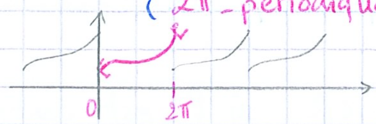
Séries de Fourier

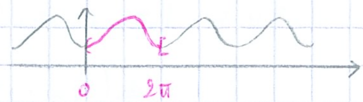
fct° à valeurs ds $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Fonctions périodiques

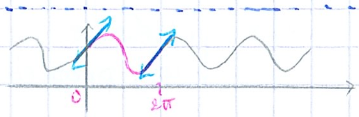
1. ① si $f : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{K}$, $\exists !\ \bar{f}$ $\begin{cases} \text{définie sur } \mathbb{R} \\ 2\pi\text{-périodique} \end{cases}$ / $\forall x \in [0, 2\pi[,\ f(x) = \bar{f}(x)$



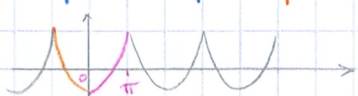
$\bar{f}$ continue $\iff \begin{cases} f \text{ continue} \\ f \text{ admet une limite en } 2\pi^- \text{ et } f(2\pi^-) = f(0) \end{cases}$



$\bar{f} \in C^1(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} f \in C^1(\mathbb{R}) \\ f \text{ admet une limite en } 2\pi^- \text{ et } f(2\pi^-) = f(0) \\ f' \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ f'(2\pi^-) \ \ f'(0) \end{cases}$



② si $f : [0, \pi] \to \mathbb{K}$, $\exists !\ \bar{f}$ 2π-périodique paire / $\forall x \in [0, \pi]$, $\bar{f}(x) = f(x)$



($\exists !\ \bar{f}$ 2π-périodique impaire / $\forall x \in [0, \pi]$, $\bar{f}(x) = f(x)$)
$\iff f(0) = f(\pi) = 0$

$CM_{2\pi}(\mathbb{K})$: $\mathbb{K}$-algèbre des fct° 2π-périodiques, continues par morceaux
$C_{2\pi}(\mathbb{K})$: continues
$CM^1_{2\pi}(\mathbb{K})$: de classe C^1 par m

Pp 1) si $f \in CM_{2\pi}$ alors $\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt$ ne dépend pas de a

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt$ $\quad u = t - 2\pi$

$= \int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \int_0^a f(u)\,du - \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$

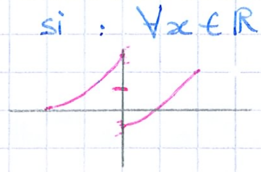
2) si $f \in CM_{2\pi}$ alors f est bornée

sur $[0, 2\pi]$, f est bornée :
$\exists M \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in [0, 2\pi]$, $|f(x)| \leq M$
$\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in [0, 2\pi]$ / $y - x \in 2\pi\mathbb{Z}$ $\quad y = k2\pi + x$
donc $f(y) = f(x)$ $\quad f(k2\pi + x) = f(x)$
d'où $|f(y)| = |f(x)| \leq M$

3) si $f \in C_{2\pi}$ alors f est unif^t continue

2. conditions de Dirichlet

$f \in CM_{2\pi}$, f vérifie les cond. de Dirichlet si : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right)$



$\mathcal{D}_{2\pi}$: ens. des fct° $CM_{2\pi}$ qui vérifient Dirichlet
↳ $\mathbb{K}$ algèbre

$C_{2\pi} \subset \mathcal{D}_{2\pi} \subset CM_{2\pi}$

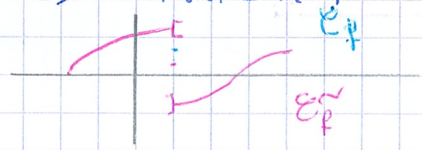
3. régularisée

$f \in CM_{2\pi}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right)$

alors si f continue en $x \Rightarrow \tilde{f}(x) = f(x)$

$\tilde{f} \in CM_{2\pi}$

$\in \mathcal{D}_{2\pi}$



f et $\tilde{f}$ coïncident partout où la f est continue

$\forall x \in \mathbb{R}$, si f est continue en x
alors f est continue sur un voisinage de x
$(\exists \varepsilon > 0 \,/\, f$ continue sur $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[)$
$\forall y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, $f(y) = \tilde{f}(y)$
$f(x^+) = \tilde{f}(x^+)$, $f(x^-) = \tilde{f}(x^-)$
$f(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x^-) + \tilde{f}(x^+)) = \tilde{f}(x)$

rem : * si $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ alors $\tilde{f} = f$

* $\begin{array}{l} CM_{2\pi} \longrightarrow CM_{2\pi} \\ f \longmapsto \tilde{f} \end{array}$ est linéaire, un projecteur d'image $\mathcal{D}_{2\pi}$ $(\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f})$

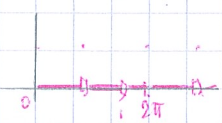
II Produit scalaire, structure préhilbertienne

1. $\forall (f,g) \in CM_{2\pi}^2$, on pose $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f}(t)\, g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} \overline{f} g$

(si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} fg$)

Pp 1) $(\,|\,)$ est une forme sesqui hermitienne positive

2) $\forall f \in CM_{2\pi}$, $(f|f) = 0 \iff \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |f|^2(t)\, dt = 0$



$\iff \forall x \in [0, 2\pi]$, ($f$ continue en $x \Rightarrow f(x) = 0$)

$\iff f$ nulle sauf en ses pts de discontinuité

($f(a) \neq 0 \Rightarrow a$ pt de discontinuité)

3) $(C_{2\pi}, (\,|\,))$ est un esp. préhilbertien complexe (réel)

4) $(\mathcal{D}_{2\pi}, (\,|\,))$ - - - - - - - - - - - -

2. semi-norme de la convergence en moyenne quadratique

$\forall f \in CM_{2\pi}$, $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}$ ce n'est pas une norme car il manque la P(p) de séparation

norme de la CV unif. $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in [0, 2\pi]\}$
$= \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}$

semi-norme de la CV en $\overline{m}$: $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt = (|f| \,|\, 1)$

comparaison : $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$

- Cauchy-Schwarz : $\left|\int_0^{2\pi} f(t) g(t)\right|^2 \leq \int_0^{2\pi} f(t)\overline{f}(t) dt \int_0^{2\pi} g(t)\overline{g}(t) dt$ avec $g = 1$

donc $\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt}\,\sqrt{2\pi}$ d'où $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$

ou

$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\, 1\, dt = (|f| \,|\, 1) \leq \|f\|_2 \|1\|_2 = \|f\|_2$

$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\varphi(y)} = \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}$
$\leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} = \|x\|_2 \|y\|_2$

ici $\begin{cases} x \leftarrow |f| \\ y \leftarrow 1 \end{cases}$ $(|f| \,|\, 1) \leq \|f\|_2 \|1\|_2$

- $\forall t \in [0, 2\pi]$ $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$

$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |f|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} \|f\|_\infty^2 = \|f\|_\infty^2$

donc $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$

3. calculs

$(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} e^{imt} dt}^{(e^{int} | e^{imt})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = I$

si $m = n$, $I = 1$

si $m \neq n$, $I = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)}\right]_0^{2\pi} = 0$

donc la famille $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $C_{2\pi}$ $(\mathcal{C}\Pi_{2\pi}, \mathcal{D}_{2\pi})$

$(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt}_{(\cos nt | \cos mt)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n+m)t + \cos(n-m)t}{2}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n=m=0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } n=m\neq 0 \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-\cos(n+m)t + \cos(n-m)t}{2}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n=m=0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } n=m\neq 0 \\ 0 & \text{si } n\neq m, n\neq 0, m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n=0 \end{cases}$

$(\sin nt | \sin mt)$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt)\cos(mt)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(n+m)t + \sin(n-m)t}{2}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n\neq 0 \quad m=0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \quad m\neq 0 \end{cases}$

$(\sin nt | \cos mt)$

donc $(t \mapsto 1, t \mapsto \cos(nt), t \mapsto \sin(nt))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale

non orthonormale car : $\begin{cases} \|t \mapsto 1\|_2 = 1 \\ \|t \mapsto \cos(nt)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(nt)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t + \frac{\sin(2nt)}{2}}{2}\right]_0^{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \|t \mapsto \sin(nt)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

III Polynômes trigonométriques - séries trigonométriques

$N \in \mathbb{N}$

* $\mathcal{P}_N = \text{Vect}\,(t \mapsto e^{int}, n \in \mathbb{Z}, -N \leq n \leq N)$: ens. des poly. trigo de deg N (complexes)

$\mathcal{P} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_N$: algèbre des poly. trigo

$\mathcal{P} \subset C_{2\pi}$

donc $(\mathcal{P}, (|))$ est un esp. préhilbertien (complexe)

$\forall P \in \mathcal{P}_N$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists (c_n)_{-N\leq n\leq N} \in \mathbb{C}^{2N+1}$ / $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$

$= c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_{-n} e^{-int} + c_n e^{int})$

$(c_n)_{-N\leq n\leq N}$ sont les coeff. de P : $c_n = (e^{int} | P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} P(t)\,dt$

* $\mathcal{P}_N = \text{Vect}\,(t \mapsto 1, t \mapsto \cos(nt), t \mapsto \sin(nt), 1 \leq n \leq N)$

$\mathcal{P} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}^*} \mathcal{P}_N$: algèbre des poly. trigo ($N \in \mathbb{N}^*$ car c_0 est obtenu avec $t \mapsto 1$)

$\forall P \in \mathcal{P}_N$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists a_0 \in \mathbb{K}$, $\exists (a_n, b_n)_{1\leq n\leq N} \in \mathbb{K}^{2N}$ /

$\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$

$a_0, a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ sont les coeff de P

$\begin{cases} n \geq 1 & (\cos(nt) | P) = a_n (\cos(nt) | \cos(nt)) = \frac{a_n}{2} \\ & (\sin(nt) | P) = b_n (\sin(nt) | \sin(nt)) = \frac{b_n}{2} \\ n=0 & (1 | P) = \frac{a_0}{2} \end{cases}$

donc $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & a_n = 2(\cos(nt) | P) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & b_n = 2(\sin(nt) | P) \end{cases}$

relations : $N \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}_N$,

$\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_{-n} e^{-int} + c_n e^{int}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$

$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, & c_n = (e^{int} | P) = (\cos(nt) + i\sin(nt) | P) = (\cos(nt) | P) - i(\sin(nt) | P) + \bar{i}(\dots\dots|\dots) \\ & c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} \\ n=0 : & c_0 = \frac{a_0}{2} \end{cases}$

$(-n) \in \mathbb{N}^*$, $c_n = (e^{int} | P) = (\cos(nt) + i\sin(nt) | P) = (\cos(-nt) - i\sin(-nt) | P)$

$c_n = (\cos(-nt) | P) - \bar{i}(\sin(-nt) | P) = \frac{a_{-n} + i b_{-n}}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 2\,(\cos(nt)\,|P) = 2\left(\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}\,|P\right) = C_n + C_{-n}$

$b_n = 2\,(\sin(nt)\,|P) = 2\left(\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}\,|P\right) = \frac{1}{i}\,(e^{int}-e^{-int}\,|P) = i\,(C_n - C_{-n})$

$n=0 \qquad a_0 = 2C_0$

Pythagore :

$$\|P\|_2^2 = (P|P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(t)}\,P(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[C_0 + \sum_{n=1}^{N}(C_{-n}e^{-int}+C_n e^{int})\right]\left[C_0+\sum_{n=1}^{N}(C_{-n}e^{int}+C_n e^{-int})\right]dt$$

$$= |C_0|^2 + \sum_{n=1}^{N}(|C_{-n}|^2+|C_n|^2) = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{N}\frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2}$$

séries trigonométriques :

$$C_0 + \sum_{n\geq 1}(C_{-n}e^{-int}+C_n e^{int})$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt))$$

les séries trigo CV $\Leftrightarrow$ les suites des sommes partielles CV

dans ce cas :

$$S(t) = C_0 + \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}(C_{-n}e^{-int}+C_n e^{int}) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_{-n}e^{-int}+C_n e^{int})$$

$$= \frac{a_0}{2} + \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt))$$

$S_N(t)$: somme partielle d'ordre N : $S_N(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_{-n}e^{-int}+C_n e^{int})$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt))$$

Pp) si la série trigo CV unif^t sur $\mathbb{R}$ vers S alors $S \in \mathcal{C}_{2\pi}$

critère :

la série trigo $\begin{cases} C_0 + \sum(C_{-n}e^{-int}+C_n e^{int}) \\ \frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)) \end{cases}$ CV normalement

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sum(|C_n|+|C_{-n}|) \\ \sum(|a_n|+|b_n|) \end{cases} \text{ CV}$$

- soit $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto C_{-n}e^{-int}+C_n e^{int} = a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt) \end{vmatrix}$

  $*\ \|u_n\|_\infty \leq \underbrace{\|C_{-n}e^{-int}\|_\infty}_{\sup\{|C_{-n}e^{-int}|,\ t\in\mathbb{R}\}} + \|C_n e^{int}\|_\infty = |C_{-n}|+|C_n|$

  $*\ \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 /\ C_{-n} = |C_{-n}|e^{i\alpha},\quad C_n = |C_n|e^{i\beta}$

  $\forall t\in\mathbb{R},\ u_n(t) = |C_{-n}|e^{i(\alpha-nt)}+|C_n|e^{i(\beta+nt)} = e^{i(\alpha-nt)}\left(|C_{-n}|+|C_n|e^{\beta-\alpha+2nt}\right)$

  je pose $t_0 = -\frac{\beta-\alpha}{2n}$, $u_n(t_0) = e^{i(\alpha-nt_0)}\left(|C_{-n}|+|C_n|\right)$

  $|u_n(t_0)| = \underbrace{|e^{i(\alpha-nt_0)}|}_{1}\,\big||C_{-n}|+|C_n|\big| = |C_{-n}|+|C_n|$

  donc $\|u_n\|_\infty \geq |C_{-n}|+|C_n|$

  d'où $\|u_n\|_\infty = |C_{-n}|+|C_n|$

  Ainsi, $\sum u_n$ CV normal^t $\Leftrightarrow \sum\|u_n\|_\infty$ CV $\Leftrightarrow \sum(|C_n|+|C_{-n}|)$ CV

$C_n = \frac{a_n+ib_n}{2} = \frac{a_n-ib_n}{2}$

$C_{-n} = \frac{a_{-(-n)}+ib_{-(-n)}}{2}$

- $\|u_n\|_\infty = |C_{-n}|+|C_n| = \left|\frac{a_n+ib_n}{2}\right|+\left|\frac{a_n-ib_n}{2}\right| \leq \frac{|a_n|+|b_n|}{2}+\frac{|a_n|+|b_n|}{2}$

  $\leq |a_n|+|b_n|$

  $|a_n|+|b_n| = |C_n+C_{-n}|+|i(C_n-C_{-n})| \leq |C_n|+|C_{-n}|+|C_n|+|C_{-n}| = 2\|u_n\|_\infty$

  donc $\|u_n\|_\infty \leq |a_n|+|b_n| \leq 2\|u_n\|_\infty$

  Ainsi, $\sum u_n$ CV normal^t $\Leftrightarrow \sum\|u_n\|_\infty$ CV $\Leftrightarrow \sum(|a_n|+|b_n|)$ CV

IV Coefficients de Fourier

$f \in CM_{2\pi}$,
$n \in \mathbb{Z}$, n ième coeff. de Fourier exponentiel de f : $c_n = (e^{int} | f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) dt$
$n \in \mathbb{N}$, ... trigo ...... :

$(b_0 = 0)$ $\quad a_n = 2(\cos(nt) | f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt) f(t) dt$
$b_n = 2(\sin(nt) | f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt) f(t) dt$

Pp 1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$

$a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$

2) f paire : $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(nt) f(t)}_{\text{impaire}} dt = 0$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(nt) f(t)}_{\text{paire}} dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt) f(t) dt$

$c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2}$

3) f Impaire : $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt) f(t) dt$ $\quad a_n = 0$ $\quad c_{-n} = -c_n = \frac{ib_n}{2}$

* notat° : les coeff. dépendent de f, $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$

* : $\begin{array}{l} CM_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto \text{coeff de Fourier} \end{array}$ sont des applicat° $\mathbb{K}$-linéaires

: $\begin{array}{l} CM_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ f \longmapsto (\text{coeff de Fourier})_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$ .... $\mathbb{K}$-linéaires
$n \in \mathbb{N}^*$ pour $b_n(f)$

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n(\bar{f}) = (e^{int} | \bar{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} \bar{f}(t) dt = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int} f(t) dt} = \overline{(e^{-int} | f)} = \overline{c_{-n}(f)}$

de m̂, $c_{-n}(\bar{f}) = \overline{c_n(f)}$ $\quad a_n(\bar{f}) = \overline{a_n(f)}$ $\quad b_n(\bar{f}) = \overline{b_n(f)}$

* $f^* : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(-x) \end{array}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n(f^*) = (e^{int} | f^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(-t) dt$ $\quad u = -t \quad du = -dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inu} f(u)(-du) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{0} e^{inu} f(u) du$

$= (e^{-inu} | f) = c_{-n}(f)$ $\quad$ donc $c_{-n}(f^*) = c_n(f)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n(f^*) = 2(\cos(nt) | f^*) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt) f(-t) dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{-2\pi} \cos(nu) f(u)(-du)$
$= a_n(f)$

$b_n(f^*) = 2(\sin(nt) | f^*) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt) f(-t) dt = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(-nu) f(u) du$
$= -b_n(f)$

* $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x - \alpha) \end{array}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f_\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f_\alpha(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t - \alpha) dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in(u+\alpha)} f(u) du = e^{-in\alpha} c_n(f)$

* $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{|e^{-int} f(t)|}_{\underbrace{|e^{-int}|}_{1} |f(t)|} dt = \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n(f)| = \left| \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt) f(t) dt \right| \leq 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{|\cos(nt) f(t)|}_{\underbrace{|\cos(nt)|}_{\leq 1} |f(t)|} dt \leq 2\|f\|_1 \leq 2\|f\|_\infty$

$|b_n(f)| \leq 2\|f\|_1 \leq 2\|f\|_\infty$

corollaire : si $f \in CM_{2\pi}$, $\quad a_n(f) = O(1)$ $\quad c_n(f) = O(1)$ $\quad$ (bornées)
$b_n(f) = O(1)$ $\quad c_{-n}(f) = O(1)$

* soit $\begin{cases} f \in CM_{2\pi} \\ f \text{ continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$ $D(f)$: pseudo-dérivée de f

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(D(f)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} D(f)(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[e^{-int}f(t)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -in\,e^{-int} f(t)\,dt$

$= in\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\,dt = in\,c_n(f)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(D(f)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt)\,D(f)(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\cos(nt) f(t)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -n\sin(nt) f(t)\,dt$

$= n\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt) f(t)\,dt = n\,b_n(f)$

$b_n(D(f)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\,D(f)(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\sin(nt) f(t)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} n\cos(nt) f(t)\,dt = -n\,a_n(f)$

corollaire amélioré : si $f \in CM^1_{2\pi} \cap C_{2\pi}$, $a_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $\left(\begin{array}{l} a_n(f) = -\frac{1}{n} b_n(D(f)) \\ |-n\,a_n(f)| = b_n(D(f)) \text{ bornée} \end{array}\right)$

b_n, ...

en empilant cette P_p : (en empilant les intég. par parties).

toutes les dérivées, sauf la dernière doivent être continues

si $f \in CM^k_{2\pi} \cap C^{k-1}_{2\pi}$, $a_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

série de Fourier de f :

$f \in CM_{2\pi}$, $c_0(f) + \sum_{n\geq 1}\left(c_{-n}(f)e^{-int} + c_n(f)e^{int}\right)$ est la série de $\mathcal{F}$ de f

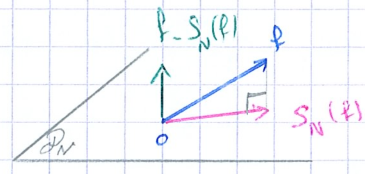
somme partielle : $S_N(f) : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto c_0(f) + \sum_{n=1}^{N}\left(c_{-n}(f)e^{-int} + c_n(f)e^{int}\right) \end{array}\right.$

V Convergence en moyenne quadratique

1. $f \in C_{2\pi}$

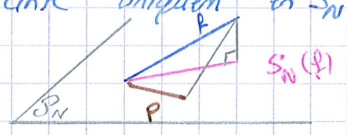
P_p 1) $S_N(f)$: projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_N$

2) $S_N(f)$: unique polynôme (vecteur) de $\mathcal{P}_N$ / $f - S_N(f)$ orthogonal à $\mathcal{P}_N$



3) $\inf\{\|f-P\|_\infty, P \in \mathcal{P}_N\} = \|f - S_N(f)\|_2$ (borne atteinte uniquement en $S_N(f)$)

4) $\forall P \in \mathcal{P}_N$, $P \neq S_N(f) \Rightarrow \|f-P\|_2 > \|f - S_N(f)\|_2$



$\left(\|f-P\|_2^2 = \|f - S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f) - P\|_2^2\right)$

2. inégalité de Bessel

pour $P = 0 \in \mathcal{P}_N$ $\quad \|f\|_2 \geq \|S_N(f)\|_2 \quad \|f\|_2^2 \geq \|S_N(f)\|_2^2$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}f(t)\,dt \geq |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2\right)$

$\geq \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{n=1}^{N}\frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2}$

corrolaires : c1) $\forall f \in C_{2\pi}$, les séries $|c_0|^2 + \sum_{n\geq 1}(|c_{-n}|^2 + |c_n|^2)$ et $\frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n\geq 1}\frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}$ CV et ont $\hat{m}$ somme

(séries à termes $\oplus$ de sommes partielles bornées par qqc indép de n)

c2) **th de Riemann Lebesgue**

si $f \in C_{2\pi}$ alors $\lim_{n\to+\infty}$ coeff de $\mathcal{F}_{(f)} = 0$

$a_n(f) = o(1)$

⋮

la série CV donc le terme géné $|c_{-n}|^2 + |c_n|^2 \longrightarrow 0$

donc $c_{-n} \to 0$, $c_n \to 0$, de $\hat{m}$ $a_n \to 0$, $b_n \to 0$

c3) si $f \in C^k_{2\pi}$, $a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $c_{-n}(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

3- th de Parseval

si $f \in C_{2\pi}$ alors $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ CV en m̄ quad vers f : $\lim\limits_{N\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$

soit $f \in C_{2\pi}$, soit $\varepsilon > 0$,
th de Weierstrass trigo :
$\exists P \in \mathcal{P} \,/\, \|f - P\|_\infty < \varepsilon$ or $\|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_\infty$
$\exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, P \in \mathcal{P}_{N_0}$
alors, $\|f - S_{N_0}(f)\|_2 \leq \|f - P\|_2 < \varepsilon$
$\forall N \in \mathbb{N},\ N \geq N_0 \Rightarrow \mathcal{P}_{N_0} \subset \mathcal{P}_N$
$\Rightarrow \{\|f - P\|_2, P \in \mathcal{P}_{N_0}\} \subset \{\|f - P\|_2, P \in \mathcal{P}_N\}$
$\Rightarrow \inf\{\|f - P\|_2, P \in \mathcal{P}_{N_0}\} \geq \inf\{\|f - P\|_2, P \in \mathcal{P}_N\}$
$\Rightarrow \|f - S_{N_0}(f)\|_2 \geq \|f - S_N(f)\|_2$
$\Rightarrow \|f - S_N(f)\|_2 < \varepsilon$

corollaire : soit $f \in C_{2\pi}$

alors, $|c_0|^2 + \sum_{n\geq 1} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$ CV

$\frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}$

et ont pour somme $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$

$\forall N \in \mathbb{N},\ \|f\|_2^2 = \|f - S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f)\|_2^2$ pour $P = 0$
Parseval : $\lim\limits_{N\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2^2 = 0$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \|S_N(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$
avec $\|S_N(f)\|_2^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{N} (|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2)$

4- $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,/\, \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n \in \mathbb{C},\ |c_0|^2 + \sum_{n\geq 1}(|c_{-n}|^2 + |c_n|^2) \text{ CV}\}$

Pp 1) $\ell^2(\mathbb{Z})$ est un ev

- $\ell^2(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$
- $\ell^2(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$
- $\forall ((c_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (c'_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \in \ell^2(\mathbb{Z})^2,\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,$

$\forall n \in \mathbb{Z},\ |\alpha c_n + \beta c'_n|^2 \leq (|\alpha||c_n| + |\beta||c'_n|)^2$
$\leq |\alpha|^2|c_n|^2 + |\beta|^2|c'_n|^2 + 2|\alpha||\beta||c_n||c'_n|$
or, $(|\alpha||c_n| - |\beta||c'_n|)^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow |\alpha|^2|c_n|^2 + |\beta|^2|c'_n|^2 - 2|\alpha||\beta||c_n||c'_n| \geq 0$
$\Leftrightarrow 2|\alpha||\beta||c_n||c'_n| \leq |\alpha|^2|c_n|^2 + |\beta|^2|c'_n|^2$
ainsi, $|\alpha c_n + \beta c'_n|^2 \leq 2|\alpha||c_n|^2 + 2|\beta||c'_n|^2$
donc $|\alpha c_0 + \beta c'_0|^2 + \sum_{n\geq 1} (|\alpha c_{-n} + \beta c'_{-n}|^2 + |\alpha c_n + \beta c'_n|^2)$ CV

2) $\left|\begin{array}{l} \ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ ((c_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (c'_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \longmapsto \bar{c}_0 c'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{c}_{-n} c'_{-n} + \bar{c}_n c'_n) \end{array}\right.$ est | bien définie | un produit scalaire

* $|\bar{c}_{-n} c'_{-n} + \bar{c}_n c'_n| \leq |c_{-n}||c'_{-n}| + |c_n||c'_n| \leq \frac{1}{2}(|c_{-n}|^2 + |c'_{-n}|^2 + |c_n|^2 + |c'_n|^2)$
$|\bar{z}| = |z|$ $\quad (|c_n| - |c'_n|)^2 \geq 0$
donc CV $\quad \Rightarrow |c_n|^2 + |c'_n|^2 \geq 2|c_n||c'_n|$
* sesquilin. hermitienne
* $|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = 0$

$\Psi : \left|\begin{array}{l} C_{2\pi} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}\right.$ est | linéaire | conserve le produit scalaire

(ens. d'arrivée : $\ell^2(\mathbb{Z})$: $\forall f \in C_{2\pi}$, la série CV (Bessel))
$\|f\|_2^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2) = \|\Psi(f)\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}$

corollaire c1) Ψ est injective

$f \in \operatorname{Ker}\Psi \Leftrightarrow \Psi(f) = 0 \Leftrightarrow (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite nulle
$\Leftrightarrow f = 0$
donc $\operatorname{Ker}\Psi = \{0\}$

c2) $\forall (f,g)\in C_{2\pi}^2$, $f=g \iff \Psi(f)=\Psi(g)$

$\iff \forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f)=c_n(g)$

$\iff \forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} a_n(f)=a_n(g)\\ b_n(f)=b_n(g)\end{cases}$

c3) $\forall (f,g)\in C_{2\pi}^2$, $(f|g)=(\Psi(f)|\Psi(g))_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \overline{c_0}(f)c_0(g)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)+\overline{c_n(f)}c_n(g)\right)$

(on peut calculer le prod. scal. de 2 fct en connaissant leurs coeff. uniquement)

5 - extension à $CM_{2\pi}$

$(CM_{2\pi}, (\,|\,))$ n'est pas préhilbertien

$\|\ \|_2$ est une semi-norme

$\forall f\in CM_{2\pi}$, $\forall N\in\mathbb{N}$, $\inf\{\|f-P\|_2,\ P\in\mathcal{P}\}=\|f-S_N(f)\|_2$

$\forall P\in\mathcal{P}_N,\ P\neq S_N(f),\ \|f-P\|_2 > \|f-S_N(f)\|_2$

$\lim_{N\to+\infty}\|f-S_N(f)\|_2=0$

$\|f\|_2^2=|c_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}(|c_{-n}|^2+|c_n|^2)=\frac{|a_0|^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2}$

$\forall (f,g)\in CM_{2\pi}^2$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f)=c_n(g) \iff \|f-g\|_2^2=0$

$\iff$ f et g coïncident sur $[0,2\pi]$ sauf en un nb fini de pts

th de Riemann Lebesgues,

$\forall f\in CM_{2\pi}$, $a_n(f)=o(1)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$, $c_{-n}(f)=o(1)$

VI Convergence ponctuelle

1. th de Dirichlet

si $f\in CM_{2\pi}^1$ alors la série de Fourier de f CV ponctuellement vers la régularisée de f :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad c_0(f)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{-n}(f)e^{-inx}+c_n(f)e^{inx}\right)=\frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

① noyau de Dirichlet

$N\in\mathbb{N}$, $D_N : t\longmapsto \sum_{n=-N}^{N}e^{int}$

$D_N\in\mathcal{P}_N$

D_N est pair

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D_N(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\overbrace{\sum_{n=-N}^{N}}^{\text{somme finie}}\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{int}\,dt}_{0\text{ sauf pour } n=0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i0t}\,dt=1$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}D_N(t)\,dt=\frac{1}{2}$$

$t\notin 2\pi\mathbb{Z}$ $(e^{it}\neq 1)$ $D_N(t)=\sum_{n=-N}^{N}(e^{it})^n=\frac{e^{-iNt}-e^{i(N+1)t}}{1-e^{it}}$

$$D_N(t)=\frac{e^{i\frac{-Nt+(N+1)t}{2}}\left(e^{-i\frac{Nt+(N+1)t}{2}}-e^{i\frac{Nt+(N+1)t}{2}}\right)}{e^{it/2}\left(e^{-it/2}-e^{it/2}\right)}=\frac{\sin\frac{(2N+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

② convolution :

$$x\in\mathbb{R},\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_N(t)\,dt \overset{x-t=u}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi}f(u)D_N(x-u)(-du)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_N(x-t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{n=-N}^{N}e^{i(x-t)n}\,dt$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-int}f(t)\,dt\right)e^{inx}=\sum_{n=-N}^{N}c_n(f)e^{inx}=S_N(f)(x)$$

③ $S_N(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_N(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x-t)D_N(t)\,dt+\int_0^{\pi}f(x-t)D_N(t)\,dt\right)$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\pi}^{0}f(x+u)D_N(u)(-du)+\int_0^{\pi}f(x-t)D_N(t)\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]D_N(t)\,dt \qquad (1)$$

et $\frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left([f(x^+)+f(x^-)\right]D_N(t)\,dt \qquad (2)$

(1) - (2) : $S_N(f)(x)-\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)-f(x^+)+f(x-t)-f(x^-)\right]D_N(t)\,dt$

$$S_N(f)(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+t)-f(x^+)]\,D_N(t)\,dt}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x-t)-f(x^-)]\,D_N(t)\,dt}_{T_2}$$

④ T_1 : $\lim\limits_{t\to 0^+} [f(x+t)-f(x^+)] = 0$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x^+)-0}{t} = f'_d(x) \left(= \lim_{t\to x^+} f'(t)\right)$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{\underbrace{\sin\frac{t}{2}}_{\frac{t}{2}+o(t^2)}} = 2f'_d(x)$$

$$g : \left|\begin{array}{l} [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x+t)-f(x^+)}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t\neq 0 \\ 2f'_d(x) & \text{si } t=0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$g \in C\Pi([0,\pi],\mathbb{C})$
on peut donc l'intégrer sur $[0,\pi]$

$$T_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x^+)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(t)\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \underbrace{g(t)\sin\frac{t}{2}}_{C\Pi([0,\pi])}\cos(Nt)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(t)\cos\frac{t}{2}\sin(Nt)\,dt$$

th Riemann-Lebesgues : $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^\pi g(t)\sin\frac{t}{2}\cos(Nt)\,dt = \lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^\pi g(t)\cos\frac{t}{2}\sin(Nt)\,dt = 0$

donc $\lim\limits_{N\to+\infty} T_1 = 0$

⑤ de m, $\lim\limits_{N\to+\infty} T_2 = 0$

⑥ ccl : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$

Corollaire (1) si $\begin{cases} f\in C\Pi^1_{2\pi} \\ f \text{ vérifie les cond. de Dirichlet}\end{cases}$
alors la série de $\mathcal{F}$ de f CV ponct^t vers f

(2) si $\begin{cases} f\in C\Pi^1_{2\pi} \\ f \text{ continue}\end{cases}$

(car f continue $\Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+)) \Rightarrow$ f vérifie les cond. de Dirichlet)

VII Convergence normale

si $\begin{cases} f\in C\Pi^1_{2\pi} \\ f\in C_{2\pi}\end{cases}$ alors les séries $|c_0(f)| + \sum\limits_{n\geq 1}(|c_{-n}(f)|+|c_n(f)|)$ CV

$$\left|\frac{a_0(f)}{2}\right| + \sum_{n\geq 1}(|a_n(f)|+|b_n(f)|)$$

$$\left(|c_n(D(f))| - \frac{1}{|n|}\right)^2 \geq 0$$

$$c_n(D(f))^2 + \frac{1}{|n|^2} - \frac{2}{|n|}c_n(D(f)) \geq 0$$

$\forall n\in\mathbb{Z}$, $c_n(D(f)) = in\,c_n(f)$
$\forall n\in\mathbb{Z}^*$, $|c_n(f)| = \frac{|c_n(D(f))|}{|n|} \leq \frac{1}{2}\left(|c_n(D(f))|^2 + \frac{1}{|n|^2}\right)$

$D(f)\in C\Pi_{2\pi}$ donc, par Parseval : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|c_n(D(f))|^2 + |c_{-n}(D(f))|^2)$ CV

donc $\forall N\in\mathbb{N}$,

$$|c_0(f)| + \sum_{n=1}^{N}(|c_{-n}(f)|+|c_n(f)|) \leq |c_0(f)| + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{n^2} + |c_{-n}(D(f))|^2 + |c_n(D(f))|^2\right)$$

$$\leq |c_0(f)| + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2} + |c_{-n}(D(f))|^2 + |c_n(D(f))|^2\right)$$

donc CV

CV

th si $\begin{cases} f\in C\Pi^1_{2\pi} \\ f\in C_{2\pi}\end{cases}$ alors la série de Fourier CV normalem^t vers f sur $\mathbb{R}$.

Pr) précéd : $|c_0(f)| + \sum\limits_{n\geq 1}(|c_{-n}(f)|+|c_n(f)|)$ CV $\Leftrightarrow \frac{|a_0(f)|}{2} + \sum\limits_{n\geq 1}(|a_n(f)|+|b_n(f)|)$ CV

$\Leftrightarrow$ la série de $\mathcal{F}$ de f CV normal^t
et $f\in C\Pi^1_{2\pi}\cap C_{2\pi}$ donc la série de $\mathcal{F}$ CV ponct. vers f
Dirichlet

VIII Extension aux fonctions T-périodiques $T\in\mathbb{R}^{+*}$

$f : \mathbb{R}\to\mathbb{K}$ T-périodique
on pose la pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T}$
alors $g : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{K} \\ t\longmapsto f\left(\frac{t}{\omega}\right)\end{array}\right.$ est 2π-périodique

$$g(t+2\pi) = f\left(\frac{t+2\pi}{\omega}\right) = f\left(\frac{t}{\omega} + 2\pi\frac{T}{2\pi}\right) = f\left(\frac{t}{\omega}+T\right) = f\left(\frac{t}{\omega}\right) = g(t)$$

g 2π-pér $\iff$ f T-pér

conséquences :

* calcul des coeff. de $\mathcal{F}$:

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\quad c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-in\omega t} f(t)\,dt$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T \cos(n\omega t) f(t)\,dt$

$\quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T \sin(n\omega t) f(t)\,dt$

* séries de $\mathcal{F}$: $\quad c_0(f) + \sum_{n\geq 1} c_{-n}(f)e^{-in\omega t} + c_n(f)e^{in\omega t}$

$\quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)$

* th identiques

Parseval : si $f \in C_{2\pi}$ $\quad \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|c_{-n}|^2 + |c_n|^2\right)$

Dirichlet : si $f \in C\Pi^1_{2\pi}$ $\quad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{-n}e^{-inx} + c_n e^{inx}\right)$ ($\leftarrow$ régularisée)

$\to$ puis, pour $x = \ldots$ (1 valeur bien choisie)

1. parité
2. a_0 (a_1)
3. a_n

$\left((\text{coeff de } \mathcal{F})(f)\right)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sum$ coeff de $\mathcal{F}$ CV

$\sum a_n$ CV

pour appliquer Parseval si on n'a que $f \in C_{2\pi}$ sur $[0, 2\pi]$
il faut prouver que $f(2\pi^-) = f(0)$
ainsi la nouvelle fct est continue