Intégration sur un intervalle quelconque

I intervalle, $\mathring{I} \neq \emptyset$: $\begin{cases} I \neq 0, \\ I \neq \{\text{singleton}\} \end{cases}$ $\quad a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $\quad a < b$

I Fonctions intégrables à valeurs positives

$f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R}^+)$, f intégrable sur $I \iff \exists K \in \mathbb{R} \,/\, \forall \begin{cases} J \subset I \\ J \text{ segment} \end{cases}$, $\int_J f \leq K$

ds ce cas $\left\{ \int_J f,\ J \text{ segment} \subset I \right\}$ est une partie $\begin{cases} \text{non vide} \\ \text{majorée} \end{cases}$ de $\mathbb{R}$

donc possède une borne sup

on pose $\displaystyle\int_I f = \sup_{J \text{seg} \subset I} \int_J f$: intégrale sur I de f

encadrer : $K - \varepsilon \leq \int_I f \leq K$

ex : $\ast$ $f : \begin{array}{l} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$

f est continue, positive

$J = [a, b] \subset [0, +\infty[$ avec $0 \leq a \leq b$

$\int_J f = \int_a^b f(x)dx = \arctan b - \arctan a \leq \frac{\pi}{2}$

donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists b_0 \in \mathbb{R}^+ \,/\,$ $\arctan b_0 \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$

$J_0 = [0, b_0]$,

$\int_{J_0} f = \arctan b_0 \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ $\quad$ donc $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \underset{\text{sup}}{\leq} \int_I f \leq \frac{\pi}{2}$ $\quad$ d'où $\int_I f = \frac{\pi}{2}$

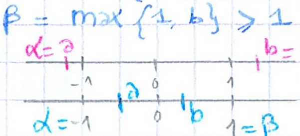
$\ast$ $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^4+1} \end{array}$

g est continue, positive

$J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a \leq b$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \text{si } -1 \leq x \leq 1, & 0 \leq g(x) \leq \frac{x^2}{1} \leq 1 \\ \text{si } x \geq 1, & 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{x^2} \\ \text{si } x \leq -1, & 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{x^2} \end{cases}$

soit $\begin{cases} \alpha = \min\{-1, a\} \leq -1 \\ \beta = \max\{1, b\} \geq 1 \end{cases}$



$\int_a^b f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_1^\beta f(x)dx$

$\leq \int_\alpha^{-1} \frac{dx}{x^2} + \int_{-1}^{1} dx + \int_1^\beta \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_\alpha^{-1} + 2 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\beta$

$\leq 1 + \frac{1}{\alpha} + 2 + 1 - \frac{1}{\beta} = 4 + \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{\beta}}_{<0} \leq 4$

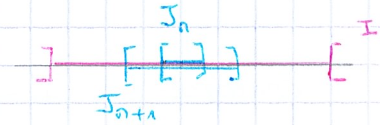
donc g est intégrable sur $\mathbb{R}$

suite exhaustive de segments de I : $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$

avec $\ast$ $\forall n \in \mathbb{N}$, J_n segment

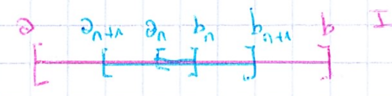
$\ast$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n \subset J_{n+1}$ (segments de $\oplus$ en $\oplus$ grands)

$\ast$ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$



rem : $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = [a_n, b_n]$,

$(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exhaustive $\iff$ $\begin{cases} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow \\ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow \\ \lim_{n \to +\infty} a_n = \inf I \\ \lim_{n \to +\infty} b_n = \sup I \\ \text{si } a \in I,\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est stationnaire} \\ \text{si } b \in I,\ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ....} \end{cases}$



$(a_n) \searrow$ bornée une fois que (a_n) atteint la valeur a elle devient cste égale à $a \in I$

si $a \notin I$, c'est une lim

th $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R}^+)$, $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suites exhaustives

les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) f intégrable sur I

(2) $\exists$ une primitive F de f, bornée sur I

(F continue sur I, $\forall x \in I$, f continue en x $\Rightarrow$ $\begin{cases} F \text{ dérivable en } x \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

(3) Toutes les primitives de f sont bornées sur I

(4) $\left(\int_{J_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et (5) CV

(6) F une primitive de f sur I $\Rightarrow$ F admet une lim finie en a et en b

ds ce cas, $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f = \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F$ (indép. de la suite exh.)

si $(J'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite exh. de segments de I, $\lim_{n\to+\infty} \int_{J'_n} f = \int_I f$

(2) $\Leftrightarrow$ (3) les primit. diffèrent d'une cste

(5) $\Rightarrow$ (4) } suite CV $\Rightarrow$ suite bornée

(6) $\Rightarrow$ (2) }

(4) $\Rightarrow$ (5) $\left(\int_{J_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ↗ int. sur des segm^t de + en + grands. Th de la lim. monotone (F ↗, bornée)

(2) $\Rightarrow$ (6) F ↗

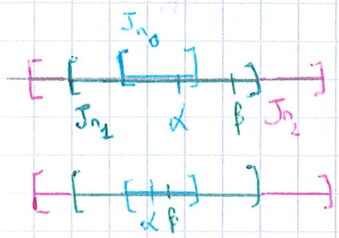
(1) $\Rightarrow$ (4) déf.

(4) $\Rightarrow$ (1) J segm^t inclus ds I, $J=[\alpha\beta]$, $\alpha\leq\beta$

$\alpha \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, $\beta\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$

$\exists n_0\in\mathbb{N} / \alpha\in J_{n_0}$ $\exists n_1\in\mathbb{N} / \beta\in J_{n_1}$

$n_2=\max\{n_0,n_1\}$, $\begin{cases}\alpha\in J_{n_2}\\ \beta\in J_{n_2}\end{cases}$ $[\alpha\beta]\subset J_{n_2}$



$\int_J f \leq \int_{J_{n_2}} f$ bornée $\leq K$

(1) $\Rightarrow$ (3) F primit qcq de f

$\exists K\in\mathbb{R} / \forall J$ segment $\subset I$, $\int_J f\leq K$

$c\in\mathring{I}$, $\forall x\in I$, $x>c \Rightarrow [c\,x]\subset I \Rightarrow \int_{[c\,x]} f\leq K$

$\Rightarrow F(x)-F(c)\leq K \Rightarrow F(c)\overset{F\nearrow}{\leq} F(x)\leq F(c)+K$

$c>x \Rightarrow F(c)-K\leq F(x)\leq F(c)$

donc $\forall x\in I$, $F(c)-K\leq F(x)\leq F(c)+K$

application

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites d'él^ts de I / ($\subset I^{\mathbb{N}}$) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1}\leq a_n\leq b_n\leq b_{n+1}\\ \lim_{n\to+\infty} a_n = a\\ \lim_{n\to+\infty} b_n = b\\ f\in CM(I,\mathbb{R}^+)\end{cases}$

f intégrable sur $I \Leftrightarrow \left(\int_{[a_nb_n]} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV

ds ce cas, $\int_I f = \lim_{n\to+\infty}\int_{[a_nb_n]} f = \lim_{n\to+\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$

conséquence : $I=[ab]$, $f\in CM(I,\mathbb{R}^+)$, f intégrable sur $I \Leftrightarrow$ sur $]ab[$, $]ab]$, $[ab[$

Pp $(f,g)\in CM(I,\mathbb{R}^+)$, $\lambda\in\mathbb{R}^+$

1) f, g intégrables sur I $\Rightarrow$ $f+g$ intégrable sur I, $\int_I (f+g) = \int_I f+\int_I g$

$(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite exh. de segm^ts,

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_{J_n}(f+g) = \int_{J_n} f+\int_{J_n} g \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f+\int_I g$

2) f intégrable sur I $\Rightarrow$ λf intégrable sur I, $\int_I \lambda f = \lambda\int_I f$

3) $f\begin{cases}\text{intégrable sur } I\\ \text{continue}\end{cases}$, $\int_I f = 0 \Rightarrow f=0$

$\int_{J_n} f\leq\int_I f = 0$, f nulle sur J_n donc sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$

4) $f\begin{cases}\text{intégrable sur } I\\ \in CM(I,\mathbb{R}^+)\end{cases}$, $\int_I f = 0 \Rightarrow f$ nulle sauf en ses pts de discontinuité

5) $I'\subset I$, $f_{/I'}$ est intégrable sur I, $\int_{I'} f_{/I'} = \int_I f.\chi_{I'}$

$\chi_{I'} : \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I' \\ 0 & \text{si } x \notin I' \end{cases} \end{vmatrix}$

J' segm^t $\subset I'$ alors $J' \subset I$

$\int_{J'} f_{/I'} = \int_{J'} f \leq \int_I f$

et $\int_{J'} f_{/I'} = \int_{J'} f \chi_{I'}$

$\int_{I'} f_{/I'} = \int_{I'} f\chi_{I'} = \int_I f \chi_{I'}$

6) $c \in \overset{\circ}{I}$, $\begin{cases} I_1 = I \cap]-\infty, c] \\ I_2 = I \cap [c, +\infty[\end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} I = I_1 \cup I_2 \\ I_1 \cap I_2 = \{c\} \end{array} \right)$

f intégrable sur I $\Longleftrightarrow$ f intégrable sur I_1 et sur I_2

ds ce cas $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$

$\forall J$ segm^t $\subset I$, $\begin{cases} J_1 = I_1 \cap J \\ J_2 = I_2 \cap J \end{cases}$

$\int_J f = \int_{J_1} f + \int_{J_2} f$

f intégrable sur I_1 et I_2 $\Rightarrow \exists (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \;/\!/ \begin{cases} \int_{J_1} f \leq K_1 \\ \int_{J_2} f \leq K_2 \end{cases}$ (indep. de J_1, J_2)

donc $\int_J f \leq K_1 + K_2$

donc f intégrable sur J

ex : * $I = [a, +\infty[$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : \begin{vmatrix} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\alpha \end{vmatrix}$ à quelle cond: f est-elle intégrable ?

à connaître $a > 0$

pb. en $+\infty$

$b > a$, $\int_a^b x^\alpha dx = \begin{cases} [\ln x]_a^b & \text{si } \alpha = -1 \\ \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^b & \text{si } \alpha \neq -1 \end{cases} = \begin{cases} \ln b - \ln a & \text{si } \alpha = -1 \\ \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \end{cases}$

lim finie qd $b \to +\infty$ $\Longleftrightarrow$ $\alpha < -1$ $\quad$ b (ce qui $\to +\infty$) est au dénom $\to 0$

* $I =]0, b]$, $b > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $g : \begin{vmatrix} I \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^\alpha \end{vmatrix}$

$\int_a^b x^\alpha dx = \begin{cases} \ln b - \ln a & \text{si } \alpha = -1 \\ \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \end{cases}$ a une lim finie qd $a \to 0^+$ ssi $\alpha > -1$

a (ce qui tend vers 0) est au num $\to 0$

* $I =]a, b]$, $b > a$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $h : \begin{vmatrix} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x-a)^\alpha \end{vmatrix}$

$\int_c^b (x-a)^\alpha dx = \begin{cases} \ln(b-a) - \ln(c-a) & \text{si } \alpha = -1 \\ \frac{\underbrace{(b-a)^{\alpha+1}}_{\text{cste pour } \alpha \text{ fixé}} - (c-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \end{cases}$ a une lim finie qd $c \to a^+$ ssi $\alpha > -1$

par ex : $\begin{vmatrix}]1, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}} \end{vmatrix}$ est intégrable $\left(-\frac{1}{2} > -1\right)$

7) $I = [a, b[$, $b > a$, $(f, g) \in C\Pi(I, \mathbb{R}^+)$, $\begin{cases} f \leq g \\ g \text{ intégrable} \end{cases} \Longrightarrow f$ intégrable, $\int_I f \leq \int_I g$

7') contraposée : $\begin{cases} f \leq g \\ f \text{ non intégrable} \end{cases} \Longrightarrow g$ non intégrable

8) $\begin{cases} f \in O_b(g) \\ g \text{ intégrable} \end{cases} \Longrightarrow f$ intégrable (idem pour $o_b(g)$)

$\exists M \in \mathbb{R}^+ / \; \exists \alpha \in [a, b[\; / \; \forall x \in [\alpha, b[, \; f(x) \leq M g(x)$

g intégrable $\Longrightarrow g$ intégrable sur $[\alpha, b[$

$\Longrightarrow Mg$ ....

$\Longrightarrow f$ ....

or $f \in C\Pi([a, \alpha])$ donc f intégrable sur $[a, \alpha]$

donc .... sur $[a, b[$

8') contraposée : $\begin{cases} f \in O_b(g) \\ f \text{ non intégrable} \end{cases} \Longrightarrow g$ non intégrable

9) si $f \underset{b}{\sim} g$ alors f et g sont de m̂ nature (mutuellm^t dominées)

$\| \; f \in O_b(g)$ et $g \in O_b(f)$

10) i. $\begin{cases} f \underset{b}{\sim} g \\ g \text{ intégrable} \end{cases} \Rightarrow \int_{[x,b[} f \underset{b}{\sim} \int_{[x,b[} g$ (équiv. petits, choses qui tendent vers 0)

ii. $\begin{cases} f \underset{b}{\sim} g \\ g \text{ non intégrable} \end{cases} \Rightarrow \int_{[a,x]} f \underset{b}{\sim} \int_{[a,x]} g$ (équiv. grands, choses qui tendent vers $+\infty$)

i. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in [a,b[\,/\, \forall t \in [\alpha, b[,$

$(\varepsilon < 1)$ $\quad 0 \leq g(t)(1-\varepsilon) \leq f(t) \leq g(t)(1+\varepsilon)$

or, g intégrable sur $[\alpha, b[$

on n'intègre que des fct^e positives

$\forall x \in [\alpha, b[, \quad \int_{[x,b[} (1-\varepsilon) g \leq \int_{[x,b[} f \leq \int_{[x,b[} (1+\varepsilon) g$

$\Leftrightarrow \int_{[x,b[} g - \varepsilon \int_{[x,b[} g \leq \int_{[x,b[} f \leq \int_{[x,b[} g + \varepsilon \int_{[x,b[} g$

$(f - g \in o(g))$ $\quad \Leftrightarrow -\varepsilon \int_{[x,b[} g \leq \int_{[x,b[} f - \int_{[x,b[} g \leq \varepsilon \int_{[x,b[} g$

ii. g non intégrable donc $\lim_{x \to b} \int_{[a,x]} g = +\infty$ (non majoré sinon c)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in [a,b[\,/\, \forall t \in [\alpha, b[, \quad 0 \leq g(t)(1-\varepsilon) \leq f(t) \leq g(t)(1+\varepsilon)$

$(\varepsilon < 1)$

$-\varepsilon \int_{[a,x]} g \leq -\varepsilon \int_{[\alpha,x]} g \leq \int_{[\alpha,x]} f - \int_{[\alpha,x]} g \leq \varepsilon \int_{[\alpha,x]} g \leq \varepsilon \int_{[a,x]} g$

$\int_{[a,\alpha]} f - \int_{[a,\alpha]} g \in \mathbb{R},$

$\exists \beta \in [\alpha, b[\,/\, \forall x \in [\beta, b[, \quad -\varepsilon \int_{[a,x]} g \leq \int_{[a,\alpha]} f - \int_{[a,\alpha]} g \leq \varepsilon \int_{[a,x]} g$

d'où $\forall x \in [\beta, b[, \quad -2\varepsilon \int_{[a,x]} g \leq \int_{[a,x]} f - \int_{[a,x]} g \leq 2\varepsilon \int_{[a,x]} g$

m̂ P_pl sur $]a,b]$ en a

corollaires, critères

* si $\begin{cases} f \in CM([a, +\infty[, \mathbb{R}^+) \\ \exists \alpha > 1 \,/\, \lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0 \end{cases}$ alors f est intégrable

$\| \begin{cases} f(x) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \\ \alpha < -1 \Rightarrow x^\alpha \text{ intégrable} \end{cases}$ donc $-\alpha > 1 \Rightarrow x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$ intégrable

* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $b > a$

si $\begin{cases} f \in CM(]a,b], \mathbb{R}^+) \\ \exists \alpha < 1 \,/\, \lim_{x \to a} (x-a)^\alpha f(x) = 0 \end{cases}$ alors f est intégrable

* $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a < b$

si $\begin{cases} f \in CM([a,b[, \mathbb{R}) \\ \exists \alpha < 1 \,/\, \lim_{x \to b} (x-b)^\alpha f(x) = 0 \end{cases}$ alors f est intégrable

ex : $f : \begin{vmatrix}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\ln x \end{vmatrix}$ $\quad g : \begin{vmatrix} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^- \\ x \longmapsto \ln x \end{vmatrix}$ $\quad h : \begin{vmatrix} [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\ln x} \end{vmatrix}$ $\quad i : \begin{vmatrix} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x^2} \end{vmatrix}$

* $\lim_0 \sqrt{x}(-\ln x) = 0 = \lim_0 x^{1/2}(-\ln x)$ $\quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} < 1 \\ f \text{ positive, continue} \end{cases}$ donc f intégrable

* $\lim_{+\infty} x \ln x = +\infty$ $\quad \frac{1}{x} \in o_{+\infty}(\ln x)$ $\quad \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable donc g non plus (g domine $\frac{1}{x}$)

$\lim_{+\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0 = \lim_{+\infty} \frac{1/x}{\ln x}$

* $\lim_{+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ $\quad \frac{1}{x} \in o_{+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ - - - - - - - - - -

$\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

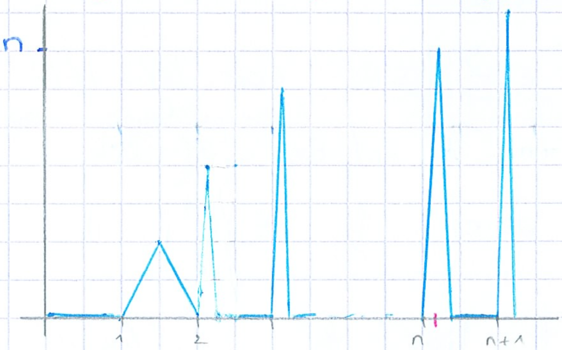
* $\lim_{+\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ $\quad e^{-x^2} \in o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\quad \frac{1}{x^2}$ est est intégrable donc i aussi

rappel : soit $f \in CM([0,+\infty[, \mathbb{R}^+)$ ↘

f intégrable $\Leftrightarrow$ la série $\sum f(n)$ CV

ds ce cas, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_{[0,+\infty[} f \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$

rem : ① $f \in CM([0,+\infty[, \mathbb{R}^+)$, f intégrable $\cancel{\Rightarrow}$ $\lim_{+\infty} f = 0$



$\int_J f \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$

f est intégrable mais $\lim_{n\to+\infty} f \neq 0$

② $f \in CM([0,+\infty[, \mathbb{R}^+)$, f ↘ intégrable $\Rightarrow \lim f = 0$

f ↘ $\Rightarrow \lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$ ou $-\infty$

si $\ell \neq 0$ alors $f \underset{+\infty}{\sim} \ell$ qui n'est pas intég.

$= -\infty$ $1 \in O_\infty(f)$ non intég.

II Fonctions intégrables à valeurs complexes (ou réelles)

$f \in CM(I, \mathbb{C})$ ou $f \in CM(I, \mathbb{R})$

alors, $|f| \in CM(I, \mathbb{R}^+)$

f est intégrable (sommable) si $|f|$ l'est

ds ce cas, on pose $N_1(f) = \int_I |f|$

Pp 1) $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$: ens. des fct° intégrables sur I

e.v, ss ev de $CM(I, \mathbb{K})$

- $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) \subset CM(I,\mathbb{K})$
- $0 \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ donc $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) \neq \emptyset$
- $\forall (f,g) \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})^2$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$,

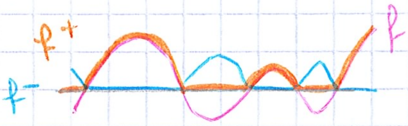
$|\alpha f + \beta g| \leq \underbrace{|\alpha||f| + |\beta||g|}_{\text{positive, intégrable}}$ donc $\leq K$

donc $|\alpha f + \beta g|$ est intégrable

donc $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

2) $\begin{cases} f \in CM(I,\mathbb{K}) \\ g \in CM(I,\mathbb{R}^+) \end{cases}$ si $\begin{cases} \forall x \in I \ |f(x)| \leq g(x) \\ g \text{ intégrable} \end{cases}$ alors $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

3) soit $f \in CM(I,\mathbb{R})$, $f^+ : \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \max\{f(x), 0\} \end{vmatrix}$, $f^- : \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\min\{f(x), 0\} \end{vmatrix}$



$\begin{cases} f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \\ f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \end{cases}$ donc $\begin{cases} f^+ \in CM(I,\mathbb{R}^+) \\ f^- \in CM(I,\mathbb{R}^+) \end{cases}$

et $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$

f intégrable $\Leftrightarrow$ f^+ et f^- le sont

ds ce cas, on pose $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$

$|f| = f^+ + f^-$ $\begin{cases} f^+ = |f| - \overbrace{f^-}^{\geq 0} \leq |f| \\ f^- = |f| - \underbrace{f^+}_{\geq 0} \leq |f| \end{cases}$ intégrable

4) soit $f \in CM(I,\mathbb{C})$, $\begin{cases} Re(f) : I \to \mathbb{R} \\ Im(f) : I \to \mathbb{R} \end{cases}$ et $\begin{cases} Re(f) \in CM(I,\mathbb{R}) \\ Im(f) \in CM(I,\mathbb{R}) \end{cases}$

f intégrable $\iff$ $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ le sont

ds ce cas, $\int_I f = \int_I \mathrm{Re} f + i \int_I \mathrm{Im} f$

$\Leftarrow$ $\forall x \in I$, $|f(x)| = |\mathrm{Re}(f(x)) + i\,\mathrm{Im}(f(x))| \leq |\mathrm{Re}(f(x))| + |\mathrm{Im}(f(x))|$

$\Rightarrow$ $\forall x \in I$, $|f(x)| \geq |\mathrm{Re}(f(x))|$

$|f(x)| \geq |\mathrm{Im}(f(x))|$

5) $\left| \begin{array}{l} \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto \int_I f \end{array} \right.$ est linéaire

6) $\forall f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$, alors $\bar{f} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$ (car $|\bar{f}| = |f|$)

et $\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}$ (on échange partie Re et Im)

$= \int_I \mathrm{Re} f - i \int_I \mathrm{Im} f$

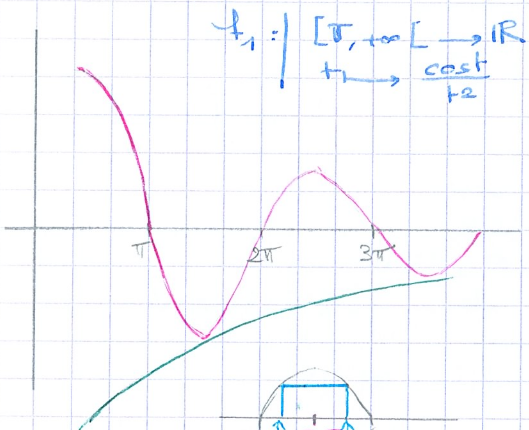
7) si $\begin{cases} f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}), \\ I' \subset I, \quad I' \text{ intervalle} \\ \quad \mathring{I'} \neq \emptyset \end{cases}$ alors, $f_{/I'} \in \mathcal{L}^1(I', \mathbb{K})$

8) si $\begin{cases} I = [a\, b[\\ f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \end{cases}$ alors $\int_I f = \lim_b \int_{[a\, x]} f$ (linéarité de lim)

⚠ pas de récip. : ce n'est pas parce que f a une lim qu'elle est intégrable = la lim peut exister sans que la fct° soit intégrable

$f : \left| \begin{array}{l} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$

soit $x > \pi$, $\int_\pi^x f(t)\, dt = \int_\pi^x \frac{1}{t} \sin t\, dt = \left[\frac{1}{t}(-\cos t)\right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$



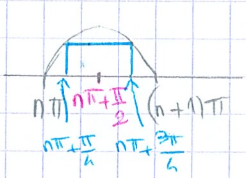
$f_1 : \left| \begin{array}{l} [\pi, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\cos t}{t^2} \end{array} \right.$ $f_1 \in \mathcal{C}\mathcal{M}([\pi, +\infty[, \mathbb{R})$ $|f_1(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ donc f_1 est intégrable

donc $\int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ admet une lim qd $x \to +\infty$ (P 8)

et $\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_\pi^x$ aussi

donc $\int_\pi^x f(t)\, dt$ ....

donc $\int_0^\pi f(t)\, dt$ ....



$n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$, $|\sin t| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{(n+1)\pi}$

$\int_{n\pi + \frac{\pi}{4}}^{n\pi + \frac{3\pi}{4}} |f(t)|\, dt \geq \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}\, dt}{2(n+1)\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4(n+1)}$

$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\, dt \geq \frac{\sqrt{2}}{4(n+1)}$

$\int_\pi^{n\pi} |f(t)|\, dt \geq \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

donc $\lim_{+\infty} \int_\pi^{n\pi} |f(t)|\, dt = +\infty$: f n'est pas intégrable

notat° : si $\begin{array}{l} a = \inf I \\ b = \sup I \\ f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \end{array}$ on note $\int_I f = \int_a^b f(t)\, dt$

$\forall c \in \mathring{I}$, $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt = -\int_b^c f(t)\, dt - \int_c^a f(t)\, dt = \dots \int_b^a f(t)\, dt$

rem : * $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}(I, \mathbb{K})$

si $\begin{cases} f \text{ intégrable} \\ (J_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ suite exh. de segm de } I \end{cases}$ alors, $\left(\int_{J_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$ CV

et $\lim_{n \to +\infty} \int_{J_n} f = \int_I f$

* $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$

$\left|\int_{J_n} f\right| \leq \int_{J_n} |f|$, f et $|f|$ sont intégrables

N

comparaisons : $I = [a,b[$

$f \in CM(I, \mathbb{K})$, $\varphi \in CM(I, \mathbb{R}^+)$

① si $f \in O_b(\varphi)$, alors φ intégrable $\Rightarrow$ f intégrable et $\int_{[x,b[} f = O_b\left(\int_{[x,b[} \varphi\right)$

φ non intégrable $\Rightarrow$ $\int_{[a,x]} f = O_b\left(\int_{[a,x]} \varphi\right)$

|| $\left|\int_{[x,b[} f\right| \leq \int_{[x,b[} |f|$ $\qquad \left|\int_{[a,x]} f\right| \leq \int_{[a,x]} |f|$ $\qquad$ on sait que $|f| \in \mathbb{R}^+$ est intégrable

② idem pour o_b !
rien pour les $\sim$ (si $f \sim \varphi$, f et φ sont intégrables en m̂ tps)

III Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

Pp 1) $\forall (f,g) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$
$N_1(\lambda f) = |\lambda| \, N_1(f)$

norme

2) $\forall f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \cap C^0(I, \mathbb{K})$, $N_1(f) = 0 \Rightarrow \int_I |f| = 0 \Rightarrow f = 0$

3) $\mathcal{L}^1_c(I, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) \cap C^0(I, \mathbb{K})$

$(\mathcal{L}^1_c(I, \mathbb{K}), N_1)$ est un e v normé

4) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'élts de $\mathcal{L}^1_c(I, \mathbb{K})$
$f \in \mathcal{L}^1_c(I, \mathbb{K})$
la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV en m̄ vers f $\Leftrightarrow$ $(N_1(f_n - f))_{n \in \mathbb{N}}$ CV vers 0

$\left(\lim_{n \to +\infty} \int_I |f_n - f| = 0\right)$

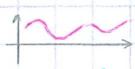
ds ce cas, $\left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ CV et $\lim_{+\infty} \int_I f_n = \int_I f$

|| $\left|\int_I f_n - \int_I f\right| = \left|\int_I (f_n - f)\right| \leq \int_I |f_n - f|$

5) : $\begin{array}{l} \mathcal{L}^1_c(I, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ f \longmapsto \int_I f \end{array}$ linéaire, continue, de norme 1

$\forall f \in \mathcal{L}^1_c(I, \mathbb{K})$, $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f| = N_1(f)$

$\forall f \in \mathcal{L}^1_c(I, \mathbb{R}^+)$, $\left|\int_I f\right| = \int_I |f|$



fct positive

|| $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$: ens. des fct. $f \in CM(I, \mathbb{K})$ de carré intégrable : $|f|^2 \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$
$\mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) \cap C^0(I, \mathbb{K})$

Pp 1) $\forall f \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$, $N_2(f) = \sqrt{\int_I |f|^2} = \sqrt{\int_I \bar{f} f}$

2) $\forall (f,g) \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})^2$, $\bar{f} g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

|| $\forall x \in I$, $|\bar{f}(x) g(x)| \leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right)$

3) : $\begin{array}{l} \mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{K}) \times \mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ (f,g) \longmapsto \int_I \bar{f} g \end{array}$

est un produit scalaire (avec "c") ||
N_2 est une norme (hermitienne)

4) Cauchy - Schwarz :
$\forall (f,g) \in \mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{K})$, $\left|\int_I \bar{f} g\right|^2 \leq \int_I |f|^2 \int_I |g|^2$

5) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'élts de $\mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{K})$
$f \in \mathcal{L}^2_c(I, \mathbb{K})$
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV en m̄ quad vers f $\Leftrightarrow$ $(N_2(f_n - f))_{n \in \mathbb{N}}$ CV vers 0 : $\lim_{+\infty} \int_I |f_n - f|^2 = 0$

IV Théorèmes de convergence

1. théorème de convergence uniforme

conti par m intégrales

si $\begin{cases} I \text{ intervalle } \textbf{BORNÉ} \text{ de } \mathbb{R}, \\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}} \\ f \in CM(I, \mathbb{K}) \end{cases}$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV unif^t vers f sur I $\Rightarrow$ $\begin{cases} f \text{ intégrable} \\ \left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV} \\ \lim_{+\infty} \int_I f_n = \int_I f \end{cases}$

Th d'invers° de lim et $\int_I$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ CV unif

pr $\varepsilon = 1$: $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \|f_{n_1} - f\|_\infty \leq 1$

donc $\forall x \in I, \ |f_{n_1}(x) - f(x)| \leq 1$

$\forall x \in I, \ |f(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + 1$

si I n'était pas borné, on aurait $\int dx$ int non borné : impossible

or, I borné* donc $\begin{vmatrix} I \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto 1 \end{vmatrix}$ est intégrable

donc $\begin{vmatrix} I \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto |f_{n_1}(x)| + 1 \end{vmatrix}$ est intégrable

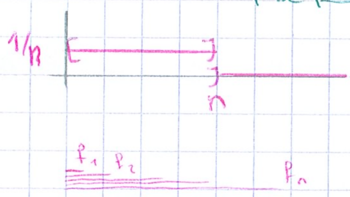
or, $f \in CM(I, \mathbb{K})$ donc f est intégrable

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_I |f_n - f| \leq \int_I \|f_n - f\|_\infty = (b-a)\|f_n - f\|_\infty$

et $\begin{vmatrix} I \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \|f_n - f\|_\infty \end{vmatrix}$ est intégrable

donc $\lim\limits_{+\infty} \int_I |f_n - f| = 0$, $\left|\int_I f_n - \int_I f\right| \leq \int_I |f_n - f| \longrightarrow 0$

ex : $n \geq 1$, $f_n : \begin{vmatrix} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x \in]n, +\infty[\end{cases} \end{vmatrix}$



- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in CM(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$
  $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}^+} f_n = 1$
  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ CV unif^t sur $\mathbb{R}^+$ vers la fct° nulle.
  et $\int_{\mathbb{R}^+} 0 = 0$

$\lim\limits_{+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n \neq \int_I \lim f_n$ 0 car $I = [0, +\infty[$ n'est pas borné

2. Théorème de convergence dominée

1) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in CM(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in CM(I, \mathbb{K})$ 3)

on suppose : – la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV simpl^t vers f 2)

ordre de vérificat°

– $\exists \varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+) / \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \ |f_n(x)| \leq \varphi(x)$ (hyp. de dominat°) (φ dominatrice)

5) 4)

alors, ① $\forall n \in \mathbb{N}, \ f_n \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

② $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

③ $\left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ CV

$\lim\limits_{+\infty} \int_I f_n = \int_I f$ (inv. de lim et $\int$)

ex : * $n \geq 1$, $f_n : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\sin t/n}{1+t^2} \end{vmatrix}$

1) * $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in CM(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ($\hat{m}$ continue)

2) * $t \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = 0$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ CV simpl^t vers la fct° nulle

3) * la fct° nulle est continue par m

4) * $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(t)| \leq \frac{|\sin t/n|}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$

5) * $\begin{vmatrix} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{1+t^2} \end{vmatrix}$ est continue par m et intégrable
dominatrice

ccl : la fct nulle est intégrable
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable
$\left(\int_{\mathbb{R}^+} f_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ CV et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t/n}{1+t^2} dt = 0$

* $n \geq 1$, $f_n : \begin{vmatrix} [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, n] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, n] \end{cases} \end{vmatrix}$ Déterminer $\lim\limits_{+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n$

1) * $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in CM(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

2) * $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \lim\limits_{+\infty} e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} = e^{-t}$ car $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$

3) * $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t} \end{vmatrix}$ $f \in CM(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ CV simpl^t vers f

4) * $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n]$, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} \leq e^{n(-\frac{t}{n})} \leq e^{-t}$

$\forall t \in]n, +\infty[, \quad 0 \leq e^{-t}$

5) soit $\varphi : \begin{array}{|l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t} \end{array}$ alors $\begin{cases} \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t) \end{cases}$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n = \lim \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

<u>corollaire</u> : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in C\Pi(I, \mathbb{K})$ 1)

on suppose : 2) $\sum u_n$ CV simpl^t vers S sur I

3) $S \in C\Pi(I, \mathbb{K})$

$\exists \varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+) / \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad \left| \sum_{k=0}^n u_k(t) \right| \leq \varphi(t)$ 5) 4)

alors ① $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

② $S \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

③ $\sum \int_I u_n$ CV et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

3. Théorème d'intégration terme à terme d'une série

1') $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$

on suppose : 2) $\sum u_n$ CV simpl^t vers S

3) $S \in C\Pi(I, \mathbb{K})$

4') $\sum \int_I |u_n|$ CV $\left(\begin{array}{l} \text{série à termes } \oplus \\ = \sum N_1(u_n) \end{array} \right.$

alors ② $S \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

③ $\sum \int_I u_n$ CV

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

<u>ex</u> : $f \in \mathcal{L}^1(]0,1[, \mathbb{R})$

$f_n : \begin{array}{|l}]0,1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto (-t)^n f(t) \end{array}$

$n \in \mathbb{N}, t \in]0,1[, \quad S_n(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^n f(t) = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} f(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{f(t)}{1+t}$

corollaire CV domi

2) * $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV simpl^t vers $S : \begin{array}{|l}]0,1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{f(t)}{1+t} \end{array}$

3) * S est continue par m car f l'est car $f \in \mathcal{L}^1$

* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0,1[, \quad |S_n(t)| \leq 2|f(t)|$

$\begin{array}{|l}]0,1[\to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto 2|f(t)| \end{array}$ est intégrable

alors, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \in \mathcal{L}^1(]0,1[, \mathbb{R})$

$S \in \mathcal{L}^1(]0,1[, \mathbb{R})$

$\sum \int_{]0,1[} f_n$ CV

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-t)^n f(t) dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$$

<u>rem</u> : le th ne s'applique pas : $f : \begin{array}{|l}]0,1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto t \end{array}$ $\quad f_n : \begin{array}{|l}]0,1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto -(-t)^{n+1} \end{array}$

$$N_1(f_n) = \int_0^1 |-(-t)^{n+1}| dt = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2} \quad \text{ne CV pas}$$

V Intégrales dépendant d'un paramètre

1. Continuité sous le signe $\int$

soient I intervalle, $\mathring{I} \neq \emptyset$, $\quad A \neq \emptyset \subset \mathbb{R}^n$, $\quad g : \begin{array}{|l} A \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto g(x,t) \end{array}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ CM, intégrable (dominatrice)

tels que : 1) g continue / 1ère variable : $\forall t \in I, \quad \begin{array}{|l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto g(x,t) \end{array}$ continue

2) g continue par m / 2ème var : $\forall x \in A, \quad \begin{array}{|l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto g(x,t) \end{array}$ CM

3) hyp. de dominat° : $\forall (x,t) \in A \times I, \quad |g(x,t)| \leq \varphi(t)$

alors : ① $\forall x \in A, \quad \begin{array}{|l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto g(x,t) \end{array}$ intégrable $\quad$ ② $f : \begin{array}{|l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_a^b g(x,t) dt \end{array}$ continue

① $\forall x \in A$, $\left|\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto g(x,t)\end{array}\right.$ est CM $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$ avec $\varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$

donc : $\left|\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto g(x,t)\end{array}\right.$ est intégrable

② caract. séquentielle : $\forall x_0 \in A$, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0

$n \in \mathbb{N}$, $g_n : \left|\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto g(u_n,t)\end{array}\right.$

$\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est continue par m sur I 1)

$\forall t \in I$, $g_n(t) = g(u_n, t)$ t fixé, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$, g continue/1ère var

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = g(x_0, t)$

$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV simplt sur I vers $\left|\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto g(x_0,t)\end{array}\right.$ 2)

cette applicat° est CM 3)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|g_n(t)| = |g(u_n, t)| \underset{5)}{\leq} \varphi(t)$ avec $\varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ 4)

donc, par le th de CV dominée, $\left(\int_a^b g(u_n,t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $\int_a^b g(x_0,t)\,dt$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b g(u_n,t)\,dt = \int_a^b g(x_0,t)\,dt$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$

2 - extension du théorème

il suffit que φ soit valable sur un compact de A
(une dominatrice par compact)

compact $C = \{u_n, n\in\mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$

3 - cas particulier (à savoir faire)

si $\begin{cases} I \text{ segment (compact de } \mathbb{R}) \\ A \subset \mathbb{R}^n \\ g : A\times I \to \mathbb{K} \text{ continue sur } A\times I \end{cases}$

alors ① $\forall x \in A$, $\left|\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto g(x,t)\end{array}\right.$ est intégrable

② $\left|\begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_a^b g(x,t)\,dt\end{array}\right.$ continue

conti sur un fermé = compact de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow g$ bornée

① g continue sur un fermé I donc intégrable sur ce fermé *

② 1) $\forall t \in I$, $\left|\begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto g(x,t)\end{array}\right.$ est continue (appli. partielle d'une appli continue)

2) $\forall x \in A$, $\left|\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto g(x,t)\end{array}\right.$ ------

soit C un compact de A, alors $C \times I$ est un compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ $= \mathbb{R}^{n+1}$

et g, continue sur un compact, est bornée :

$\exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall (x,t) \in C\times I, |g(x,t)| \leq M$ 3)

soit $\varphi : \left|\begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto M\end{array}\right.$

$\varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$

$\forall (x,t) \in C \times I$, $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$

donc par le th de continuité ss $\int$, $\left|\begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_a^b g(x,t)\,dt\end{array}\right.$ est continue

4 - dérivation sous le signe $\int$: théorème de Leibniz

soient I intervalle $\mathring{I} \neq \emptyset$ $g : \left|\begin{array}{l} A\times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto g(x,t)\end{array}\right.$ $\psi : I \to \mathbb{R}^+$ CM et intégrable

A ------ $\mathring{A} \neq \emptyset$

tels que 1) $\forall x \in A$, $\left|\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto g(x,t)\end{array}\right.$ est CM et intégrable (peut se vérifier par une domination)

2) $\forall (x,t) \in A\times I$, g admet une dérivée partielle par rapport à x en (x,t) : $\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)$

3) $\forall t \in I$, $\left|\begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\end{array}\right.$ continue

4) $\forall x \in I$, $\left|\begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\end{array}\right.$ CM

5) $\forall (x,t) \in A\times I$, $\left|\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\right| \leq \psi(t)$

alors $f : \begin{vmatrix} A \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_a^b g(x,t)\,dt \end{vmatrix}$ est de classe C^1 sur A

et $\forall x \in A$, $f'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_a^b g(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\,dt$$

pratique : domin
conti
dérivabi

soit $x_0 \in A$, $h : \begin{vmatrix} A \times I \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,t) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g(x_0,t)-g(x,t)}{x_0-x} & \text{si } x \neq x_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} g(x,t) & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{vmatrix}$

pr $x \neq x_0$, $t \in I$, acc. finis :
$\exists c \in]x, x_0[\ / \ h(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} g(c,t)$ 2)
$|h(x,t)| \leq \left|\frac{\partial}{\partial x} g(c,t)\right| \leq \varphi(t)$ 5)

pr $x = x_0$, $t \in I$,
$|h(x,t)| = \left|\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\right| \leq \varphi(t)$

donc $\forall (x,t) \in A \times I$, $|h(x,t)| \leq \varphi(t)$

$\forall t \in I$, : $\begin{vmatrix} A \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto h(x,t) \end{vmatrix}$ est continue car admet des déri parti /x

$\forall x \in A$, : $\begin{vmatrix} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto h(x,t) \end{vmatrix}$ est CM   1) si $x \neq x_0$ 4) si $x = x_0$

continuité ss $\int$

donc $\forall x \in A$, $\begin{vmatrix} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto h(x,t) \end{vmatrix}$ est intégrable

et $\begin{vmatrix} A \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_a^b h(x,t)\,dt \end{vmatrix}$ est continue

donc continue en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} \int_a^b h(x,t)\,dt = \int_a^b h(x_0,t)\,dt$

$\lim\limits_{\substack{x \neq x_0 \\ x \to x_0}} \int_a^b \frac{g(x_0,t)-g(x,t)}{x_0-x}\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,t)\,dt$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x_0-x}\underbrace{\left(\int_a^b g(x_0,t)\,dt - \int_a^b g(x,t)\,dt\right)}_{\text{Taux d'accroissement}} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,t)\,dt$

donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,t)\,dt$

avec 3), 4), 5) : $\begin{vmatrix} A \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\,dt \end{vmatrix}$ est continue

donc $f \in C^1(A)$

5. extension du théorème

* on peut remplacer l'hyp de dominat° par :
  pr tt compact C de A, $\exists \varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ / $\forall (x,t) \in C \times I$, $\left|\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right| \leq \varphi(t)$
* extens° aux dérivées d'ordre supérieur, dérivées partielles : $f(x,y,t) = \int_a^b g(x,y,t)\,dt$

6. cas particulier

I segment, $\frac{\partial g}{\partial x}$: $\begin{vmatrix} A \times I \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,t) \longmapsto \frac{\partial}{\partial x} g(x,t) \end{vmatrix}$ continue

7. fonction Γ (d'Euler)

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, : $\begin{vmatrix} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^{x-1}e^{-t} \end{vmatrix}$ est continue, positive

en $+\infty$: $t^2\, t^{x-1}e^{-t} = e^{-t+(x+1)\ln t} \longrightarrow 0$ intégrable sur $[1, +\infty[$

en 0 : $t^{x-1}e^{-t} \underset{0^+}{\sim} t^{x-1}$ avec $x-1 > -1$ ---------- $]0, 1]$

On pose : $\Gamma : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \end{vmatrix}$

calculs : $g : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \longmapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t} e^{-t} \end{vmatrix}$

- continue $/x$ et $/t$
- k fois dérivable $/x$: $\frac{\partial^k g}{\partial t^k}(x,t) = (\ln t)^k g(x,t)$
- $\frac{\partial^k g}{\partial t^k}$ est continue $/x$ et $/t$

soit C compact de $\mathbb{R}^{+*}$,
$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^{+*2}$, $C \subset [ab] \subset \mathbb{R}^{+*2}$
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [ab]$,

$\forall t \in]0,1]$, $\left| \frac{\partial g^{(k)}}{\partial t^k}(x,t) \right| \leqslant |\ln t|^k \, t^{a-1} e^{-t}$ plus petite puissance, plus grande valeur

$\forall t \in [1, +\infty[$, $\left| \frac{\partial g^k}{\partial t^k}(x,t) \right| \leqslant (\ln t)^k \, t^{b-1} e^{-t}$ plus grande puissance, plus grande valeur

donc $\forall t \in]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial g^k}{\partial t^k}(x,t) \right| \leqslant |\ln t|^k \left(t^{b-1} + t^{a-1}\right) e^{-t}$

or, $\begin{vmatrix} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ t \longmapsto |\ln t|^k \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) e^{-t} \end{vmatrix}$ est CM et intégrable
en appliquant le Th de dérivat° sous $\int$ en cascade.

$$\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k \, t^{x-1} e^{-t} dt$$

rem : intégrat° par parties $\longrightarrow$ sur un segment
* intégrabilité
* segment
* passage à la lim

chgt de var, φ bijectif $/ \varphi(J) \subset I$
si f est intégrable sur I : $\int_I f(t)dt$ $\quad f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ $\quad |f| \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$
est-ce que $f \circ \varphi$ l'est sur J ? : $\int_J f \circ \varphi'(u)\, \varphi'(u) du$ $\quad f \circ \varphi \in \ldots$ $\quad |f \circ \varphi| \varphi' \in \ldots$

$\Gamma(0)$ n'existe pas : on aurait $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$, or $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ non intégrable sur $]0\,b[$

* $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$
* $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[\cancel{t^x(-e^{-t})}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $\begin{cases} \Gamma(2) = 1 \\ \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \\ \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6 = 3! \\ \Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4! \end{cases}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \Gamma(n) = (n-1)!$

* Γ continue en 1 : $\lim\limits_{x \to 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x\Gamma(x) = 1$

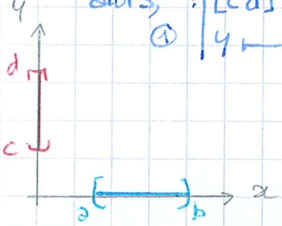
d'où $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$

* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (dém. plus loin)

VI Intégrales doubles

1. formule de Fubini sur un pavé

$(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ / \begin{cases} a < b, \\ c < d \end{cases}$ $\quad f : \begin{vmatrix} [ab] \times [cd] \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{vmatrix}$ continue



alors, ① $\begin{vmatrix} [cd] \longrightarrow \mathbb{K} \\ y \longmapsto \int_a^b f(x,y) dx \end{vmatrix}$ et ② $\begin{vmatrix} [ab] \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_c^d f(x,y) dy \end{vmatrix}$ sont continues

et $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$ ③

ds ce cas, $\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy\, dx = \iint_{[ab] \times [cd]} f(x,y) dx dy = \iint_{[ab] \times [cd]} f$

① $[ab] \times [cd]$ est compact
f continue sur un compact donc bornée :
$\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall (x,y) \in [ab] \times [cd], \ |f(x,y)| \leqslant M$
$\forall x \in [ab]$, $\begin{vmatrix} [cd] \longrightarrow \mathbb{K} \\ y \longmapsto f(x,y) \end{vmatrix}$ est continue (c appli partielle de f continue)

conti ss $\int$

$\forall y \in [c,d]$, $: \begin{vmatrix} [ab] \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x,y) \end{vmatrix}$ est continue (par m)

$\varphi : \begin{vmatrix} [ab] \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto M \end{vmatrix}$ $\varphi \in \mathcal{L}^1([ab], \mathbb{R}^+)$

$\forall (x,y) \in [ab]\times[cd]$, $|f(x,y)| \leq \varphi(x)$

donc $G : \begin{vmatrix} [cd] \to \mathbb{K} \\ y \mapsto \int_a^b f(x,y)\,dx \end{vmatrix}$ est définie continue

② de $\hat{m}$, $F : \begin{vmatrix} [ab] \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy \end{vmatrix}$ est définie continue

(il suffit | d'intervertir continue et continue par m
| de prendre φ dominatrice sur $[cd]$)

③ soit $H : \begin{vmatrix} [ab] \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_a^x \left(\int_c^d f(t,y)\,dy\right) dt \end{vmatrix}$ $\left(H(x) = \int_a^x F(t)\,dt \right)$

H est une primitive de F continue, donc $H \in C^1$

et $\begin{cases} \forall x \in [ab], \quad H'(x) = F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \\ H(a) = 0 \\ H(b) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx \end{cases}$

soit $K : \begin{vmatrix} [ab] \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_c^d \left(\int_a^{x} f(t,y)\,dt \right) dy \end{vmatrix}$ param ; param d'intégrat°

$g : \begin{vmatrix} [ab]\times[cd] \to \mathbb{K} \\ (x,y) \mapsto \int_a^x f(t,y)\,dt \end{vmatrix}$ continue sur $[ab]\times[cd]$
dérivable $/x$: $\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = f(x,y)$

dérivat° ss $\int$

$\forall x \in [ab]$, $: \begin{vmatrix} [cd] \to \mathbb{K} \\ y \mapsto f(x,y) \end{vmatrix}$ est intégrable

$: \begin{vmatrix} [ab] \to \mathbb{K} \\ y \mapsto \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) \end{vmatrix}$ continue, $: \begin{vmatrix} [cd] \to \mathbb{K} \\ y \mapsto \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) \end{vmatrix}$ CM

$\psi : \begin{vmatrix} [cd] \to \mathbb{R}^+ \\ y \mapsto M \end{vmatrix}$ $\psi \in \mathcal{L}^1([cd], \mathbb{R}^+)$
et $\forall (x,y) \in [ab]\times[cd]$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| \leq \psi(y)$

donc $K \in C^1([ab])$ et $\begin{cases} \forall x \in [ab], \; K'(x) = \int_c^d \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dy = \int_c^d f(x,y)\,dy = H'(x) \\ K(a) = \int_c^d 0\,dy = 0 = H(a) \end{cases}$

donc $K(b) = H(b)$ (fct° égales en a dont les dérivées coïncident sur $[ab]$)

soit $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$

2 - I, I' qcq / $\mathring{I} \neq \emptyset$, $\mathring{I'} \neq \emptyset$

$f : I \times I' \to \mathbb{R}^+$ continue

f intégrable $\iff$ $\exists M \in \mathbb{R}$ / pr $\forall$ pavé $[ab]\times[cd] \subset I \times I'$, $\iint_{[ab]\times[cd]} f \leq M$

ds ce cas, on pose $\iint_{I\times I'} f = \sup\left\{ \iint_{[ab]\times[cd]} f, \; [ab] \subset I, [cd] \subset I' \right\}$

$\hat{m}$ Pp) : 1) 2) 7)

* suite exhaustive de pavés de $I \times I'$: produit de suites exh de segm^t de I et de I'

* si $\begin{cases} (J_n \times J_n')_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite exh de pavés de } I\times I' \\ f : I \times I' \to \mathbb{R}^+ \text{ continue} \end{cases}$

alors, f intégrable $\iff \left(\iint_{J_n\times J_n'} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\iff \left(\iint_{J_n\times J_n'} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV sur un rectangle, pr les fct ⊕ ds ce cas, $\lim_{n\to+\infty}\iint_{J_n\times J_n'} f = \iint_{I\times I'} f$ (indep de la suite exh de pavés)

P_p) soit ① $f : \begin{vmatrix} I\times I' \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \longmapsto f(x,y)\end{vmatrix}$ continue

1) si $\begin{cases} \forall x\in I, ② : \begin{vmatrix} I' \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ y \longmapsto f(x,y)\end{vmatrix} \text{ est intégrable} \\ ③ : \begin{vmatrix} I \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \int_{I'} f(x,y)\,dy\end{vmatrix} \text{ est CM, intégrable}\end{cases}$ calculer l'intégrale

alors f est intégrable sur $I\times I'$ et $\iint_{I\times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\,dy\right) dx$

2) de plus, si $\begin{cases} \forall y\in I', : \begin{vmatrix} I \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto f(x,y)\end{vmatrix} \text{ est intégrable} \\ : \begin{vmatrix} I' \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ y \longmapsto \int_I f(x,y)\,dx\end{vmatrix} \text{ est CM, intégrable}\end{cases}$ permet de calculer

Fubini pr les fct ⊕ sur un rectangle } alors $\iint_{I\times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_{I'}\left(\int_I f(x,y)\,dx\right) dy$

rem : on ne peut pas tjours calculer $\int_I\int_{I'}$ et $\int_{I'}\int_I$, parfois 1 seule

ex : $f : \begin{vmatrix} [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{1}{1+xy^2}\end{vmatrix}$

① f est continue, positive

② $y\in\mathbb{R}$, $: \begin{vmatrix} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \dfrac{1}{1+xy^2}\end{vmatrix}$ est continue sur un segm^t donc intégrable

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+xy^2} = \begin{cases} 1 & \text{si } y=0 \\ \left[\frac{1}{y^2}\ln(1+xy^2)\right]_0^1 = \dfrac{\ln(1+y^2)}{y^2} & \text{si } y\neq 0\end{cases}$$

③ $\begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ y \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } y=0 \\ \dfrac{\ln(1+y^2)}{y^2} & \text{si } y\neq 0\end{cases}\end{vmatrix}$ est CM et intégrable car :

$\begin{cases} \text{en } +\infty : \dfrac{\ln(1+y^2)}{y^2} = \dfrac{\ln(1+y^2)}{\sqrt{y}}\dfrac{1}{y^{3/2}} = o\left(\dfrac{1}{y^{3/2}}\right) \quad 3/2 > 1 \\ \text{en } -\infty : \text{idem par parité}\end{cases}$

donc f est intégrable sur $[0,1]\times\mathbb{R}$

et $\iint_{[0,1]\times\mathbb{R}} f = \int_0^1\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+y^2)}{y^2}dy\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y^2}\ln(1+y^2)\,dy = \left[-\frac{1}{y}\ln(1+y^2)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2y}{(1+y^2)y}dy$

$= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = 2[\arctan y]_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi$

rem : on ne pouvait pas faire ds l'autre sens : $x\in[0,1]$, $: \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ y \longmapsto \dfrac{1}{1+xy^2}\end{vmatrix}$ n'est pas intégrable en 0 (on aurait $\int_{-\infty}^{+\infty} 1.dy$)

$f : \begin{vmatrix} I\times I' \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y)\end{vmatrix}$ continue, f intégrable $\Longleftrightarrow$ $|f| : I\times I' \to \mathbb{R}^+$ intégrable

m̂ P_p) que p. 173 : 3), 4)

3. Formule de Fubini pour les fonctions intégrables sur un rectangle

soit $f : I\times I' \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, ⓪

si $\begin{cases} ① f \text{ intégrable sur } I\times I' \\ ② \forall x\in I, : \begin{vmatrix} I' \longrightarrow \mathbb{K} \\ y \longmapsto f(x,y)\end{vmatrix} \text{ intégrable} \\ ③ : \begin{vmatrix} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_{I'} f(x,y)\,dy\end{vmatrix} \text{ CM, intégrable}\end{cases}$ alors $\iint_{I\times I'} f = \int_I\left(\int_{I'} f(x,y)\,dy\right)dx$

⚠ ① ⇏ ② ni ③

si de plus $\begin{cases} ④ \forall y \in I', \ : \begin{vmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x,y) \end{vmatrix} \text{ intégrable} \\ ⑤ : \begin{vmatrix} I' \to \mathbb{K} \\ y \mapsto \int_I f(x,y)\,dx \end{vmatrix} \text{ CM, intégrable} \end{cases}$

alors, $\iint_{I\times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_{I'}\left(\int_I f(x,y)\,dx\right) dy$

ex : $f : \begin{vmatrix} \overset{I}{[1,+\infty[} \times \overset{I'}{[1,+\infty[} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x(x-2)e^{-xy} \end{vmatrix}$

si $1 \leq x \leq 2$, $x+2 \geq 3 \geq |x-2|$

si $x \geq 2$, $|x-2| = x-2 \leq x+2$

⓪ f est continue

$\forall (x,y) \in I\times I'$, $|f(x,y)| = |x(x-2)e^{-xy}| = x|x-2|e^{-xy} \leq x(x+2)e^{-xy}$

② pr x fixé, $\begin{vmatrix} I' \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto x(x+2)e^{-xy} \end{vmatrix}$ est (continue) intégrable

$$\int_1^{+\infty} x(x+2)e^{-xy}\,dy = \left[x(x+2)\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_1^{+\infty} = -(x+2)\left[0 - e^{-x}\right] = (x+2)e^{-x}$$

③ $: \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+2)e^{-x} \end{vmatrix}$ est continue, intégrable

donc f est intégrable ①

pr x fixé,

$: \begin{vmatrix} I' \to \mathbb{R} \\ y \longmapsto x(x-2)e^{-xy} \end{vmatrix}$ est intégrable (grâce à — et ②)

$$\int_1^{+\infty} x(x-2)e^{-xy}\,dy = (x-2)e^{-x}$$

$: \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x-2)e^{-x} \end{vmatrix}$ est continue, intégrable (CM suffit)

$$\iint_{I\times I'} f = \int_1^{+\infty}(x-2)e^{-x}\,dx = \left[(-x+1)e^{-x}\right]_1^{+\infty} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(ax+b)e^{-x} = (a - ax - b)e^{-x} \quad \begin{cases} -a = 1 \\ a-b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

4 - si $\begin{cases} f : I \to \mathbb{K} \\ g : I' \to \mathbb{K} \end{cases}$ continues, intégrables

alors $h : \begin{vmatrix} I\times I' \to \mathbb{K} \\ (x,y) \mapsto f(x)g(y) \end{vmatrix}$ est continue, intégrable

et $\iint_{I\times I'} h = \int_I f \int_{I'} g$

⚠ vrai que pour des fct° de 2 var. $\neq$

cf contre-ex p. 184

Fubini pr fct° ⊕ sur un rectangle

- h continue c produit de 2 fct° continues
- $\forall x \in I, \ \begin{vmatrix} I' \to \mathbb{K} \\ y \mapsto |f(x)g(y)| \end{vmatrix}$ est intégrable

$: \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \int_{I'} |f(x)g(y)|\,dy = |f(x)| \underbrace{\int_{I'} |g(y)|\,dy}_{\text{cste}} \end{vmatrix}$ conti, intégrable

donc h est intégrable

- $\forall x \in I, \ \begin{vmatrix} I' \to \mathbb{K} \\ y \mapsto f(x)g(y) \end{vmatrix}$ est intégrable

$: \begin{vmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_{I'} f(x)g(y)\,dy = f(x) \underbrace{\int_{I'} g(y)\,dy}_{\text{cste}} \end{vmatrix}$ conti, intégrable

donc $\iint_{I\times I'} h = \int_I \left(\int_{I'} f(x)g(y)\,dy\right)dx = \int_I f(x)\,dx \int_{I'} g(y)\,dy$

5 - ✱ $f : \begin{vmatrix} I\times I' \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{vmatrix}$, $g : \begin{vmatrix} I'\times I \longrightarrow \mathbb{K} \\ (y,x) \longmapsto f(x,y) \end{vmatrix}$

alors, f continue $\Leftrightarrow$ g continue

f intégrable $\Leftrightarrow$ g intégrable

ds ce cas, $\iint_{I\times I'} f = \iint_{I'\times I} g$

* $f : \begin{cases} I \times I' \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{cases}$ continue

f intégrable sur $I \times I'$ $\Longrightarrow$ f intégrable sur $\mathring{I} \times \mathring{I}'$ et $\iint_{I\times I'} f = \iint_{\mathring{I}\times\mathring{I}'} f$

f inté : $\exists M \in \mathbb{R}^+$ / pr tt pavé $J \times J' \subset I \times I'$, $\iint_{J\times J'} |f| \leq M$

soit $J_1 \times J_1'$ pavé de $\mathring{I} \times \mathring{I}'$

alors $J_1 \times J_1' \subset I \times I'$ et $\iint_{J_1 \times J_1'} |f| \leq M$

donc f inté sur $\mathring{I} \times \mathring{I}'$

$I = [a\,b]$, $\begin{cases} I' \longrightarrow \mathbb{K} \\ y \longmapsto \int_a^b f(x,y)\,dy \end{cases}$ est définie

continue (cas particulier du th de continuité sous $\int$)

intégrable car : $\left|\int_a^b f(x,y)dy\right| \leq \int_a^b |f(x,y)|\,dy = \varphi(y)$

donc $\iint_{[ab]\times I'} f = \int_{I'} \left(\int_{[ab]} f(x,y)\,dx \right) dy$

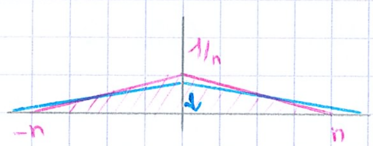
Fubini sur un pavé

$= \int_{I'} \int_{]ab[} f(x,y)\,dx\, dy$

$= \int_{]ab[\times I'} f(x,y)\,dx\,dy$

de m̂, on ouvre le 2ème intervalle

* pas de CV unif pr $\int_0^{+\infty}$, que sur des segm^{ts} :



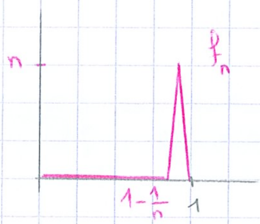
la suite de fct° tend vers 0

mais l'aire du triangle vaut tjrs 1

donc il n'y a pas d'invers° de lim :

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = 1 \neq \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n = 0$

*



f_n CV simpl^t vers 0 mais pas unif

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

avec $f : x \longrightarrow 0$

$\exists \varepsilon > 0 / \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists x > 0 / \ n \geq n_0$ et $f_n(x) > 0$

* pavé : "compact" x "compact" = segment x segment = $[ab] \times [cd]$

↘ fermé borné

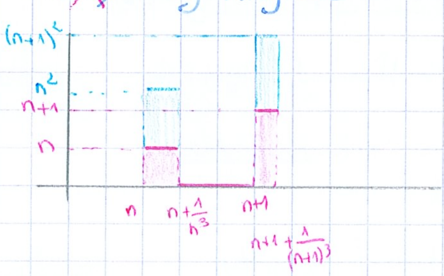
$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

→ Fubini sur un pavé : les fct° sont déjà intégrables

* $\begin{cases} f(t) \text{ intégrable} \\ g(t) \text{ intégrable} \end{cases}$ $\cancel{\Longrightarrow}$ fg intégrable : $\begin{cases}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$

$\frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable

$\frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{t}}$ ne l'est pas



$\sum \frac{1}{n^2}$ intégrable

$\sum \frac{1}{n} = \sum n \sum \frac{1}{n^2}$ non intégrable

* $\frac{1}{t(\ln t)^2}$ est intégrable mais ne satisfait pas le critère de Riemann :

il n'existe pas de α / $\frac{t^\alpha}{t(\ln t)^2} \longrightarrow 0$