Espaces préhilbertiens complexes - Espaces hermitiens

E ev sur $\mathbb{C}$

I Formes sesquilinéaires hermitiennes

1. formes

$f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ forme semi-linéaire $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$
$\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$

$\varphi : \begin{vmatrix} E \times E \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) \longmapsto \varphi(x,y) \end{vmatrix}$ forme sesquilinéaire $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$
$\varphi(x, y+z) = \varphi(x,y) + \varphi(x,z)$
$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, $\varphi(\lambda x, y) = \bar{\lambda}\varphi(x,y)$
$\varphi(x, \mu y) = \mu\, \varphi(x,y)$

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in E$, $\begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{C} \\ y \mapsto \varphi(x,y) \end{vmatrix}$ est linéaire
$\forall y \in E$, $\begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \varphi(x,y) \end{vmatrix}$ est semi-linéaire

$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne
$\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$

$\psi : \begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \varphi(x,x) \end{vmatrix}$ forme hermitienne associée à φ

rem : $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)}$ donc $\psi(x) \in \mathbb{R}$

φ sesq. h. positive : $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$
ψ forme h. asso positive : .... $\psi(x) \geqslant 0$
φ .... définie positive $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x,x) > 0$
ψ .... $\psi(x) > 0$

ex : $E = \mathbb{C}^n$

* $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j y_j$

$\varphi\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j x_j = \overline{\sum_{j=1}^n y_j \bar{x}_j} = \overline{\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)}$

$\rightarrow$ $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j x_j = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \geqslant 0$

$\rightarrow$ $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$

* $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$ $\varphi(f,g) = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\, dt$ $\left.\begin{matrix} \text{linéaire } /g \\ \text{semi-lin } /f \end{matrix}\right\}$ sesquilin

$\varphi(g,f) = \int_{[0,1]} \bar{g} f = \overline{\int_{[0,1]} g \bar{f}} = \overline{\varphi(f,g)}$

$\rightarrow$ $\varphi(f,f) = \int_{[0,1]} |f|^2 \geqslant 0$
$\rightarrow$ $\varphi(f,f) = 0 \Rightarrow \int_{[0,1]} |f|^2 = 0 \Rightarrow |f|^2 = 0 \Rightarrow f = 0$

2 - expression matricielle (dim finie)

a - transconjugaison

pr $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{C})$, on pose $A^* = {}^t(\bar{A}) = \overline{{}^tA}$ (transconjuguée de A)

Pp 1) $\forall A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{C})$, $A^* \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{C})$ $A^{**} = A$

2) $\begin{vmatrix} \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{C}) \xrightarrow{pq} \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{C}) \\ A \longmapsto A^* \end{vmatrix}$ est semi-linéaire

3) $\begin{cases} A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{C}) \\ B \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{C}) \end{cases}$ $AB \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{C})$ $(AB)^* = B^* A^*$

4) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

b- matrices hermitiennes

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A hermitienne : $A^* = A$

$\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$: ens. des mat. hermitiennes d'ordre n

$\longrightarrow$ pas un $\mathbb{C}$ ev

$\longrightarrow$ $\mathbb{R}$.ev

c- matrice d'une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne φ

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

la mat. de φ exprimée ds $\mathcal{B}$ est. $A = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$

or, $\varphi(e_i, e_j) = \overline{\varphi(e_i, e_j)}$ donc $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$

expressions :

$(x,y) \in E^2$, $(X,Y) \in (\mathbb{C}^n)^2$ vect. coord. de x, y ds $\mathcal{B}$

$\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i}\, a_{ij}\, y_j = {}^t\overline{X} A Y$

$\varphi(x,y) = {}^t\overline{X} A Y = X^* A Y$

rem : $(X^* A Y)^* = \overline{X^* A Y}$ donc $\overline{\varphi(x,y)} = \varphi(x,y)$

$= Y^* (X^* A)^* = Y^* A^* X^{**} = Y^* A X$

3- produit scalaire

φ sesqui hermi sur E est un produit scalaire si φ est définie positive

dans ce cas, E est préhilbertien complexe

si E de dim finie, E est hermitien

II Espaces préhilbertiens

E préhilb complexe,

φ forme sesqui notée $(x|y)$ au lieu de $\varphi(x,y)$

ψ forme hermitienne associée $\psi(x) = (x|x)$

1- norme

* $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\psi(x)}$ (norme de x)
* vecteur unitaire :

x unitaire $\Leftrightarrow$ $\|x\| = 1$

S : ens. des vect. unitaires (sphère)

$\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\exists (\alpha, u) \in (\mathbb{R}^{+*}, S)$ / $x = \alpha u$ $\quad (\|x\| = |\alpha| \|u\| = |\alpha| = \alpha)$

rem : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{e^{i\theta}}{\|x\|} x$ est unitaire, colinéaire à x

2 distance associée

$\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = \|x - y\|$

3- $\forall (x,y) \in E^2$, (1) $\|x+y\|^2 = \psi(x+y) = (x+y|x+y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y)$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x|y) + \overline{(x|y)} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}((x|y))$

(2) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - (x|y) - (y|x) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - ((x|y) + \overline{(x|y)})$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}((x|y))$

$\mathrm{Re}((x|y)) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ $\quad \frac{(1)-(2)}{4}$

$(ix|ix) = \overline{i}\, i (x|x) = -i\, i \|x\|^2 = \|x\|^2$

(3) $\|ix+y\|^2 = \|ix\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}((ix|y)) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(-i(x|y))$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Im}((x|y))$ $\qquad \mathrm{Re}(-i(a+ib)) = \mathrm{Re}(-ia+b) = b = \mathrm{Im}(a+ib)$

(4) $\|ix-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Im}((x|y))$

$\mathrm{Im}(x|y) = \frac{1}{4}(\|ix+y\|^2 - \|ix-y\|^2)$ $\quad \frac{(3)-(4)}{4}$

identité de polarisation :

$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|ix-y\|^2)$

identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

4. inégalités

$\forall (x,y) \in E^2$,

Cauchy - Schwarz $\quad |(x|y)| \leqslant \|x\| \|y\|$

si $x=0$ $\quad |(0|0)| = 0 \leqslant 0 = \|0\| \|0\|$

si $x \neq 0$, $\quad f : \begin{vmatrix} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|\lambda x + y\|^2 \end{vmatrix}$

$f(x) = (\lambda x + y \mid \lambda x + y)$
$= \bar\lambda \lambda (x|x) + \bar\lambda (x|y) + \lambda (y|x) + (y|y)$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f(x) = \underbrace{|\lambda|^2}_{\bar\lambda \lambda} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}((\lambda x|y)) \geqslant 0$

$(x|y) = |(x|y)| e^{i\theta}$

$\exists \theta \in \mathbb{R}$, $e^{-i\theta}(x|y)$ réel et positif / $e^{-i\theta}(x|y) = |(x|y)|$

$(\lambda x|y) = \bar\lambda (x|y)$ avec $\bar\lambda \in \mathbb{C} : \bar\lambda = t e^{-i\theta}$

$\mathrm{Re}[(\lambda x|y)] = \mathrm{Re}[t e^{i\theta}(x|y)]$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(t e^{i\theta}(x|y)) = \mathrm{Re}(t e^{-i\theta}(x|y))$
$= t\,\mathrm{Re}(e^{-i\theta}(x|y)) = t\,|(x|y)|$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x|y)|t \geqslant 0$ (avec $\|x\|^2 \neq 0$) donc $\Delta' \leqslant 0$

$\Delta' = |(x|y)|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad |(x|y)| \leqslant \|x\| \|y\|$

cas d'égalité :

$|(x|y)| = \|x\| \|y\| \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \,/\, y = \lambda x$

si $x \neq 0$,

$|(x|y)| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \,/\, t^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x|y)|t = 0$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots \|t x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(t e^{i\theta} x | y) = 0$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots \|t e^{i\theta} x + y\|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots y = -t e^{i\theta} x$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \,/\, y = \lambda x$

Minkowski (norme) $\quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$

$\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}((x|y)) \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\|$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}((x|y)) \leqslant \|x\| \|y\|$

or, $\mathrm{Re}((x|y)) \leqslant |(x|y)| \leqslant \|x\| \|y\|$ Cauchy-Schwarz

cas d'égalité :

$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x$

$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}((x|y)) = |(x|y)| \\ |(x|y)| = \|x\| \|y\| \end{cases}$ Cauchy-Schwarz

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{C} / y = \lambda x \\ \mathrm{Re}((x|y)) = |(x|y)| \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{C} / y = \lambda x \\ \mathrm{Re}(\lambda (x|x)) = |\lambda| (\ldots \end{cases} \right.$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } \begin{cases} x \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{C} / y = \lambda x \\ \lambda \|x\|^2 = |\lambda| \|x\|^2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } (\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x)$

5. orthogonalité

a. $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ famille orthogonale sans vect. nul

$\forall x \in \mathrm{Vect}((x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$,

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha_i = \dfrac{(x_i | x)}{(x_i | x_i)}$

et $\bar\alpha_i = \dfrac{(x|x_i)}{(x_i|x_i)}$

$(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre

b. th de Pythagore (équiv. chez les réels, implicat° chez les complexes)

$\forall (x,y) \in E^2$, x orthogonal à $y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}((x|y)) =$

car $\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\,\mathrm{Re}((x|y))$

ex : $x \neq 0$, $y = ix$ $\quad \begin{cases} \|x+y\|^2 = \|(1+i)x\|^2 = |1+i|^2 \|x\|^2 = 2\|x\|^2 \\ \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 \end{cases}$

$(x|y) = (x|ix) = i\|x\|^2$ imaginaire pur

généralisat° :

$(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ famille orthogonale $\Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

c. orthonormalisation de Schmidt

$(u_i)_{1\leq i\leq n}$ famille libre de E

* $e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$
* $v_2 = u_2 - (e_1|u_2)e_1$ $\quad (e_1|v_2) = (e_1|u_2) - (e_1|(e_1|u_2)e_1) = (e_1|u_2) - (e_1|u_2)(e_1|e_1) = 0$
* $e_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2$ $\quad$ donc $\begin{cases} (e_1, e_2) \text{ orthonormale} \\ \mathrm{Vect}(e_1,e_2) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2) \end{cases}$
* $v_3 = u_3 - (e_1|u_3)e_1 - (e_2|u_3)e_2$ $\quad (e_1|v_3) = (e_1|u_3) - (e_1|(e_1|u_3)e_1) - (e_1|(e_2|u_3)e_2)$
$= (e_1|u_3) - (e_1|u_3)\underbrace{(e_1|e_1)}_{1} - (e_2|u_3)\underbrace{(e_1|e_2)}_{0} = 0$
dem, $(e_2|v_3) = 0$

$e_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3$

rem : * tout esp. hermitien possède une $\mathcal{B}$on (par orthonormalisat° d'une $\mathcal{B}$ qcq)
* si $\begin{cases} E \text{ hermitien} \\ F \text{ ss ev de } E \\ \mathcal{B} \text{ bon de } F \end{cases}$ alors on peut compléter $\mathcal{B}$ en bon de E

d. orthogonal d'une partie

$A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $\quad A^\perp = \{x \in E \,/\, \forall y \in A,\ (y|x) = 0\}$

Pp 1) $A^\perp$ ss_ev de E

$\forall y \in A$, $\varphi_y : \begin{vmatrix} E \to \mathbb{C} \\ x \mapsto (y|x) \end{vmatrix}$ est une forme linéaire

$A^\perp = \bigcap_{y\in A} \mathrm{Ker}\,\varphi_y$

2) $\{0\}^\perp = E$, $\quad E^\perp = \{0\}$, $\quad A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$, $\quad A^\perp = (\mathrm{Vect}\,A)^\perp$,
F ssev de E, $\quad F \subset (F^\perp)^\perp$
$F \oplus F^\perp$
F a un suppl. orthog. $\Leftrightarrow$ $F \oplus F^\perp = E$

e. projection orthogonale sur un ss-ev de dim finie

Pp) F ssev de E, de dim finie, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ Bon de F

$p : \begin{vmatrix} E \to E \\ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i \end{vmatrix}$ proj orthog sur F $\qquad F \oplus F^\perp = E$

f. distance à un ss_ev de dim finie

F ss_ev de E, de dim finie (donc $F^\perp$ existe)

$\forall x \in E$, $\exists!\, z \in F \,/\, d(x,z) = d(x,F)$ et z : proj orthog de x sur F

* $d(x,F) = \|x - z\|$
* $\forall y \in F$, $\|x-y\|^2 = \|x-z\|^2 + \|z-y\|^2 = d(x,F)^2 + \|z-y\|^2$

inégalité de Bessel

$(e_i)_{1\leq i\leq r}$ famille orthon. de E, $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{1\leq i\leq r}$

$\forall x \in E$, z = proj. orthog de x sur $F = \sum_{i=1}^{r} (e_i|x)e_i$

$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \|(e_i|x)e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{r} ((e_i|x)e_i | (e_i|x)e_i) = \sum_{i=1}^{r} |(e_i|x)|^2$

et $\|x\|^2 = d(x,F)^2 + \|z\|^2 \geq \sum_{i=1}^{r} |(e_i|x)|^2$

autres th tjrs valables $\qquad$ au carré, un complexe peut être "< 0"