Espaces préhilbertiens réels - Espaces euclidiens

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

I Formes bilinéaires symétriques

E ev réel,

1. $\varphi : \begin{vmatrix} E\times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \varphi(x,y) \end{vmatrix}$ bilinéaire symétrique $\iff$ $\begin{cases} (1)\ \forall x\in E, \begin{vmatrix} E \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \varphi(x,y)\end{vmatrix} \text{ est une forme linéaire} \\ (2)\ \forall y\in E, \begin{vmatrix} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi(x,y)\end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ (3)\ \forall (x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)\end{cases}$

rem : (1) et (3) $\Rightarrow$ (2) ; on ne démontre que (1) et (3)

2. forme quadratique associée à φ : $\Phi : \begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi(x,x)\end{vmatrix}$

$\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ forme quad $\iff$ $\exists$ une forme linéaire symétrique φ / Φ est la forme quad associée à φ

3. identités de polarisation

$\forall (x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)\right) = \frac{1}{2}\left(-\Phi(x-y) + \Phi(x) + \Phi(y)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\Phi(x+y) - \Phi(x-y)\right)$

rem : permet de vérifier que Φ est une forme quad

$\Phi(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y)$
$= \Phi(x) + 2\varphi(x,y) + \Phi(y)$

notation : $\mathcal{L}_2(E)$: ev des formes bilinéaires sur E
$\mathcal{L}_{2s}(E)$: ss-ev de $\mathcal{L}_2(E)$ des formes bilinéaires symétriques
$Q(E)$: ev des formes quad sur E

$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{2s}(E) \longrightarrow Q(E) \\ \varphi \longmapsto \Phi \end{vmatrix}$ est un morphisme d'ev

II Formes bilinéaires symétriques positives - formes quadratiques positives

1. soient $\varphi \in \mathcal{L}_{2s}(E)$, $\Phi \in Q(E)$ associée,

φ, Φ positives $\iff$ $\forall x\in E,\ \varphi(x,x) = \Phi(x) \geq 0$

φ, Φ définies positives $\iff$ $\forall x \in E,\ x\neq 0 \Rightarrow \varphi(x,x) > 0$ (contrap : $\Phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$)

notations : $\mathcal{L}_{2s}^{+}(E)$, $Q^{+}(E)$ ... positives
$\mathcal{L}_{2s}^{++}$, $Q^{++}(E)$ ... définies positives

(ce ne sont pas des ss-ev car $\varphi \times$ scalaire <0 = scalaire <0)

si $\varphi \in \mathcal{L}_{2s}^{++}(E)$, φ est un produit scalaire

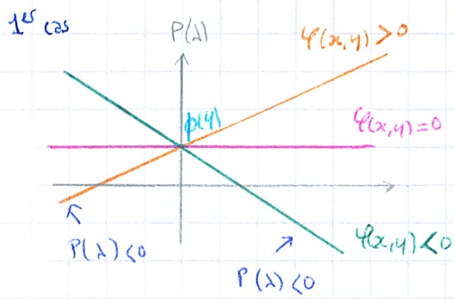
E préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire

E euclidien s'il est préhilbertien et de dim finie

2. inégalité de Cauchy-Schwarz

a. $\varphi \in \mathcal{L}_{2s}^{+}(E)$, $\Phi \in Q(E)$ associée

$\forall (x,y) \in E^2,\quad \varphi(x,y)^2 \leq \Phi(x)\,\Phi(y)$



$P : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \longmapsto \Phi(\lambda x + y)\end{vmatrix}$

$P(\lambda) = \varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 \Phi(x) + 2\lambda\varphi(x,y) + \Phi(y)$

or, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geq 0$ (car φ est positive)

1er cas : $\Phi(x) = 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = 2\lambda\varphi(x,y) + \Phi(y) \geq 0$ donc $\varphi(x,y) = 0$ (schéma)

2ème cas : $\Phi(x) \neq 0$ (donc $\Phi(x) > 0$)

P est un trinôme du 2nd deg qui n'a pas 2 racines réelles distinctes, son discriminant est ≤ 0 : car il est ≥ 0

$\varphi(x,y)^2 - \Phi(x)\Phi(y) \leq 0$

$\Delta < 0$ donc pas de sol. réelle ou une dble et $P(\lambda)$ du signe de λ^2

b. cas d'égalité

$\varphi \in \mathcal{L}_{2s}^{++}$, $\Phi \in Q(E)$ associée,

$\forall (x,y) \in E^2,\quad \varphi(x,y)^2 = \Phi(x)\,\Phi(y) \iff (x,y)$ liée

$(\exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x)$
(x,y) liée

$\Rightarrow$ 1er cas: $\Phi(x) = 0$ donc $x = 0$ donc (x,y) est liée (contient

2ème cas: $\Phi(x) \neq 0$ $(\Phi(x) > 0)$

$\varphi(x,y)^2 - \Phi(x)\Phi(y) = 0$ (discriminant nul)

donc le trinôme a une racine réelle (dble)

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / P(\lambda) = 0$

$\Phi(\lambda x + y) = 0 \Rightarrow \lambda x + y = 0 \Rightarrow (x,y)$ liée $(y = -\lambda x)$

$\Leftarrow$ 1er cas: $x = 0$ $\begin{cases} \Phi(x) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$

2ème cas: $x \neq 0$

$\exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x$

$\varphi(x,y) = \varphi(x, \lambda x) = \lambda \Phi(x)$ donc $\varphi(x,y)^2 = \lambda^2 \Phi(x)^2$

$\Phi(y) = \varphi(y,y) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \Phi(x)$

$\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(x)\lambda^2\Phi(x) = \lambda^2\Phi(x)^2 = \varphi(x,y)^2$

3. inégalité de Minkowski

a. $\varphi \in \mathcal{L}_{2s}^{+}(E)$, $\Phi \in Q(E)$ associée

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \sqrt{\Phi(x+y)} \leq \sqrt{\Phi(x)} + \sqrt{\Phi(y)}$$

$\Leftrightarrow \Phi(x+y) \leq \Phi(x) + \Phi(y) + 2\sqrt{\Phi(x)\Phi(y)}$

$\Leftrightarrow \Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y) \leq 2\sqrt{\Phi(x)\Phi(y)}$ id. de pola.

$\Leftrightarrow \varphi(x,y) \leq \sqrt{\Phi(x)\Phi(y)}$

$\Leftarrow \varphi(x,y)^2 \leq \Phi(x)\Phi(y)$ (tjrs vrai par Cauchy-Schwarz)

b. cas d'égalité

$\varphi \in \mathcal{L}_{2s}^{++}(E)$, $\Phi \in Q(E)$ associée

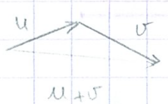
$\forall (x,y) \in E^2, \quad \sqrt{\Phi(x+y)} = \sqrt{\Phi(x)} + \sqrt{\Phi(y)} \Leftrightarrow (x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x)$
colinéaires et de m sens

$\Leftrightarrow \Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y) = 2\sqrt{\Phi(x)\Phi(y)}$

$\Leftrightarrow \varphi(x,y) = \sqrt{\Phi(x)\Phi(y)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y)^2 = \Phi(x)\Phi(y) \\ \varphi(x,y) \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = 0 \\ \varphi(x,y) \geq 0 \end{cases} \right.$ 1er cas d'égal de Cauchy S. ou $\left. \begin{cases} x \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x \\ \varphi(x,y) \geq 0 \end{cases} \right)$ 2ème cas (x,y) liée



$\Leftrightarrow \left(x = 0 \right.$ ou $\left. \begin{cases} x \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x \\ \lambda \underbrace{\varphi(x,x)}_{>0} \geq 0 \end{cases} \right)$ car $\varphi \in \mathcal{L}_{2s}^{++}(E)$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \right.$ ou $\left. \begin{cases} x \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x \end{cases} \right)$

$\Leftrightarrow (x = 0)$ ou $(\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x)$

4 - expression matricielle

E ev de dim finie, de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$\varphi \in \mathcal{L}_{2s}(E)$, $\Phi \in Q(E)$ associée

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$$

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est la matrice de φ exprimée dans la base $\mathcal{B}$

⚠ on n'utilise pas la notat° $\cancel{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)}$, réservée aux endomorphismes

rem: φ symétrique $\Rightarrow \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \ \varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$

$\Rightarrow A$ symétrique

* soient $x \in E$ de coord. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, $y \in E$ de coord. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$

$$\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j$$

$${}^tXAY = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n \\ a_{21} y_1 \\ \vdots \\ a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n \end{pmatrix} = x_1 a_{11} y_1 + x_1 a_{12} y_2 + \dots + x_2 a_{21} y_1 + \dots$$

d'où $\varphi(x,y) = {}^tXAY$ K

$\ast$ $\Phi(x) = \varphi(x,x) = {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{\substack{i\neq j\\1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j$

polynôme homogène de degré 2

réciproquement, si A matrice sym. réelle,

$\begin{vmatrix} E\times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto {}^tXAY \end{vmatrix}$ est une forme bilinéaire sym.

si P polynôme homo de degré 2 :

$P(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_ix_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} c_{ij}x_ix_j$

alors $\Phi : \begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto P(x_1,\dots,x_n) \end{vmatrix}$ est une forme quad.

ex. $n=3$

$P(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 3x_2x_3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2/2 & -1/2 \\ 2/2 & 2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}$: coeff de la ligne 2 colonne 3

conséquence : $\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{2s}(E) \longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ \varphi \longmapsto A \end{vmatrix}$ (ev. des mat. sym. réelles d'ordre n) est un isomorphisme d'ev

↳ si on connaît φ, on connaît A
.... A .... φ

donc $\dim \mathcal{L}_{2s}(E) = \dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$

et $\dim Q(E) = \frac{n(n+1)}{2}$ $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ mat. antisym.

$A\in S_n(\mathbb{R})$: $=\begin{pmatrix} \ast & \ast & \ast \\ & \ast & \ast \\ & & \ast \end{pmatrix}$ $\longleftarrow n \longrightarrow$

$\ast$ sont inconnus
$\ast$ une fois $\ast$ fixés $\ast$ sont connus

il y en a $n+(n-1)+\dots+1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} 0 & \ast & \ast \\ & \ddots & \ast \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n^2+n-2n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

nb de 0

chg^t de base

$\mathcal{B},\mathcal{B}'$ base de E, P mat. de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, $\varphi\in\mathcal{L}_{2s}(E)$

A, A' mat. de φ exprimées ds $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$

$\forall (x,y)\in E^2$, X, Y, X', Y' coord. ds $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$

on a les anciennes coord. en fct des nouvelles : $\begin{cases} X = PX' \\ Y = PY' \end{cases}$

$\varphi(x,y) = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'({}^tPAP)Y'$
$= {}^tX'A'Y'$

donc $A' = {}^tPAP$ rappel : pr les endom : $A' = P^{-1}AP$

$\ast$ ‖ rang φ = rang A (ne dépend pas de la base)
car $A' = {}^tPAP$ donc $\mathrm{rg}\,A' = \mathrm{rg}({}^tPAP) = \mathrm{rg}\,A$

‖ φ non dégénérée si $\mathrm{rg}\,\varphi = \dim E$

III Espaces préhilbertiens

1 - $\longrightarrow$ donc E muni d'un produit scalaire, noté $\varphi(x,y) = (x|y)$

ex. de prod. scalaires : $\ast$ $\mathbb{R}^n$ produit scalaire canonique

$(x|y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

$\ast$ $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ $(f|g) = \int_{[0,1]} fg$

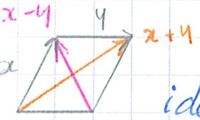
$\ast$ $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(A|B) = \mathrm{trace}({}^tAB)$

- $(B|A) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \mathrm{tr}({}^t({}^tBA)) = \mathrm{tr}({}^tA\,{}^t({}^tB)) = \mathrm{tr}({}^tAB) = (A|B)$
- linéarité par rapport au 2ème vecteur donc bilinéarité par sym
- $C = {}^tAA$, $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}a_{ji}$ $(A|A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}}_{\mathrm{tr}} \underbrace{a_{ij}^2}_{C} \geq 0$

$(A|A) = 0 \Rightarrow \forall (i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\ a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0$

2. norme euclidienne Φ forme quad. associée à φ,
norme eucli associée à φ : $\left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\Phi(x)} \end{array}\right.$

3. $\forall (x,y) \in E^2$, $(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(-\|x-y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (1) (2)



$= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (3)

identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (1) − (2)

4. topologie :
E ev normé préhilbertien,
E est hilbertien s'il est complet

Pp 1) $\left| \begin{array}{l} E\times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto (x|y) \end{array}\right.$ est continue (Cauchy - Schwarz)

2) $\left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x\| \end{array}\right.$ est continue (1-lips)

3) Les espaces euclidiens sont hilbertiens

4) Dans un e. euclidien, les compacts sont les fermés bornés
en partic. la sphère unité : $\{x \in E / \|x\| = 1\}$

5. orthogonalité

- $(x,y) \in E^2$ x et y orthogonaux $\Longleftrightarrow$ $(x|y) = 0$ on note $x \perp y$
- famille orthogonale :
$(u_i)_{i\in I}$ / $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Longrightarrow u_i \perp u_j$
- famille orthonormale :
$(u_i)_{i\in I}$ / $\begin{cases} \forall (i,j) \in I^2, & i\neq j \Longrightarrow u_i \perp u_j \\ \forall i \in I, & \|u_i\| = 1 \end{cases}$

Pp soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale, sans vecteur nul

1) $\forall (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathrm{Vect}(x_i, 1\leq i\leq n) \\ \forall i \in \{1,\dots,n\}, \ \alpha_i = \dfrac{(x_i|x)}{(x_i|x_i)} \end{cases}$

$\Rightarrow$ * x est combi lin. de $x_1, \dots, x_n$
* soit $i_0 \in \{1,\dots,n\}$,
$(x_{i_0}|x) = (x_{i_0} | \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_{i_0}|x_i) = \alpha_{i_0} \underbrace{(x_{i_0}|x_{i_0})}_{\neq 0}$

(x_i) orthogonale : $(x_{i_0}|x_i) = 0$ $i_0 \neq i$

$\Leftarrow$ $\exists (\beta_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ / $x = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ (combi lin)

soit $i_0 \in \{1,\dots,n\}$, $(x_{i_0}|x) = (x_{i_0} | \sum_{i=1}^n \beta_i x_i) = \beta_{i_0}(x_{i_0}|x_{i_0})$
donc $\beta_i = \alpha_i$
donc $\underline{x = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i|x)}{(x_i|x_i)} x_i}$

2) $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre
$\forall (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x = 0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\underline{\alpha_i} = \frac{(x_i|0)}{(x_i|x_i)} \underline{= 0}$

* th de Pythagore : $\forall (x,y) \in E^2$, $x \perp y \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

généralisat° : $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ orthogonale $\Longrightarrow \left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$

$\underline{\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \middle| \sum_{j=1}^n x_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i|x_j) = \sum_{i=1}^n (x_i|x_i)$
$\underline{= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2}$

$(x_i|x_j) = 0$ si $i \neq j$

⚠ pas de réciproque : $x_1 = x$, $x_2 = x$, $x_3 = -\frac{1}{2}x$ $x \neq 0$

$$\begin{cases} \|x_1+x_2+x_3\|^2 = \|\tfrac{3}{2}x\|^2 = \tfrac{9}{4}\|x\|^2 \\ \|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|x_3\|^2 = (1+1+\tfrac{1}{4})\|x\|^2 = \tfrac{9}{4}\|x\|^2 \end{cases}$$

mais (x_1,x_2,x_3) n'est pas orthogonale :

$$\|x_1+x_2+x_3\|^2 = \|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|x_3\|^2 + 2\Big(\overbrace{(x_1|x_2)}^{1}+\overbrace{(x_2|x_3)}^{-1/2}+\overbrace{(x_3|x_1)}^{-1/2}\Big)$$

orthonormalisation de Schmidt

E eu préhilbertien réel, $n\in\mathbb{N}^*$

$(u_1,\dots,u_n)$ famille libre de E,

$\exists!$ famille $(e_1,\dots,e_n)$ de E / $\begin{cases} (e_1,\dots,e_n) \text{ est orthonormale} \\ \forall i\in\{1,\dots,n\},\ \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_i) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i) \\ \dots\dots\dots\dots \quad (u_i|e_i) > 0 \end{cases}$

(il s'agit d'un algorithme)

e_1 : * construct° :

on conserve la dir du 1er vect. $v_1 = u_1$

on le norme $e_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1$

$\mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Vect}(v_1)$

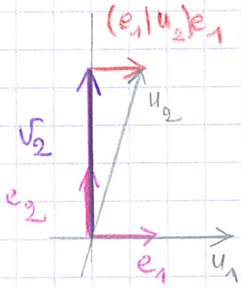
$\begin{cases} \mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Vect}(e_1) \\ (u_1|e_1) = (u_1|\frac{1}{\|v_1\|}v_1) = \frac{1}{\|v_1\|} > 0 \\ (e_1) \text{ orthonormale} \end{cases}$

* unicité : soit $e'_1\in E$ / $\begin{cases} \mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Vect}(e'_1) = \mathrm{Vect}(e_1) \\ (u_1|e'_1) > 0 \\ \|e'_1\| = 1 \end{cases}$

alors, $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ / $e'_1 = \lambda e_1$ $\qquad \|e'_1\| = |\lambda|\,\|e_1\| = |\lambda| = 1$

donc $e'_1 = e_1$ ou $-e_1$ $\qquad (u_1|e'_1) = (u_1|v_1)\frac{1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\|v_1\|} > 0$

$(u_1|-e_1) = -\frac{1}{\|v_1\|} < 0$ $\qquad$ donc $e'_1 = e_1$



e_2 : * $v_2 = u_2 - (e_1|u_2)e_1$

on rend le 2ème vect. ⊥ au 1er

$\mathrm{Vect}(e_1,v_2) = \mathrm{Vect}(e_1,u_2) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$

• $(e_1|u_2)e_1 \in \mathrm{Vect}(u_1)$ donc $v_2 \notin \mathrm{Vect}(u_1)$ $\quad$ ($u_2\notin\mathrm{Vect}(u_1)$)

donc $\mathrm{Vect}(e_1,v_2) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$

• $e_2 = \frac{1}{\|v_2\|}v_2$ $\qquad$ donc $\begin{cases} \mathrm{Vect}(e_1,e_2) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2) \\ \|e_2\| = 1 \end{cases}$

$(e_1|e_2) = \frac{1}{\|v_2\|}(e_1|v_2) = \frac{1}{\|v_2\|}(e_1|(u_2-(e_1|u_2)e_1))$

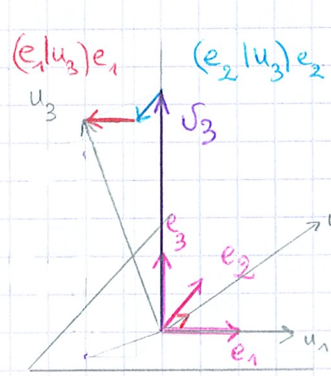
$= \frac{1}{\|v_2\|}\big((e_1|u_2) - (e_1|u_2)\big) = 0$

on peut rajouter $-(e_1|u_2)e_1$ car $(e_1|u_2)e_1 \perp u_2 - (e_1|u_2)e_1$

$(u_2|e_2) = \frac{1}{\|v_2\|}(u_2|u_2-(e_1|u_2)e_1) = \frac{1}{\|v_2\|}(u_2-(e_1|u_2)e_1|u_2-(e_1|u_2)e_1)$

$= \frac{1}{\|v_2\|}\|u_2-(e_1|u_2)e_1\|^2 = \frac{1}{\|v_2\|}\|v_2\|^2 = \|v_2\| > 0$

* soit e'_2 / $\begin{cases} (e_1,e'_2) \text{ orthonormale} \\ \mathrm{Vect}(e_1,e_2) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2) = \mathrm{Vect}(e_1,e'_2) \\ (u_1|e'_2) > 0, \quad (u_1|e_2) > 0 \end{cases}$



$e'_2 \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ $\qquad$ ((e_1,e_2) orthogonale)

$e'_2 = \frac{(e_1|e'_2)}{\|e_1\|^2}e_1 + \frac{(e_2|e'_2)}{\|e_2\|^2}e_2 = 0 + (e_2|e'_2)e_2 = \lambda e_2$

$\|e_2\| = \|e'_2\| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ ou -1

$e'_2 = e_2 \Rightarrow (u_2|e'_2) = (u_2|e_2) > 0$

$e'_2 = -e_2 \Rightarrow (u_2|e'_2) = -(u_2|e_2) < 0$ $\qquad$ donc $e'_2 = e_2$

e_{k+1} : on suppose $e_1,\dots,e_k$ construits, uniques

* $v_{k+1} = u_{k+1} - (e_1|u_{k+1})e_1 - (e_2|u_{k+1})e_2 - \dots - (e_k|u_{k+1})e_k$
$= u_{k+1} - w_{k+1}$

• $w_{k+1} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$

donc $v_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$

donc $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k,v_{k+1}) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k,u_{k+1})$

• $e_{k+1} = \frac{1}{\|v_{k+1}\|}v_{k+1}$

donc $\begin{cases} \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k,e_{k+1}) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_{k+1}) \\ \|e_{k+1}\| = 1 \end{cases}$

$(e_1|e_{k+1}) = \frac{1}{\|v_{k+1}\|}(e_1|v_{k+1})$

$$(e_1|e_{k+1}) = \frac{1}{\|v_{k+1}\|}\left(e_1 | u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(e_i|u_{k+1})e_i\right) = \frac{1}{\|v_{k+1}\|}\left((e_1|u_{k+1}) - \sum_{i=1}^{k}(e_i|u_{k+1})(e_1|e_i)\right)$$

$$= \frac{1}{\|v_{k+1}\|}\left((e_1|u_{k+1}) - (e_1|u_{k+1})\right) = 0$$

de m̂, $(e_2|e_{k+1}) = (e_3|e_{k+1}) = \dots = (e_k|e_{k+1}) = 0$

$$(u_{k+1}|e_{k+1}) = \frac{1}{\|v_{k+1}\|}(u_{k+1}|v_{k+1}) = \frac{1}{\|v_{k+1}\|}(u_{k+1} - w_{k+1}|v_{k+1})$$

$$= \frac{1}{\|v_{k+1}\|}\|v_{k+1}\|^2 = \|v_{k+1}\| > 0$$

* soit e'_{k+1} / $\begin{cases}(e_1,\dots,e_k,e'_{k+1}) \text{ orthonormale} \\ \text{Vect}(e_1,\dots,e_k,e'_{k+1}) = \text{Vect}(e_1,\dots,e_{k+1}) \\ (u_{k+1}|e'_{k+1}) > 0\end{cases}$

$e'_{k+1} \in \text{Vect}(e_1,\dots,e_{k+1})$

$$e'_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}\frac{(e_i|e'_{k+1})}{(e_i|e_i)}e_i = \sum_{i=1}^{k+1}(e_i|e'_{k+1})e_i$$

$$= (e_{k+1}|e'_{k+1})e_{k+1} = \lambda e_{k+1}$$

$\|e'_{k+1}\| = \|e_{k+1}\| = 1$

$e'_{k+1} = e_{k+1}$ ou $-e_{k+1}$

si $e'_{k+1} = -e_{k+1}$, $(u_{k+1}|e'_{k+1}) = -(u_{k+1}|e_{k+1}) < 0$ impossible

donc $e'_{k+1} = e_{k+1}$

IV Espaces euclidiens

E ev euclidien

th
- Toute famille orthonormale de E peut être complétée en base orthonormée
- E possède une base orthonormée

- $(e_1,\dots,e_r)$ famille orthonormée de E, base incomplète orthon. de Schmidt :
  - $e_1,\dots,e_r$ ne changent pas (déjà orthogonaux, de norme 1)
  - $u_{r+1},\dots,u_n$ " se changent " en $e_{r+1},\dots,e_n$
  - donc $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthon de E
- $\emptyset$ est une famille orthon, complétée en base de E

1 - expression analytique

$\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ base orthon., $(x,y)\in E^2$ de coord. $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$

* $x \in \text{Vect}(e_1,\dots,e_n)$, $x = \sum_{i=1}^{n}\frac{(e_i|x)}{(e_i|e_i)}e_i = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$
$x_i = (e_i|x)$

* $(x|y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(e_i|e_j) = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

* matrice du prod. sca exprimée ds $\mathcal{B}$: $A = \left((e_i|e_j)\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} = I_n$

* $\|x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_ie_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2$

$= (x|x) = {}^tXAX = {}^tXX$ $(A = I_n)$

* $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

* matrice d'un endomorphisme : $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c|c} & \text{coord. de } u(e_1) \quad u(e_j) \quad u(e_n) \\ \hline \text{sur la base } e_1, e_2, \dots, e_n & \begin{pmatrix}(e_1|u(e_1)) & (e_1|u(e_j)) & \dots \\ \vdots & (e_i|u(e_j)) & \vdots \\ (e_n|u(e_1)) & \dots & \dots\end{pmatrix}\end{array}$$

$u(e_1) = (e_1|u(e_1))e_1 + (e_2|u(e_1))e_2 + \dots + (e_n|u(e_1))e_n$

$$\text{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n}(e_i|u(e_i))$$

* $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, de son prod. sca. canonique

$\begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto X\end{vmatrix}$ est un isomorphisme d'ev euclidiens :

pour calculer $(x|y)$, on peut le faire sur les vecteurs, ou sur les coord.

K

2. isomorphisme avec le dual

$\forall x \in E$, $\varphi_x : \begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto (x|y) \end{vmatrix}$ est une forme linéaire : $\varphi_x \in E^*$

$\Phi : \begin{vmatrix} E \longrightarrow E^* \\ x \longmapsto \varphi_x \end{vmatrix}$ est un isomorphisme

- $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

  $\forall y \in E$, $(\lambda x_1 + \mu x_2 | y) = \lambda (x_1|y) + \mu (x_2|y)$

  $\varphi_{\lambda x_1 + \mu x_2}(y) = \lambda \varphi_{x_1}(y) + \mu \varphi_{x_2}(y) = (\lambda \varphi_{x_1} + \mu \varphi_{x_2})(y)$

  donc $\varphi_{\lambda x_1 + \mu x_2} = \lambda \varphi_{x_1} + \mu \varphi_{x_2}$

  $\Phi(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \Phi(x_1) + \mu \Phi(x_2)$

  donc $\Phi \in \mathcal{L}(E, E^*)$

- $* \forall x \in E$, $x \in \operatorname{Ker} \Phi \Rightarrow \varphi_x = 0$

  $\Rightarrow \forall y \in E$, $\varphi_x(y) = 0 = (x|y)$

  pour $y = x$: $(x|x) = 0$

  $\Rightarrow \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ *

* récip : 0 est tjrs ds le noyau

donc $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$

donc Φ est injective

* $\dim E^* = \dim E$ donc Φ injective $\Leftrightarrow$ Φ surjective

ainsi Φ est bijective

donc $\forall \alpha \in E^*$, $\exists x \in E / \forall y \in E$, $\alpha(y) = (x|y)$

V Orthogonalité

E préhilb réel

a. orthogonal d'une partie

$A \subset E$, orthogonal de A : $A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A, x \perp y\}$

Pp 1) $A^\perp$ est un ss ev de E

$A^\perp = \bigcap_{y \in A} \underbrace{\operatorname{Ker} \varphi_y}_{\text{ss-ev}}$ intersect° de ssev, est un ssev

2) $E^\perp = \{0\}$

$x \in E^\perp \Leftrightarrow \forall y \in E$, $x \perp y$

$\Rightarrow x \perp x \Rightarrow (x|x) = \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

3) $\emptyset^\perp = \{0\}^\perp = E$

4) si $A \subset B \subset E$ alors $B^\perp \subset A^\perp$

$A \subset B \Rightarrow \{\varphi_y / y \in A\} \subset \{\varphi_y / y \in B\}$ ss ev de E^*

ss evs de E $\Rightarrow \{\operatorname{Ker} \varphi_y / y \in A\} \subset \{\operatorname{Ker} \varphi_y / y \in B\}$ ss evs de ss ev de E

$\Rightarrow \bigcap_{y \in A} \operatorname{Ker} \varphi_y \supset \bigcap_{y \in B} \operatorname{Ker} \varphi_y$

5) $A \subset (A^\perp)^\perp$

$\forall x \in A$ $(\forall y \in A^\perp = B$, $(x|y) = 0)$

$\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \perp y$

$\forall x \in A$, $x \in B^\perp = (A^\perp)^\perp$

b. sous-espaces orthogonaux

F_1, F_2 ss ev de E

F_1, F_2 orthogonaux : $\forall (x, y) \in F_1 \times F_2$, $x \perp y$

on note $F_1 \perp F_2$

Pp 1) $F_1 \perp F_2 \Leftrightarrow F_1 \subset F_2^\perp \Leftrightarrow F_2 \subset F_1^\perp$

$F_1 \perp F_2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in F_1 \times F_2$, $x \perp y$

$\Leftrightarrow \forall x \in F_1$, $(\forall y \in F_2$, $x \perp y)$.

$\Leftrightarrow \forall x \in F_1$, $x \in F_2^\perp$ $\quad F_1 \subset F_2^\perp$

2) si $F_1 \perp F_2$ alors $F_1 \oplus F_2$

$\forall x \in F_1 \cap F_2$, $x \in F_1$ et $x \in F_2$

donc $x \perp x$: $(x|x) = 0 = \|x\|^2 \Rightarrow x = 0$ donc $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

$F_1, \dots, F_r$ ss-ev de E,

3) $F_1, \dots, F_r$ orthogonaux $\Leftrightarrow$ $F_1, \dots, F_r$ 2 à 2 orthogonaux

dans ce cas, $F_1 \oplus F_2 \dots \oplus F_r$

$F_1 \perp F_2 \Rightarrow \underline{F_1 \oplus F_2}$

$\begin{cases} F_1 \perp F_3 \\ F_2 \perp F_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 \subset F_3^\perp \\ F_2 \subset F_3^\perp \end{cases} \Rightarrow (F_1 + F_2) \subset F_3^\perp$

$\Rightarrow (F_1 + F_2) \perp F_3$

$\Rightarrow \underline{(F_1 + F_2) \oplus F_3}$

$\begin{cases} F_1 \perp F_i \\ F_2 \perp F_i \\ \vdots \\ F_{i-1} \perp F_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 \subset F_i^\perp \\ \vdots \\ F_{i-1} \subset F_i^\perp \end{cases} \Rightarrow (F_1 + \dots + F_{i-1}) \subset F_i^\perp$

$\Rightarrow (F_1 + \dots + F_{i-1}) \perp F_i$

$\Rightarrow \underline{(F_1 + \dots + F_{i-1}) \oplus F_i}$

rem : F ss-ev de E, $F \subset (F^\perp)^\perp$

$F \oplus F^\perp$

c- supplémentaire orthogonal

F ss-ev de E,

F possède un supplémentaire orthogonal $\Leftrightarrow$ $F \oplus F^\perp = E$

($\Leftrightarrow$ $F + F^\perp = E$)

Pp 1) si $\exists$ G ss-ev de E / $\begin{cases} F + G = E \\ F \perp G \end{cases}$ alors F possède un suppl. orthog

2) si F possède un suppl. orthog., alors $F^\perp$ aussi

et $(F^\perp)^\perp = F$

3) - - - - - - - - - - - - - - alors F est fermé (pas de récip)

1) $\begin{cases} F + G = E \\ F \perp G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F + G = E \\ G \subset F^\perp \end{cases} \Rightarrow (F + G) \subset (F + F^\perp)$

$\Rightarrow E \subset (F + F^\perp)$

or E est le plus grand : $\underline{E = F + F^\perp}$

or $\underline{F \oplus F^\perp}$ donc $E = F \oplus F^\perp$ (et $F^\perp = G$)

2) donc $\underset{G}{F} \oplus \underset{F}{F^\perp} = E$ donc $\begin{cases} \exists F / F \perp (F^\perp) \\ \overset{G}{F} + F^\perp = E \end{cases}$

donc $F^\perp$ possède un suppl. orthog : F donc $\underline{(F^\perp)^\perp = F}$

3) $\forall x \in E$, $\varphi_x : \begin{array}{|l} E \to \mathbb{R} \\ y \mapsto (x|y) \end{array}$ est continue

car $|\varphi_x(y)| \leq \|x\| \|y\|$ Cauchy Schwarz

$\forall x \in F^\perp$,

$y \in \operatorname{Ker} \varphi_x \Leftrightarrow (x|y) = 0$

$\Leftrightarrow x \perp y$

$\Leftrightarrow y \in (F^\perp)^\perp$

donc $\underline{\operatorname{Ker} \varphi_x \text{ est un fermé}}$ (noyau d'une appli continue)

or, $F = (F^\perp)^\perp = \bigcap_{x \in F^\perp} \operatorname{Ker} \varphi_x$: fermé c' intersect de fermés

pas de récip. ex : $E = \mathbb{R}[X]$ $(P|Q) = \int_{[0,1]} PQ$

$F = \{P / P(0) = 0\} = \operatorname{Ker} \varphi$ où $\varphi : \begin{array}{|l} E \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0) \end{array}$ $\varphi \neq 0$, $\varphi \in E^*$

F fermé c' noyau de φ, continue

$Q \in F^\perp \Rightarrow \forall P \in F$, $(P|Q) = 0$

$\Rightarrow \forall P \in F$, $\int_{[0,1]} PQ = 0$

$\Rightarrow \int_{[0,1]} XQ^2 = 0$ $\forall Q \in E$, $XQ \in F$

$\Rightarrow \int_0^1 \underbrace{x\, Q(x)^2}_{\text{continue positive}} dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1], x Q^2(x) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in]0,1], Q(x) = 0$

$\Rightarrow Q = 0$

donc $F^\perp = \{0\}$

donc F fermé, mais $\underline{(F^\perp)^\perp} = \{0\}^\perp = E \neq \underline{F}$

rem : E euclidien

en dim finie, $\forall$ ss-ev de E possède un suppl. orthog

$(e_1, \dots, e_r)$ base orthon. de F, ss-ev de E,

complétée en base orthon. de E : $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$

$G = \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$

$\begin{cases} F + G = E \\ F \perp G \end{cases}$ donc F possède un suppl. orthog

et $\underline{F^\perp = G}$

d- cas d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

E euclidien

F ss-ev de E de dim finie,
$(e_1, \dots, e_r)$ base orthon. de F,

$$p : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \sum_{i=1}^{r} (e_i|x)e_i \end{array}$$

1) p est linéaire
2) $\mathrm{Im}\, p \subset F$
3) $\forall x \in F,\ p(x) = x$ donc $F \subset \mathrm{Im}\, p$
donc $F = \mathrm{Im}\, p$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{r} (e_i|x)e_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{(e_i|x)}{\underbrace{(e_i|e_i)}_{\|e_i\|^2 = 1}} e_i = x$$

4) $p \circ p = p$ $\quad$ p projecteur
5) $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E \implies F \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$
6) $\forall x \in F,\ \forall y \in \mathrm{Ker}\, p \quad x \perp y$
donc $\mathrm{Ker}\, p = F^\perp$
(p project° orthog sur F)

$p(y) = 0 \iff \sum_{i=1}^{r} (e_i|y)e_i = 0$ $\quad$ $\forall i \in \{1, \dots, r\},\ (e_i|y) = 0$
$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r,\ (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r | y) = 0$
$y \in F^\perp$

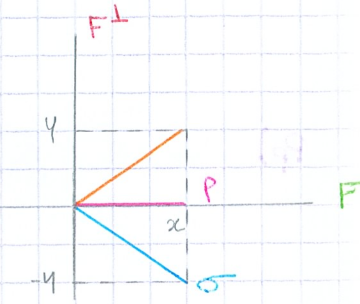
d'où $\forall$ ss-ev de dim finie possède un suppl. orthg.

F ssev de dim finie, p project° orthog sur F
σ symétrie orthog / F

alors $F \oplus F^\perp = E$

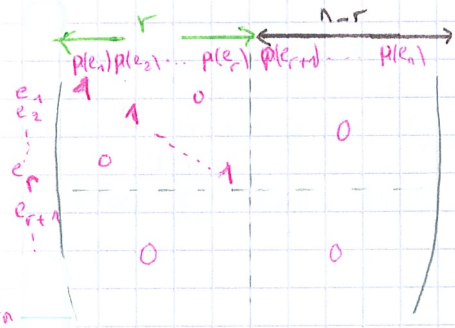
$p(x + y) = x$ $\qquad \sigma = 2p - I$

$\sigma(x + y) = x - y$ $\qquad p = \frac{1}{2}\sigma + I$



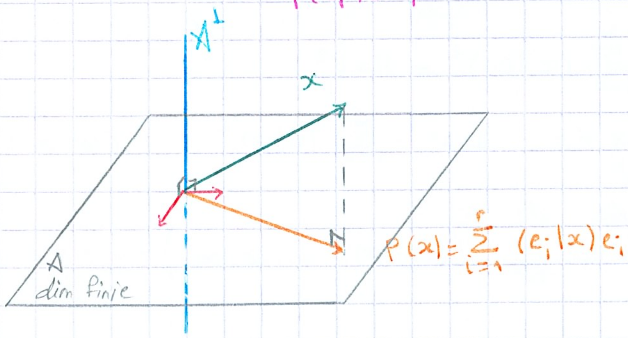
$p \in \mathcal{L}(E)$, E de dim finie
p project° orthog $\iff \exists$ une base orthon. de E /

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, p = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$



p proj. orthog $\quad \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$ $\quad (e_1, \dots, e_r)$ base orthon de $\mathrm{Im}\, p$
$\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$ $\quad (e_{r+1}, \dots, e_n)$ ------- $\mathrm{Ker}\, p$
$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ bon de E

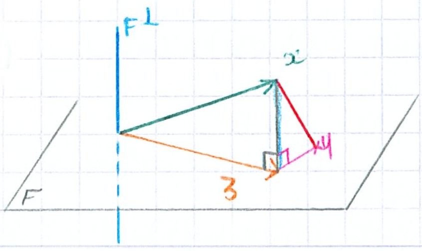
$p(e_1) = e_1$ $\qquad p(e_{r+1}) = 0$
$p(e_2) = e_2$
$\vdots$
$p(e_r) = e_r$



on sait : - orthogonaliser
- projeter

e- distance à un sous-espace

A ss-ev $\neq \emptyset$ de E, $x \in E$, $\quad d(x, A) = \inf\{\|x - y\| \,/\, y \in A\}$
si F ss-ev de E de dim finie
alors $\forall x \in E$, $\begin{array}{l} F \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \|x - y\| \end{array}$ atteint son minimum $d(x, F)$ en un pt unique qui est le projeté de x sur F



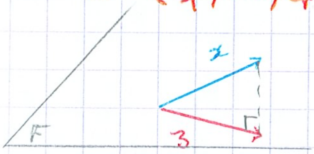
soit z le projeté orth. de x sur F
$\forall y \in F,\ y - z \in F$, $\quad x - z \in F^\perp$
Pythagore : $\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 = \|x - y\|^2$
donc $\|x - z\|^2 \leq \|y - x\|^2 \implies \|x - z\| \leq \|y - x\|$
donc $d(x, F) = \|x - z\|$ $\quad$ minimum = inf

et $\|x-z\|^2 = \|y-x\|^2 \Rightarrow \|y-z\|^2 = 0 \Rightarrow y = z$

rem : * $\forall y \in F$, $d(x,F)^2 + \|y-z\|^2 = \|x-y\|^2$
* pour $y=0$, $d(x,F)^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$

f- inégalité de Bessel

si $(e_1, \dots, e_r)$ famille orthonormée de E alors $\forall x \in E$, $\sum_{i=1}^{r} (e_i|x)^2 \leqslant \|x\|^2$



$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, z proj. orth. de x sur F : $z = \sum_{i=1}^{r} (e_i|x) e_i$

$e_i^2 = \|e_i\|^2 = 1$

$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{r} (e_i|x)^2$ or $\|x\|^2 = d(x,F)^2 + \|z\|^2 \geqslant \|z\|^2 = \sum_{i=1}^{r} (e_i|x)^2$

g- égalité de Parseval

$(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ famille orthonormée de E

$\forall x \in E$, la série de terme général $(e_i|x)^2$ converge

et $\sum_{i=0}^{\infty} (e_i|x)^2 \leqslant \|x\|^2$

$\sum (e_i|x)^2$ est une série à termes positifs de sommes partielles bornées (Bessel) : $\forall r \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{r} (e_i|x)^2 \leqslant \|x\|^2$

donc $\sum (e_i|x)^2$ CV et $\sum_{i=0}^{\infty} (e_i|x)^2 \leqslant \|x\|^2$

Pp) $\forall x \in E$, $\sum_{i=0}^{\infty} (e_i|x)^2 = \|x\|^2 \iff x \in \overline{\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in\mathbb{N}})}$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} (e_i|x)^2 < \varepsilon$ (reste d'ordre n_0 qui CV vers 0 car la série CV)

$0 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{i=0}^{n_0} (e_i|x)^2 < \varepsilon$, z proj. orth. de x sur $F_{n_0} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n_0})$

$z = \sum_{i=0}^{n_0} (e_i|x) e_i$

$0 \leqslant \|x\|^2 - \|z\|^2 < \varepsilon$

rem $0 \leqslant d(x, F_{n_0})^2 < \varepsilon$

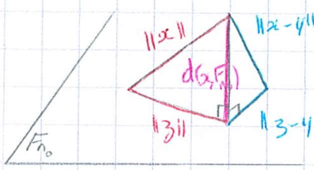
$0 \leqslant d(x, \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\mathbb{N}})^2 < \varepsilon$

donc $d(x, \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in\mathbb{N}})) = 0$ d'où $x \in \overline{\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in\mathbb{N}})}$

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in\mathbb{N}})$ / $\|x-y\| < \varepsilon$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists y \in \underbrace{\mathrm{Vect}((e_i)_{0\leqslant i \leqslant n_0})}_{F_{n_0}}$ z proj. orth. de x sur F_{n_0}

y n'est pas le proj. orth ce dernier est "mieux"



$\varepsilon^2 \geqslant \|x-y\|^2 \geqslant d(x, F_{n_0})^2 = \|x\|^2 - \|z\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=0}^{n_0} (x|e_i)^2$

$\sum_{i=0}^{n_0} (x|e_i)^2 \geqslant \|x\|^2 - \varepsilon^2$

$\|x\|^2 \geqslant \sum_{i=0}^{\infty} (x|e_i)^2 \geqslant \sum_{i=0}^{n_0} (x|e_i)^2 \geqslant \|x\|^2 - \varepsilon^2$

donc $\sum_{i=0}^{\infty} (x|e_i)^2 = \|x\|^2$

cas partic. si $E = \overline{\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in\mathbb{N}})}$ alors $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (e_i|x)^2$ (car $x \in E$)

généralisat° : $\mathbb{Z}$ à la place de $\mathbb{N}$

$(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ famille orthonormée de E

$\forall x \in E$, $(x|e_0)^2 + \sum_{\mathbb{N}^*} \left((e_{-i}|x)^2 + (e_i|x)^2 \right)$ converge

VI Endomorphisme adjoint

E ev euclidien

$\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists !\, u^* \in \mathcal{L}(E)$ / $\forall (x,y) \in E^2$, $(x|u(y)) = (u^*(x)|y)$

endom. adjoint de E

$\forall x \in E$, $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ y \mapsto (x|u(y)) \end{array}$ est une forme linéaire

p.140 dans E euclidien, $\exists z \in E$, unique / $\forall y \in E$, $(x|u(y)) = (z|y)$

donc $u^*(x) = z$

on a défini $u^* : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto z \end{array}$ unique / $\forall (x,y) \in E^2$, $(x|u(y)) = (u^*(x)|y)$

u^* est linéaire : $\forall (x_1,x_2) \in E^2$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$\forall y \in E$, $(ax_1 + bx_2 | u(y)) = (u^*(ax_1+bx_2)|y)$

$= a(x_1|u(y)) + b(x_2|u(y)) = a(u^*(x_1)|y) + b(u^*(x_2)|y)$

$= (a u^*(x_1) + b u^*(x_2) | y)$

$\forall y \in E, \ (u^*(ax_1+bx_2)|y) = \underline{a u^*(x_1) + b u^*(x_2)}$

rem : en dim infinie, il n'y a pas nécessairement d'adjoint

Pp 1) si $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ base orthon. de } E \\ u \in \mathcal{L}(E) \\ M = \text{mat}_{\mathcal{B}} u \end{cases}$ alors $\text{mat}_{\mathcal{B}} u^* = {}^tM$

$M = \text{mat}_{\mathcal{B}} u, \ N = \text{mat}_{\mathcal{B}} u^*$

$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad {}^tX I_n (MY) = {}^t(NX) I_n Y \quad (x|u(y)) = (u^*(x)|y)$

$\Leftrightarrow {}^tXMY = {}^tX\,{}^tNY \Leftrightarrow {}^tXM = {}^tX\,{}^tN \Leftrightarrow M = {}^tN \Leftrightarrow \underline{N = {}^tM}$

2) $\theta \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto u^* \end{array}\right.$ est un automorphisme involutif d'ev

θ linéaire bijective : $\mathcal{L}(E) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{t} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathcal{L}(E)$

$u \longmapsto \text{mat}_{\mathcal{B}} u = M \longrightarrow {}^tM$

$\underline{\theta = \varphi^{-1} \circ t \circ \varphi}$ donc θ est linéaire, bijective

θ involutive : $\theta \circ \theta = \varphi^{-1} \circ t \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ t \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ t(t\varphi) = \underline{Id_{\mathcal{L}(E)}}$

3) $Id_E^* = Id_E$

4) $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

$(u \circ v)^* = \theta(u \circ v) = \varphi^{-1} \circ t \circ \varphi(u \circ v) = \varphi^{-1} \circ {}^t(\varphi(u) \cdot \varphi(v))$ produit matriciel

$= \varphi^{-1}({}^t\varphi(v) \cdot {}^t\varphi(u)) = \varphi^{-1}({}^t\varphi(v)) \circ \varphi^{-1}({}^t\varphi(u))$

$= \underline{v^* \circ u^*}$

5) $\forall u \in GL(E), \ u^* \in GL(E)$

$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

$u \circ u^{-1} = Id_E \Rightarrow (u \circ u^{-1})^* = Id_E^* = Id_E = (u^{-1})^* \circ u^*$

u^* est inversible à gauche et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

de m̂ à droite

6) conséquences

$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \text{rg}\, u^* = \text{rg}\, u, \quad \det u^* = \det u, \quad \text{tr}\, u^* = \text{tr}\, u \quad \begin{cases} \chi_{u^*} = \chi_u \\ \text{Sp}\, u^* = \text{Sp}\, u \\ \Pi_{u^*} = \Pi_u \end{cases}$ m̂ val. p. E.p. de m̂ dim

Pp 1) $\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \begin{cases} \text{Ker}\, u^* = (\text{Im}\, u)^\perp \\ \text{Im}\, u^* = (\text{Ker}\, u)^\perp \end{cases}$

$\forall x \in E, \ x \in \text{Ker}\, u^* \Leftrightarrow u^*(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall y \in E, \ (u^*(x)|y) = 0 = (x|u(y))$

si $y \in E$, $u(y) \in \text{Im}\, u$ $\Leftrightarrow \forall z \in \text{Im}\, u, \ (x|z) = 0$

$\Leftrightarrow x \in (\text{Im}\, u)^\perp$

$\text{Im}\, u^* = ((\text{Im}\, u^*)^\perp)^\perp = (\text{Ker}(u^*)^*)^\perp = \underline{(\text{Ker}\, u)^\perp}$

2) F ss-ev de E,

F stable par u $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ stable par u^*

F stable par u $\Leftrightarrow \forall x \in F, \ u(x) \in F$

$\Leftrightarrow \forall x \in F, \forall y \in F^\perp, \ (y|u(x)) = 0$

$\Leftrightarrow \forall y \in F^\perp, \forall x \in F, \ (u^*(y)|x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall y \in F^\perp, \forall x \in (F^\perp)^\perp, \ (u^*(y)|x) = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\forall y \in F^\perp, \ u^*(y) \in F^\perp} = [(F^\perp)^\perp]^\perp$

$\Leftrightarrow$ F stable par u^*

3) $\mathcal{L}(E)$ muni de la norme associée à la norme euclidienne

$(\forall u \in E, \ \|u\| = \sup\{\|u(x)\| \ / \ x \in E, \|x\| = 1\}$

$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \begin{cases} |||u^*||| = |||u||| \\ |||u \circ u^*||| = |||u^* \circ u||| = |||u|||^2 = |||u^*|||^2 \end{cases}$

$\forall x \in E, \ \|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (u^*(u(x))|x) \leq \|u^* \circ u(x)\| \, \|x\|$ Cauchy Schwarz

$\leq |||u^* \circ u||| \, \|x\|^2$

donc $|||u|||^2 \leq |||u^* \circ u|||$

donc $|||u|||^2 \leq |||u^*||| \, |||u|||$

si $|||u||| = 0$ alors $u = u^* = u^* \circ u = u \circ u^* = 0$

si $|||u||| \neq 0$ $\quad |||u||| \leq |||u^*|||$

de m̂, $|||u^*||| \leq |||u|||$ donc $\underline{|||u^*||| = |||u|||}$
et $|||u|||^2 \leq |||u^* \circ u||| \leq |||u^*||| \; |||u||| = |||u|||^2$
donc $\underline{|||u|||^2 = |||u^* \circ u|||}$
de m̂, $\underline{|||u \circ u^*||| = |||u^*|||^2 = |||u|||^2}$

ex : E ev des polynômes P / $\begin{cases} \deg P \leq n \\ P(0) = P(1) = 0 \end{cases}$ $u : \begin{vmatrix} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P' \end{vmatrix}$ trouver u^*

$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$

$\forall (P,Q) \in E^2$, $\underline{(P|u(Q))} = (P|Q') = \int_0^1 P(t)Q'(t)dt = [P(t)Q(t)]_0^1 - \int_0^1 P'(t)Q(t)dt$

$= -\int_0^1 P'(t)Q(t)dt = \underline{(-P'|Q) = (u^*(P)|Q)}$

donc $u^*(P) = -P' = -u(P)$
donc $\boxed{u^* = -u}$

VII Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique)

$u \in \mathcal{L}(E)$, E euclidien
u autoadjoint $\Leftrightarrow u = u^*$ $\quad \forall (x,y) \in E^2, \; (x|u(y)) = (u(x)|y)$
$S(E)$: ensemble des endom. autoadj.

Pp 1) $\mathcal{B}$ base orthon. de E, $u \in \mathcal{L}(E)$
u auto adjoint $\Leftrightarrow$ $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = {}^t\text{mat}_{\mathcal{B}} u$ $\Leftrightarrow$ $\text{mat}_{\mathcal{B}} u \in S_n(\mathbb{R})$

2) $S_n(\mathbb{R})$ / $S(E)$ est un $\mathbb{R}$ ev de dim $\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\varphi : \begin{vmatrix} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u \longmapsto \text{mat}_{\mathcal{B}} u \end{vmatrix}$ est un isomorphisme d'ev
$\varphi(S(E)) = S_n(\mathbb{R})$

3) si F ss-ev de E stable par u autoadjoint
alors l'endomorphisme induit par u sur F est autoadjoint

$u : \begin{vmatrix} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto u(x) \end{vmatrix}$ $\quad u_1 : \begin{vmatrix} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto u(x) \end{vmatrix}$

$\forall (x,y) \in E^2$, $(x|u(y)) = (u(x)|y)$
$\forall (x,y) \in F^2$, $(x|u_1(y)) = (u_1(x)|y)$
$\mathcal{B}_1$ base orthon. de F ($\dim F = r$)
$\mathcal{B}$ - - - - - - - - - - E obtenue en complétant $\mathcal{B}_1$ grâce à l'orthonormalisat° de Schmidt

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c:c} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{array} \right) & \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \end{array} \in S_n(\mathbb{R})$$

avec $\begin{cases} A_2 = A_3 = 0 \\ A_1 = \text{mat}_{\mathcal{B}_1} u_1 \in S_r(\mathbb{R}) \end{cases}$
u_1 autoadjoint Pp 1)

Forme bilinéaire symétrique associée à un endomorphisme autoadjoint

soit $u \in S(E)$, $\varphi_u : \begin{vmatrix} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto (u(x)|y) \end{vmatrix}$

* $\forall (x,y) \in E^2$, $\underline{\varphi_u(y,x)} = (u(y)|x) = (y|u(x)) = (u(x)|y) = \underline{\varphi_u(x,y)}$
  donc φ_u est symétrique
* $\forall x \in E$, $\forall (y_1,y_2) \in E^2$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,
  $\underline{\varphi_u(x|ay_1+by_2)} = (u(x)|ay_1+by_2) = a(u(x)|y_1) + b(u(x)|y_2)$
  $= \underline{a\varphi_u(x,y_1) + b\varphi_u(x,y_2)}$

donc φ_u est linéaire à droite
donc à gauche (sym) Ainsi, $\boxed{\varphi_u \in \mathcal{L}_{2,1}(E)}$

Pp 1) : $\begin{vmatrix} S(E) \longrightarrow \mathcal{L}_{2,1}(E) \\ u \longmapsto \varphi_u \end{vmatrix}$ est un morphisme d'ev

$\forall (u,v) \in S(E)^2$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,
$\varphi_{\alpha u + \beta v}(x,y) = ((\alpha u + \beta v)(x)|y) = \alpha(u(x)|y) + \beta(v(x)|y)$

$= (\alpha\varphi_u + \beta\varphi_v)(x,y)$ donc $\varphi_{\alpha u+\beta v} = \alpha\varphi_u + \beta\varphi_v$

K

2) $\mathcal{B}$ base orthon. de E, $u \in S(E)$
$\text{mat}_{\mathcal{B}}\, \varphi_u = \text{mat}_{\mathcal{B}}\, u$

Pp 1) $u \in S(E) \Rightarrow A = {}^tA$

$A = \text{mat}_{\mathcal{B}}\, u$, $(x,y) \in E^2$, $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ coord de x, y ds $\mathcal{B}$
coord. de $u(x)$: AX
$\varphi_u(x,y) = (u(x)|y) = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tA\,Y = {}^tX\underbrace{AY}_{\text{coord de } u(y)} = (x|u(y)) = u(x,y)$

3) $\begin{array}{l} S(E) \longrightarrow \mathcal{L}_{2S}(E) \\ u \longmapsto \varphi_u \end{array}$ est un isomorphisme d'ev

$u \in S(E)$, u positif $\Leftrightarrow$ φ_u forme bilinéaire sym positive
$\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geq 0$
u défini positif $\Leftrightarrow$ ..... $\varphi_u(x,x)$ .... définie positive
$\forall x \in E,\ x \neq 0 \Rightarrow (u(x)|x) > 0$

$A \in S_n(\mathbb{R})$, A positive $\Leftrightarrow$ $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXAX \geq 0$
A définie positive $\Leftrightarrow$ $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0 \Rightarrow {}^tXAX > 0$
$S_n^{+}(\mathbb{R})$: ens. des matrices positives
$S_n^{++}(\mathbb{R})$: .... définies positives

rem : $\mathcal{B}$ base orthon. de E, $u \in S(E)$
u positif $\Leftrightarrow$ $\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $\varphi_u \in \mathcal{L}_{2S}^{+}(E)$
u déf. positif $\Leftrightarrow$ $\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $\varphi_u \in \mathcal{L}_{2S}^{++}(E)$

VIII Groupe orthogonal

E euclidien
$u \in \mathcal{L}(E)$, les proposit° suivantes sont équivalentes :
(1) $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$
(2) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$
(3) $u^* \circ u = u \circ u^* = Id_E$
(4) l'image par u de tte bon est une bon
(5) $\exists\, \mathcal{B}$ dont l'image par u est une bon
ds ce cas, u est un endom orthogonal (isométrie : $\|u(x)-u(y)\| = \|u(x-y)\| = \|x-y\|$)

isom

(1) $\Rightarrow$ (2) $\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (x|x) = \|x\|^2$
(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = \frac{1}{4}(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2)$
$= \frac{1}{4}(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2)$
$= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = (x|y)$
(1) $\Rightarrow$ (3) $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(u(x))|y) = (u^*\circ u(x)|y) = (x|y)$
$\forall x \in E$, $u^*\circ u(x) = x = Id_E(x)$
donc $u^*\circ u = Id_E$ et $u^* = u^{-1}$
d'où $u^*\circ u = u\circ u^*$ car $u^{-1}\circ u = u\circ u^{-1}$
(3) $\Rightarrow$ (1) $\forall (x,y) \in E^2$ $(u(x)|u(y)) = (u^*\circ u(x)|y) = (x|y)$
(1) $\Rightarrow$ (4) $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ bon de E
$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j)$
donc $(u(e_i))_{1\leq i\leq n}$ est une famille orthon (donc libre) de card $n = \dim E$
c'est donc une base orthon.
(5) $\Rightarrow$ (1) $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ bon dont l'image est une bon
$\forall (x,y) \in E^2$, $\begin{cases} \exists (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \exists (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ / $\begin{cases} x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \end{cases}$

$(u(x)|u(y)) = \left(u\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \Big| u\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \Big| \sum_{j=1}^n y_j u(e_j)\right)$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{(u(e_i)|u(e_j))}_{\substack{1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i\neq j}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i|e_j)$

image par u de $\mathcal{B}$, bon

$= \left(\sum x_i e_i \Big| \sum y_j e_j\right) = (x|y)$

Pp 1) u endom orthog $\Longrightarrow$ $\det u \in \{-1, 1\}$

$u^* \circ u = Id_E \Rightarrow \det u^* . \det u = 1 \Rightarrow (\det u)^2 = 1$

2) $\mathcal{O}(E)$: ens des endom. orthog est un ss-groupe de $\mathcal{Gl}(E)$ groupe des automorphismes de E (morphismes bijectifs)

gr. orthogonal (pour $\circ$)

- $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{Gl}(E)$
- $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$ car $Id_E \in \mathcal{O}(E)$
- $\forall (u,v) \in \mathcal{O}(E)^2$,

$(u \circ v^{-1})^* \circ (u \circ v^{-1}) = ((v^{-1})^* \circ u^*) \circ (u \circ v^{-1}) = (v^{-1})^* \circ (u^* \circ u) \circ v^{-1}$
$= (v^{-1})^* \circ v^{-1} = (v^*)^{-1} \circ v^{-1} = (v \circ v^*)^{-1} = Id_E$

(et $(u \circ v^{-1}) \circ (u \circ v^{-1})^* = Id_E$) donc $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$

3) $S\mathcal{O}(E)$: ens. des endom. orthog de det 1 est un ssgroupe de : $\mathcal{O}(E)$, $\mathcal{Gl}(E)$, $\mathcal{Sl}(E)$ ens. des automorphis. de det 1

ss-gr. spécial orthog (pour $\circ$)

$S\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{Sl}(E)$
endom. orthogonaux de det 1

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A orthogonale $\Longleftrightarrow$ ${}^tA A = I$ $\quad (A^{-1} = {}^tA)$

rem : * $\det A \in \{-1, 1\}$

* A spéciale orthogonale $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} A \text{ orthogonale} \\ \det A = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \mathcal{B} \text{ bon de } E \\ u \in \mathcal{L}(E) \\ A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u \end{cases}$ (donc ${}^tA = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u^*$)

u orthog $\Longleftrightarrow$ A orthog

u spé orthog $\Longleftrightarrow$ A spé orthog

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: ens. des matrices orthogonales, ss-gr de $\mathcal{Gl}_n(\mathbb{R})$ groupe des matrices inversibles à coeff. dans $\mathbb{R}$, de taille n^2, isomorphe à $\mathcal{O}(E)$

$S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: .... spéciales orthogonales, ... isomorphe à $S\mathcal{O}(E)$

Pp 1) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_n$

${}^tAA = B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ $\qquad b_{ij} = {}^tC_i \, C_j$

$\begin{pmatrix} {}^tC_1 \\ \vdots \\ {}^tC_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix}$ $(C_1 \cdots C_n)$

$b_{ij} = {}^tC_i \, I \, C_j = (C_i | C_j)$ prod. sca. cano de $\mathbb{R}^n$

2) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A orthog $\Longleftrightarrow$ les vecteurs colonnes de A (ou lignes) forment une bon de $\mathbb{R}^n$ pour sa struct. euclidienne cano

$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ $\quad A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ d^2+e^2+f^2 = 1 \\ g^2+h^2+i^2 = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} ad+be+cf = 0 \\ ag+bh+ci = 0 \\ dg+eh+fi = 0 \end{cases}$

3) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A orthog $\Longleftrightarrow$ l'endom : $\begin{vmatrix} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X \longmapsto AX \end{vmatrix}$ est orthog pour la struct. eucli cano. de $\mathbb{R}^n$

$C_1, \dots, C_n$ sont les images de la base cano orthon. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ bon de } E \\ \mathcal{B}' \text{ base de } E \\ P \text{ matrice de passage de } \mathcal{B} \text{ à } \mathcal{B}' \end{cases}$ $\quad \mathcal{B}'$ bon $\Longleftrightarrow$ P orthogonale

$(P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$: $P^{-1} = {}^tP)$

IX Réduction des endomorphismes autoadjoints

E euclidien

Pp 1) F ss-ev de E

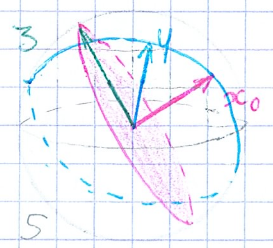
F stable par u $\Longrightarrow$ $F^\perp$ stable par u

démo: $\mathcal{B}_1$ bon de F complétée en $\mathcal{B}$ bon de E

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_4 \end{array}\right) \leftarrow \text{si } x \in F,\ u(x) \in F$$

$F \quad F^{\perp}$

2) $u \in S(E) \implies u$ a **au moins** 1 valeur propre réelle



soit $f : \begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (u(x)|x) \end{vmatrix}$ f est continue (forme quad. associée à φ_u)

$S = \{x \in E \,/\, \|x\| = 1\}$ (sphère)

S est fermé borné donc compact

sur $\mathbb{R}$

f, continue sur le compact S, est bornée et atteint sa borne sup. $\exists x_0 \in S \,/\, \forall y \in S,\ (u(y)|y) \leq (u(x_0)|x_0)$

$\forall z \in x_0^{\perp} \cap S,\ \forall t \in \mathbb{R},\ y = \cos t\, x_0 + \sin t\, z \in S$

et $f(y) \leq f(x_0)$

$g : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto (u(\cos t\, x_0 + \sin t\, z) \,|\, \cos t\, x_0 + \sin t\, z) \end{vmatrix}$ $(g(t) = f(y(t)))$

g présente un max en 0 $\left(g(0) = (u(x_0)|x_0) = f(x_0)\right)$ car $g(t) \leq g(0)$

$u \in S(E)$:
$(x_0|u(z)) = (u(x_0)|z)$

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$g(t) = \cos^2 t\,(u(x_0)|x_0) + \cos t \sin t\,(u(x_0)|z) + \sin t \cos t\,(x_0|u(z)) + \sin^2 t\,(u(z)|z)$

$= \cos^2 t\, f(x_0) + 2 \sin t \cos t\,(u(x_0)|z) + \sin^2 t\,(u(z)|z)$

$g \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, $dl_1(0)$: $\sin 2t \sim 2t$

$g(t) = g(0) + t g'(0) + o(t) = 1 f(x_0) + 2t(u(x_0)|z) + o(t)$

donc $g'(0) \underset{g(0)\ \text{max}}{=} 0 = 2(u(x_0)|z)$

ccl : $\forall z \in x_0^{\perp} \cap S,\ (u(x_0)|z) = 0$

$\forall z \in x_0^{\perp},\ (u(x_0)|z) = 0$

$\forall z \in x_0^{\perp},\ u(x_0) \in z^{\perp}$

$u(x_0) \in \bigcap_{z \in x_0^{\perp}} (z^{\perp}) = \left(\bigcup_{z \in x_0^{\perp}} \{z\}\right)^{\perp}$

l'orthog de l'orthog d'un vect. n'est pas le vect., mais la droite vect

$u(x_0) \in (x_0^{\perp})^{\perp} = \text{Vect}(x_0)$

donc x_0 vecteur propre $(u(x_0) = \lambda x_0)$

3) $u \in S(E) \implies$ les espaces propres de u sont 2 à 2 orthogonaux

dém à savoir faire

λ, μ valeurs propres distinctes de E

$\forall x \in E_{\lambda},\ \forall y \in E_{\mu},\ (u(x)|y) = (x|u(y))$

$\iff \lambda(x|y) = \mu(x|y) \iff \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(x|y) = 0$

$\iff (x|y) = 0$

th spectral

* Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E est **diagonalisable**
* E est somme directe orthogonale des ss_espaces propres de u
* $\exists\ \mathcal{B}$ bon de E / $\text{mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est **diagonale**

on suppose $n = \dim E \geq 2$, $u \in S(E)$

• u possède une val. propre λ_1 Pp 2)

soit E_{λ_1} l'esp. propre associé, $\dim E_{\lambda_1} = n_1 \geq 1$

si $n_1 = n$, u est diagonalisable

E_{λ_1} stable par u tjrs vrai

si $n_1 < n$, $E_{\lambda_1}^{\perp}$ est stable par u Pp 1)

et l'endom. u_1 induit par u sur $E_{\lambda_1}^{\perp}$ est autoadj. Pp 3) p.145

• u_1 possède une val. propre λ_2

soit E_{λ_2} l'esp. p. associé, $\dim E_{\lambda_2} = n_2 \geq 1$

si $n_2 = n - n_1$, $n = n_1 + n_2$ u est diagonalisable

et $E = E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_2}$ Pp 3)

$\begin{cases} E_{\lambda_1} \text{ stable par } u_1 \\ E_{\lambda_2} \text{ — — — } u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{\lambda_1}^{\perp} \text{ stable par } u_1 \\ E_{\lambda_2}^{\perp} \quad u_1 \end{cases}$

si $n_2 < n - n_1$, $n > n_1 + n_2$, $E_{\lambda_2}^{\perp} \cap E_{\lambda_1}^{\perp}$ est stable par u_1

et l'endom. u_2 induit par u_1 (ou u)

sur $E_{\lambda_2}^{\perp} \cap E_{\lambda_1}^{\perp} = (E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2})^{\perp}$ est autoadj.

.... etc

... u est diagonalisable et $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$

* si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ bon de $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ alors $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ bon de E

corollaire $\forall A \in S_n(\mathbb{R}),\ \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ / $P^{-1}AP = {}^tPAP$ diagonale
$\quad {}^tPP = I$ (où $A = {}^tPDP$ avec D diagonale)

donc **Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable**

rem : * $\begin{cases} u \in \mathcal{L}(E) \\ \exists \mathcal{B} \text{ bon de } E \,/\, \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, u \text{ diagonale} \end{cases} \Longrightarrow u$ symétrique (autoadj)

* $\begin{cases} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \,/\, P^{-1}AP \text{ diagonale} \end{cases} \Longrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})$ $\quad ({}^t({}^tPAP) = {}^tPAP)$

(donc si une matrice est diagonalisable ds une Bon, elle est forcém^t sym)

applicat° : * E euclidien
si φ forme bilin sym sur E, ϕ forme quad. associée
alors, $\exists u \in S(E) / \varphi = \varphi_u$:
$\| \forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = (x|y) = (u(x)|y) = \varphi_u(x|y)$

si $\mathcal{B}'$ bon de E, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \varphi = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} \varphi_u = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'} u \in S_n(\mathbb{R})$

soit $\mathcal{B}$ bon de diagonalisation de u

$$D = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} \varphi$$

$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (X,Y) \in \mathbb{R}^{n^2}$,

$$\varphi(x,y) = {}^tXDY = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i \qquad \text{donc} \qquad \phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

* $u \in S(E)$, u positif $\iff u \in S^+(E) \iff \varphi_u \in \mathcal{L}_{2s}^+(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$
$\quad$ u déf. positif $\iff u \in S^{++}(E) \iff \varphi_u \in \mathcal{L}_{2s}^{++}(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$

X Géométrie

1. produit mixte

a. orientation d'un ev réel de dim finie

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2 bases de E,
$\mathcal{B}'$ donne à E la même orientation que $\mathcal{B}$ $\iff \det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} > 0$

P$_p$) relat° d'équivalence

réflexivité : $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I$ $\quad \det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = 1 > 0$

sym : $\mathcal{B}'$ donne la m̂ orientat° que $\mathcal{B}$,
$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^{-1}$ $\quad \det P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \dfrac{1}{\det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}} > 0$ donc $\mathcal{B}$ donne la m̂ orientat° que $\mathcal{B}'$

transi : $\mathcal{B}'$ donne la m̂ orientat° que $\mathcal{B}$
$\mathcal{B}''$ ——— " ——— $\mathcal{B}'$

$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$: $\quad x \in E$ de coord $\begin{cases} X \text{ ds } \mathcal{B} \\ X' \text{ ds } \mathcal{B}' \\ X'' \text{ ds } \mathcal{B}'' \end{cases}$

$X = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} X' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\, \mathrm{Id}\ X'$

$\begin{cases} X = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} X' \\ X' = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} X'' \end{cases} \Rightarrow X = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} X'' = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} X''$

donc $\det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = \underbrace{\det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}_{>0} \underbrace{\det P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}}_{>0} > 0$

rem : il y a **2** classes d'équivalence

$\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}_2 = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\quad \mathrm{Id}(e_1) = -e_1$

$$P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\det P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} < 0 \rightarrow$ il y a au moins 2 classes d'éq

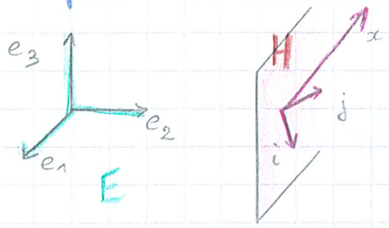
si $\det P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3} < 0$ alors $\det P_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3} = \underbrace{\det P_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}}_{<0} \underbrace{\det P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}}_{<0} > 0$

Il y a donc 2 classes d'équivalence

Orienter l'espace : choisir une des 2 classes d'éq. (directe) K

si $\begin{cases} E \text{ orienté} \\ H \text{ hyperplan de } E \quad (E = H \oplus \mathbb{R}x) \\ x \in E,\ x \notin H \end{cases}$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ base directe de H pour l'orientation induite par x $\Leftrightarrow$ $(e_1, \dots, e_{n-1}, x)$ base directe de E



(i, j, x) base directe de E
(i, j) base directe de H

b - produit mixte dans un ev euclidien orienté de dim n

rem : si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont 2 bon directes alors $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}_{\det P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = 1 \text{ car } P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \text{ orthogonale de } \det > 0} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

$\to$ donc det ne dépend pas de la base ds laquelle on le calcule : on ne l'indique pas, on met une maj :

produit mixte de $x_1, \dots, x_n$ = $\mathrm{Det}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}\text{ qcq}}(x_1, \dots, x_n)$
$[x_1, \dots, x_n]$

2 - en dimension 2

E_2 : ev eucli orienté de dim 2

a - $O_2(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$M \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \theta \in \mathbb{R} / a = \cos\theta,\ b = \sin\theta \\ \exists \theta' \in \mathbb{R} / d = \cos\theta',\ c = \sin\theta' \\ \cos\theta \sin\theta' + \sin\theta \cos\theta' = 0 = \sin(\theta + \theta') \end{cases} \Leftrightarrow \theta + \theta' \equiv \begin{cases} 0\ [2\pi] \\ \pi\ [2\pi] \end{cases}$ ou

$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} \theta' \equiv -\theta\ [2\pi] \\ a = \cos\theta,\ b = \sin\theta \\ c = \sin(-\theta) = -b \\ d = \cos(-\theta) = a \end{cases}$ ou $\begin{cases} \theta' \equiv \pi - \theta\ [2\pi] \\ a = \cos\theta,\ b = \sin\theta \\ c = \sin(\pi - \theta) = b \\ d = \cos(\pi - \theta) = -a \end{cases}$

$\exists \theta \in \mathbb{R} / \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

donc $O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$$

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

b - $SO_2(\mathbb{R})$

$$\varphi : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow SO_2(\mathbb{R}) \\ \theta \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(\theta)\varphi(\theta') = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & \dots \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & \dots \\ \sin(\theta + \theta') & \dots \end{pmatrix}$

$= \varphi(\theta + \theta')$

donc φ : morphisme de groupes surjectif

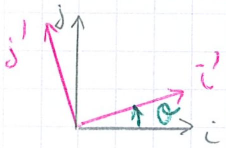
$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\theta \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(\theta) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I \text{ : neutre de la multiplicat.}} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$

Ker φ = $2\pi\mathbb{Z}$

$SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif : $\forall (M, N) \in SO_2(\mathbb{R})^2$, $\exists \theta, \theta' \in \mathbb{R}^2 / \begin{array}{l} M = \varphi(\theta) \\ N = \varphi(\theta') \end{array}$ (surjectivité)

$$MN = \varphi(\theta)\varphi(\theta') = \varphi(\theta + \theta') = \varphi(\theta' + \theta) = \varphi(\theta')\varphi(\theta) = NM$$

c. $SO_2(E_2)$



$\begin{cases} i' = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j \\ j' = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j \end{cases}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $u \in SO(E_2)$ a pour matrice $\Psi(\theta)$ $\Leftrightarrow$ u rotation d'angle de mesure θ

$SO_2(E_2)$: groupe des rotations de E_2

d. $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$

$M \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \,/\, M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$\varphi : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) \\ \theta \longmapsto M \end{vmatrix}$ pas un ss-gr.* $\quad \underbrace{\varphi(\theta)\varphi(\theta)}_{\in O_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $I_2 \in SO_2(\mathbb{R})$ donc $I_2 \notin O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$

$\varphi(\theta)$ est $\begin{cases} \text{involutive} \\ \text{diagonalisable de valp. } 1 \text{ et } -1 \\ \text{matrice d'une symétrie} \end{cases}$ $\varphi^2 = I \Rightarrow X^2 - 1$ polynôme annulateur

$\varphi(\theta) \in S_2(\mathbb{R})$ donc est la matrice d'une sym. orthogonale :

$\begin{pmatrix} X \text{ dirige l'axe de la sym :} & \varphi(\theta) X = X \\ Y \text{ ----- la direct° ------- :} & \varphi(\theta) Y = -Y \end{pmatrix}$ inutile car on sait déjà que les ss-esp. propres sont orthog.

en utilisant l'équat° de l'axe : $\begin{cases} \cos\theta\, x + \sin\theta\, y = x \\ \sin\theta\, x - \cos\theta\, y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos\theta - 1)x + \sin\theta\, y = 0 \\ \sin\theta\, x - (1 + \cos\theta) y = 0 \end{cases}$

(on trouverait de $\vec{n}$ avec la dir)

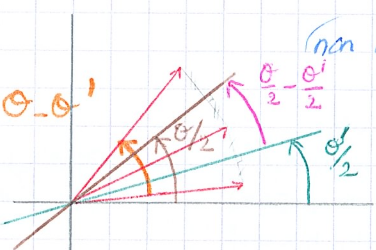
on trouve l'équa. de la rotation $\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sin^2\frac{\theta}{2} x + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} y = 0 \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} x - 2\cos^2\frac{\theta}{2} y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} x - \cos\frac{\theta}{2} y\right) = 0 \\ 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} x - \cos\frac{\theta}{2} y\right) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin\frac{\theta}{2} = 0 \\ \cos\frac{\theta}{2} = 0 \end{cases}$ impossible, on peut donc simplifier dans 1 équa au moins :

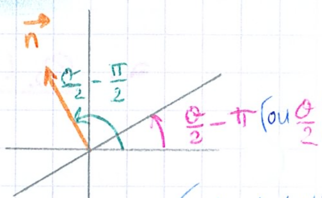
$\sin\frac{\theta}{2} x - \cos\frac{\theta}{2} y = 0$

$\varphi(\theta)\varphi(\theta') = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta') & -\sin(\theta - \theta') \\ \sin(\theta - \theta') & \cos(\theta - \theta') \end{pmatrix} = \Psi(\theta - \theta')$

(non commutatif)



$\vec{n} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$



(angle de droite)

e. $O(E_2) \setminus SO(E_2)$

ensemble des réflexions (sym. orthogonales par rapport à un hyperplan)

3. en dimension 3

E_3 : ev eucli orienté de dim 3

a. produit vectoriel

$(u, v) \in E_3^2$, $: \begin{vmatrix} E_3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ w \longmapsto \mathrm{Det}(u, v, w) \end{vmatrix}$ est une forme linéaire (det multi-linéaire, donc linéaire / dernier vecteur)

donc $\exists!$ vecteur qui dépend de u et v noté $u \wedge v$ / $\forall w \in E_3$, $\mathrm{Det}(u, v, w) = (u \wedge v | w)$

* $: \begin{vmatrix} E_3 \times E_3 \longrightarrow E_3 \\ (u, v) \longmapsto u \wedge v \end{vmatrix}$ est bilinéaire, antisymétrique

* dans $\mathcal{B} = (i, j, k)$ orthonormée directe. $\begin{cases} i \wedge j = k = -j \wedge i \\ j \wedge k = i = -k \wedge j \\ k \wedge i = j = -i \wedge k \end{cases}$

* $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $v \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\forall w \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \in E_3$,

$(u \wedge v | w) = \mathrm{Det}(u\, v\, w) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y'' \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + z'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ donc $u \wedge v \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

* $\forall (u, v, w) \in E_3^3$, $\mathrm{Det}(u, v, w) = (u \wedge v | w) = (w \wedge u | v) = (v \wedge w | u)$

K

* $\forall (u,v) \in E_3^2$, (u,v) libre $\iff$ $u \wedge v \neq 0$

si $w = \alpha u + \beta v$, $u \wedge v \perp w$

$v = \lambda u$, $u \wedge v = 0$

(u,v) liée $\iff$ $\forall w \in E_3$, (u,v,w) liée

$\iff$ $\forall w \in E_3$, $(u \wedge v | w) = 0$

$\iff$ $u \wedge v = 0$

* $\forall (u,v) \in E_3^2$, (u,v) libre $\Rightarrow$ $(u, v, u \wedge v)$ base directe

|| $\mathrm{Det}(u,v,u\wedge v) = (\underbrace{u \wedge v}_{\neq 0} | u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 \geq 0$

* $\forall (u,v) \in E_3^2$ $u \wedge v \in (\mathrm{Vect}(u,v))^\perp$

|| $(u \wedge v | u) = \mathrm{Det}(u,v,u) = 0 \Rightarrow u \wedge v \perp u$

|| $(u \wedge v | v) = \mathrm{Det}(u,v,v) = 0 \Rightarrow u \wedge v \perp v$

* identité de Lagrange : $\forall (u,v) \in E_3^2$, $\|u\|^2 \|v\|^2 = \underbrace{\|u \wedge v\|^2}_{\|u\|^2\|v\|^2 \sin^2\theta} + \underbrace{(u|v)^2}_{\|u\|^2\|v\|^2 \cos^2\theta}$

|| $\|u\|^2 \|v\|^2 = (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)$

|| $\|u \wedge v\|^2 = (yz' - zy')^2 + (xz' - zx')^2 + (xy' - yx')^2$

|| $(u|v)^2 = (xx' + yy' + zz')^2$

* si u, v non nuls, θ mesure non orientée de (u,v) alors $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2\theta$

$|\sin\theta| = \dfrac{\|u \wedge v\|}{\|u\| \|v\|}$

* $\forall (u,v,w) \in E_3^3$ $(u \wedge v) \wedge w = (u|w)v - (u|v)w$

$\left((i \wedge j) \wedge i = (i|i)j - (i|j)i = j - 0 = j \right)$
$= k \wedge i = j$

b. groupe orthogonal $O(E_3)$

Pp 1) $f \in O(E_3)$

F ss-ev de E_3 stable par f $\Longrightarrow$ $F^\perp$ stable par f

|| $\forall x \in F$, $f(x) \in F$

|| $\forall y \in E$, $y \in F^\perp$ $\Rightarrow$ $\forall x \in F$, $(x|y) = 0 = (f(x)|f(y))$

(3) p. 146 f isométrie $\Rightarrow$ f bijective

|| or, f est un isomorphisme : $\dim f(F) = \dim F$ donc $f(F) = F$

|| donc $\forall z \in F$, $(z | f(y)) = 0$

|| donc $f(y) \in F^\perp$

f a au moins 1 valeur propre réelle

|| 3 est impair, $\deg \chi_{f_3} = 3$ (un poly. de $\mathbb{R}[X]$ de deg. impair a au moins 1 racine réelle)

$Sp(f) \subset \{-1, 1\}$

|| $\lambda \in Sp(f)$, x vect. propre associé,

|| $\|x\| = \|f(x)\| = |\lambda| \|x\|$

applicat° : $f \in O(E_3)$, $F = \mathrm{Ker}(f - Id_E)$,

si $\dim F = 3$: $f = Id_E$, $f \in SO(E_3)$ car $\det f = 1$ ($F = \mathrm{Ker}\{0\} = E_3$)

si $\dim F = 2$: $\dim(F^\perp) = 3 - 2 = 1$

$F^\perp$ est stable par f

l'endom. induit sur $F^\perp$ par f est une isométrie qui n'a pas la valeur propre 1 (sinon, $f(x) = x$ $\Rightarrow$ $f = Id_E$ $\Rightarrow$ $F = \mathrm{Ker}\{0\} = E$ or $\dim F = 2$)

les seules val. propres possibles sont 1 ou -1 donc c'est -1.
$f(x) = -x \iff (f + Id)(x) = 0$

donc $F^\perp = \mathrm{Ker}(f + Id)$

et f est la symétrie orthog. par rapport au plan F (réflexion)

ds Bon adaptée à la décomp. : $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$

$\mathrm{mat}_B f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $f \in O(E_3) \setminus SO(E_3)$

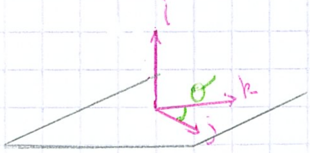
si $\dim F = 1$: $\dim(F^\perp) = 3 - 1 = 2$

l'endom. induit par f sur $F^\perp$ est une isométrie sans val. propre 1.

donc c'est une rotat° ($\neq Id_{E_2}$) 1 val. propre pour f

ds Bon adaptée :

$B = (i,j,k)$ directe $\mathrm{mat}_B f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (on exclu l'identité)



rotat° d'angle de mesure θ, d'axe dirigé et orienté par i

$f \in SO(E_3)$

si $\dim F = 0$: $F = \{0\}$ $\quad (\dim(\mathrm{Ker}(f - Id_E)) = 3)$

1 n'est pas val. propre, -1 l'est

donc $\begin{cases} -f \in \mathcal{O}(E_3) \\ 1 \in Sp(-f) \\ -1 \notin Sp(-f) \end{cases}$

donc $-f$ est ds le cas 1 ou 3 (car ds le cas 2, 1 et -1 sont val. prop.)

$-f \in S\mathcal{O}(E_3) \Rightarrow \det(-f) = 1$
rotation

$\det f = (-1)^3 = -1$ $\quad f \in \mathcal{O}(E_3) - S\mathcal{O}(E_3)$ (réflex°)

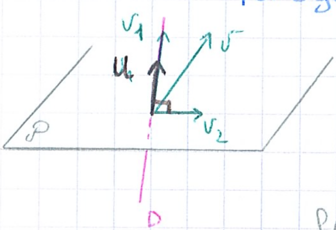
$\det(-f) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \det f = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3$

express° d'une rotat°

u vect. unitaire, $\mathcal{P} = u^\perp$ plan eucli orienté par u, $\theta \in \mathbb{R}$

f rotat° | d'axe dirigé, orienté par u
| d'angle de mesure θ

$v \in E_3$, $f(v)$?



$v_1 = (v|u)u \quad \in D$

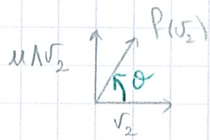
$v_2 = v - v_1 = v - (v|u)u \quad \in \mathcal{P}$

$f(v) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = v_1 + f(v_2)$

si $v_2 \neq 0$, $(u, v_2, u \wedge v_2)$ est une bon directe

$(v_2, u \wedge v_2)$ est une bon directe de $\mathcal{P}$ (orienté par u)

$\|v_2\| = \|u \wedge v_2\| = \|f(v_2)\|$



$f(v_2) = \cos\theta (v_2) + \sin\theta\, (u \wedge v_2)$

valable si $v_2 = 0$

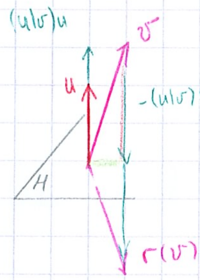
ccl : $f(v) = v_1 + f(v_2) = (u|v)u + \cos\theta(v - (u|v)u) + \sin\theta\,(u \wedge (v - (u|v)\,u))$

$= (1 - \cos\theta)\,(u|v)u + \cos\theta\; v + \sin\theta\; u \wedge v$

pour trouver la matrice d'une rotat°, on calcul $f(i)$, $f(j)$, $f(k)$

4. en dimension n

réflexion : sym. orthogonale par rapport à un hyperplan



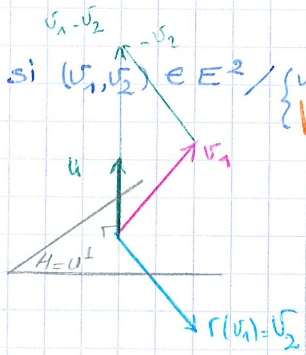
p 1) $\begin{cases} H \text{ hyperplan} \\ u \text{ vecteur unitaire orthogonal à } H \\ r \text{ réflexion par rapport à } H \end{cases}$

alors $\forall v \in E$, $r(v) = v - 2\,(u|v)\,u$

$E = H \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(u)$

$v = (v - (u|v)u) + (u|v)u$

$r(v) = v - (u|v)u - (u|v)u = v - 2(u|v)u$



2) si $(v_1, v_2) \in E^2 \,/\, \begin{cases} v_1 \neq v_2 \\ \|v_1\| = \|v_2\| \end{cases}$ alors $\exists\,!$ réflexion $r \,/\, r(v_1) = v_2$

unicité : $r(v_1) = v_2$ donc $r(v_2) = r(r(v_1)) = v_1$

$r(v_1 - v_2) = r(v_1) - r(v_2) = v_2 - v_1 \neq 0$

$v_1 - v_2$ dirige la réflexion

$H = (v_1 - v_2)^\perp$ $\quad u = \dfrac{1}{\|v_1 - v_2\|}(v_1 - v_2)$

existence : $r : \begin{vmatrix} E \longrightarrow E \\ v \longmapsto v - \dfrac{2(v_1 - v_2|v)}{\underbrace{\|v_1 - v_2\|^2}_{(v_1 - v_2|v_1 - v_2)}}(v_1 - v_2) \end{vmatrix}$

$r(v_1) = v_1 - \dfrac{2(v_1 - v_2|v_1)}{\|v_1 - v_2\|^2}(v_1 - v_2) = \underbrace{\left(1 - \dfrac{2(v_1 - v_2|v_1)}{\|v_1 - v_2\|^2}\right)}_{A} v_1 + \underbrace{\dfrac{2(v_1 - v_2|v_1)}{\|v_1 - v_2\|^2}}_{B} v_2$

$A = \dfrac{(v_1 - v_2|v_1 - v_2) - 2(v_1 - v_2|v_1)}{\|v_1 - v_2\|^2} = \dfrac{(v_1 - v_2|v_1 - v_2 - 2v_1)}{\|v_1 - v_2\|^2}$

$A = \dfrac{-(v_1 - v_2|v_1 + v_2)}{\|v_1 + v_2\|^2} = \dfrac{\|v_2\|^2 - \|v_1\|^2}{\|v_1 - v_2\|^2} = 0$ $\quad$ donc $B = 1$ et $r(v_1) = v_2$

r réflexion, $\det r = -1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad r \in \mathcal{O}(E) \setminus S\mathcal{O}(E)$

l'ens. des réflex° est un système générateur de $\mathcal{O}(E)$.

$\forall f \in O(E), \exists m \in \mathbb{N}, \exists r_1, \dots, r_m$ reflexions / $f = r_m \circ \dots \circ r_1$

rem : $\det f = (-1)^m$

donc $\begin{cases} f \in SO(E) \Leftrightarrow n \text{ pair} \\ f \in O(E) \setminus SO(E) \Leftrightarrow n \text{ impair} \end{cases}$

$H = \mathrm{Ker}(f - I)$

si $H = E$ alors $f = I$ $\quad$ ($E = \mathrm{Ker}\{0\}$)

si $\dim H < n$, $\dim H^\perp \geq 1$,

$\exists u_1 \in H^\perp$ / $\begin{cases} f(u_1) \neq u_1, \ f(u_1) = u_2 \\ u_1 \neq u_2, \ \|u_1\| = \|u_2\| \\ u_2 \in H^\perp \ (\text{stable par } f) \end{cases}$

soit r_1 la reflex' / $r_1(u_1) = u_2$

la dir de la reflex' r_1 est incluse ds $H^\perp$

donc H est stable par r_1

donc : $f \circ r_1$ est une isometrie

H est stable par $f \circ r_1$

$(f \circ r_1)(u_2) = f(u_1) = u_2$

$H \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(u_2) \subset \mathrm{Ker}(f \circ r_1 - I)$

$\vdots$

$f \circ r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_m = I$

$f = r_m^{-1} \circ r_{m-1}^{-1} \circ \dots \circ r_1^{-1} = r_m \circ r_{m-1} \circ \dots \circ r_1$

ds une base qcq (non orthonormale) : $\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_n)$:

le projeté orthogonal de x sur $F_r = \mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_r)$ est :

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{(a_i|x)}{(a_i|a_i)} a_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{(a_i|x)\, a_i}{\|a_i\|^2}$$