b-a)$ $\quad dt = (b-a)du$

$b - t = b - a - u(b-a) = (b-a)(1-u)$

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{(b-a)^n (1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+u(b-a))\,(b-a)\,du$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+u(b-a))\,du$$

2. inégalité de Taylor - Lagrange

$f : I \to E \in C^{n+1}$

$\forall (a,b) \in I^2$, on suppose $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall t \in [ab]$, $\|f^{(n+1)}(t)\| \leqslant M$

alors $$\left\| f(b) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right)\right\| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right\| = \left\| \int_0^1 \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} (1-u)^n f^{(n+1)}(\underbrace{a+u(b-a)}_{\in [ab]})\,du \right\|$$

$$\leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n M\,du = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

$$\int_0^1 (1-u)^n du = \left[\frac{-(1-u)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

3. formule de Taylor - Young

$f : I \to E \in C^n$ $\quad a \in I$

$\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o_a((x-a)^n)$

$$\int_a^x (t-a)^n\,dt = \left[\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

$$\left|\int_a^x |t-a|^n\,dt\right| = \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$$

$f \in C^n(I)$ donc $f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a) + o_a(1)$ (f a un $dl_a(n)$)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in [a-\alpha, a+\alpha] \cap I$, $\|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)\| \leqslant \varepsilon$

intégration entre a et x : $\|f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - (x-a) f^{(n)}(a)\| \leqslant \varepsilon |x-a|$

$$\int_a^x (f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a))\,dx = \underbrace{\int_a^x f^{(n)}(x)\,dx}_{[f^{(n-1)}(x)]_a^x} - (x-a) f^{(n)}(a)$$

$\|f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a) f^{(n-1)}(a) - \frac{(x-a)^2}{2} f^{(n)}(a)\| \leqslant \varepsilon \frac{|x-a|^2}{2}$

⋮

$\|f(x) - f(a) - (x-a) f'(a) \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\| \leqslant \varepsilon \frac{|x-a|^n}{n!} \leqslant \varepsilon |x-a|^n$

XVII Comparaison des fonctions - développements limités

1. en 0

$(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $o_0(x^n) + o_0(x^m) = o_0(x^{\min\{n,m\}})$

$o_0(x^n)\, o_0(x^m) = o_0(x^{n+m})$ $\qquad x^n\, o_0(x^m) = o_0(x^{n+m})$

2. en $+\infty$

$o_{+\infty}(x^n) + o_{+\infty}(x^m) = o_{+\infty}(x^{\max\{n,m\}})$

$o_{+\infty}(x^n)\, o_{+\infty}(x^m) = o_{+\infty}(x^{n+m})$ $\qquad x^n\, o_{+\infty}(x^m) = o_{+\infty}(x^{n+m})$