Calcul différentiel

E Rev de dim m, de base $(e_1, \dots, e_m)$ (canonique)
F Rev de dim n, de base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (canonique) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots \mathbb{R}^n)$
E,F normés

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ mais pas $\mathbb{R}$ sinon on ne peut pas différencier)

U ouvert de E, $f : \begin{vmatrix} U \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{vmatrix}$

I Continuité

1. limite

$f : D \to F$, $a \in \bar{D}$, $\ell \in F$

f admet la limite ℓ en a $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in D, \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$

Pp) algébriques
unicité
composition
séquentielle

exten° à $E = \mathbb{R}$ $a = \pm\infty$, $F = \mathbb{R}$, $\ell = \pm\infty$

2 continuité en a

$f : D \to F$, $a \in D$, f continue en a $\iff \lim\limits_a f = f(a)$

a. applications composantes

$E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, $D \subset E$,

$f : \begin{vmatrix} D \longrightarrow F \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$

$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = f_1(x_1, x_2, x_3)\varepsilon_1 + f_2(x_1, x_2, x_3)\varepsilon_2$

$\left.\begin{array}{l} f_1 : D \to \mathbb{R} \\ f_2 : D \to \mathbb{R} \end{array}\right\}$ appli composantes de f

th f continue en a $\iff$ ses applications composantes sont continues en a

$\Rightarrow$ $p_1 : \begin{vmatrix} F \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto y_1 \end{vmatrix}$ est continue (linéaire en dim finie)

$p_2 : \begin{vmatrix} F \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto y_2 \end{vmatrix}$ . . . .

$\begin{cases} f_1 = p_1 \circ f \\ f_2 = p_2 \circ f \end{cases}$ continue en a $\quad p_1(\vec{f}) = p_1\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f_1$
. . . . (C composée)

si on connaît les composantes d'une fct°, on connaît cette fct

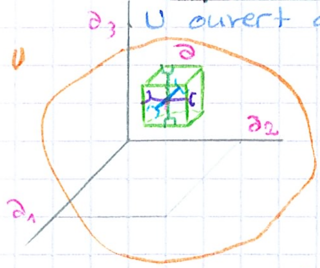
$\Leftarrow$ $\hat{f}_1 : \begin{vmatrix} D \longrightarrow F \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto f_1(x_1, x_2, x_3)\varepsilon_1 \end{vmatrix}$ continue en a

$\hat{f}_2 : \begin{vmatrix} D \longrightarrow F \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto f_2(x_1, x_2, x_3)\varepsilon_2 \end{vmatrix}$ continue en a

$f = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ continue en a (C somme)

b. applications partielles

U ouvert de $E = \mathbb{R}^3$, de $F = \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2, a_3) \subset U$



$\exists \alpha > 0 / B_\infty(a, \alpha) \subset U$ (norme ∞)

$\begin{cases} I_1 = \{(t, a_2, a_3) / t \in]a_1 - \alpha, a_1 + \alpha[\} \subset B_\infty(a, \alpha) \subset U \\ I_2 = \{(a_1, t, a_3) / t \in]a_2 - \alpha, a_2 + \alpha[\} \subset \dots \\ I_3 = \{(a_1, a_2, t) / t \in]a_3 - \alpha, a_3 + \alpha[\} \subset \dots \end{cases}$

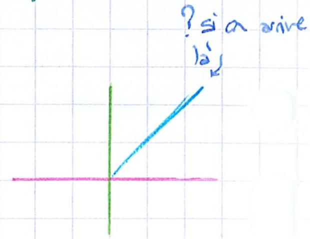
$\begin{cases} i_1 : \begin{vmatrix}]a_1 - \alpha, a_1 + \alpha[\longrightarrow E \\ t \longmapsto (t, a_2, a_3) \end{vmatrix} \\ i_2 \\ i_3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} f_{\cdot, a_2, a_3} : \begin{vmatrix}]a_1 - \alpha, a_1 + \alpha[\longrightarrow F \\ t \longmapsto f(t, a_2, a_3) \end{vmatrix} \\ f_{a_1, \cdot, a_3} \\ f_{a_1, a_2, \cdot} \end{cases}$ appli partielles

rem : I_1, I_2, I_3 ne sont pas des intervalles car ils $\subset \mathbb{R}^3$

f continue en a $\Longrightarrow$ ses appli. partielles sont continues en a_1, a_2, a_3 ?

$f_{\cdot, a_2, a_3} = f \circ i_1$ continue en a_1 par composit°
$f_{a_1, \cdot, a_3} = f \circ i_2$ . . . . a_2
$f_{a_1, a_2, \cdot} = f \circ i_3$ . . . . a_3

pas de ex : récip. $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$ f est-elle continue en $(0,0)$?



* $f_{\cdot,0} : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad f_{0,\cdot} : y \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

les appli partielles sont continues en 0

* $g : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto (t,t) \end{array}$ $\quad f\circ g : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{tt}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}$

g est continue en 0 :
$g(0) = (0,0)$
mais $f\circ g$ n'est pas continue 0

$\Big\}$ f n'est pas continue en $(0,0)$

autre méth : avec les suites : $u = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} u_n = (0,0)$

$$f(u_n) = \frac{\frac{2}{(n+1)(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{4}{(n+1)^2}} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

3 _ continuité sur D

f continue sur D $\iff$ f continue en chaque pt de D

Pp) f continue sur D $\iff$ pr $\forall$ ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de D
fermé F $\quad f^{-1}(F)$ fermé
$\iff$
$\iff$ si K compact $\subset$ D, $f(K)$ compact de F
$\iff$ si $X \subset D$ connexe par arcs, $f(X)$ connexe par arcs de F

4 _ continuité uniforme

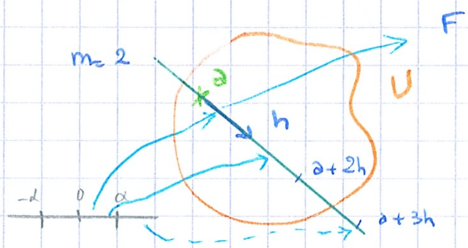
$f : D \longrightarrow F$ est unif^t continue $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall (x,x') \in D^2,$
$\|x - x'\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$

th Heine : f continue sur un compact $\Rightarrow$ f unif^t continue

II Applications continuement différentielles

1 _ dérivée selon un vecteur

$f : U \longrightarrow F$, U ouvert de E, $a \in U$, $h \in E$



$\exists \alpha > 0 \,/\, \forall t \in]-\alpha, \alpha[, \; a + th \in U$
(α dépend de a, h, U)

on pose $\varphi_{a,h} \begin{array}{|l}]-\alpha, \alpha[\longrightarrow F \\ t \longmapsto f(a+th) \end{array}$

f dérivable en a selon le vecteur h $\iff \varphi_{a,h}$ dérivable en 0
ds ce cas, $\varphi'_{a,h}(0)$ est le vecteur dérivé de f en a :
$$D_h f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(a+th) - f(a)\right) \in F$$

ex : $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin(x+y) \\ \cos(x+y) \end{pmatrix} \end{array}$ $\quad h = \binom{1}{1} \quad D_h f(0,0)$?

$a = \binom{0}{0} \quad f(a+th) = f(th) = f\binom{t}{t} = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$

$D_h f(t,t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix} \quad D_h f(a) = \binom{2}{0}$

$h = \binom{1}{-1} \quad D_h f(\pi, 0)$? $\quad a = \binom{\pi}{0} \quad f(a+th) = f\binom{\pi+t}{-t} = \begin{pmatrix} \sin(\pi+t-t) \\ \cos(\pi+t-t) \end{pmatrix} = \binom{0}{-1}$
$D_h f(a) = 0$

Pp 1) si $h = 0$: f est dérivable en a selon 0 et $D_0 f(a) = 0$
si $h \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$: . . . . h $\Rightarrow$ f dérivable en a selon λh
et $D_{\lambda h} f(a) = \lambda D_h f(a)$

$\| D_{\lambda h}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda}{\lambda t}\left(f(a + t\lambda h) - f(a)\right)$

2) la dérivabilité de f en a selon h ne dépend pas des normes de E et F

$f: \begin{vmatrix} U \longrightarrow F \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$

f dérivable en a selon $h \iff$ ses appli compo le sont

ds ce cas, $D_h f(a) = \begin{pmatrix} D_h f_1(a) \\ D_h f_2(a) \end{pmatrix}$

2 - dérivées partielles

U ouvert de E ($=\mathbb{R}^m$) de base $(e_1, \dots, e_m)$

$f : U \longrightarrow F$

f a une dérivée partielle d'indice $j \in \{1, \dots, m\}$ en a $\iff$ f dérivable en a selon le vecteur e_j

notat° : $D_{e_j} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+te_j) - f(a)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(a_1, \dots, a_j+t, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)\right)$

$= \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) = D_j f(a)$

rem : dérivée partielle = dérivée d'une appli partielle

$f: \begin{vmatrix} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto f(x_1,x_2,x_3) \end{vmatrix}$ $\quad a = (a_1, a_2, a_3) \quad$ $f_{\cdot, a_2, a_3} : \begin{vmatrix}]a_1-\alpha, a_1+\alpha[\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto f(u, a_2, a_3) \end{vmatrix}$

$f'_{\cdot,a_2,a_3}(a_1) = \lim_{u\to a_1} \frac{1}{u-a_1}\left(f(u, a_2, a_3) - f(a_1,a_2,a_3)\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(a_1+t, a_2, a_3) - f(a_1,a_2,a_3)\right)$ $\quad u = a_1 + t$

$= D_{e_1} f(a) = D_1 f(a)$

ex. $f: \begin{vmatrix} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \frac{\sin(xy)}{1+z^2} \end{vmatrix}$

$D_1 f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y\cos(xy)}{1+z^2}$

$D_2 f(x,y,z) = \frac{x\cos(xy)}{1+z^2}$

$D_3 f(x,y,z) = \sin(xy)\left(-2z(1+z^2)^{-2}\right) = \frac{-2z\sin(xy)}{(1+z^2)^2}$

3 - applications différentiables

$f : U \to F$, $a \in U$

f différentiable en $a \iff \exists\, \varphi \in \mathcal{L}(E,F) \,/\, \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\left(f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\right) = 0}$

(ou $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$)

φ : appli linéaire tangente à f en a

Pr 1) si φ existe, φ est **unique**

$\varphi(h) = f(a+h) - f(a) + o(\|h\|)$, ψ une autre,
$(\varphi - \psi)(h) = o(\|h\|)$

2) f différentiable en $a \implies f$ continue en a

φ : différentielle de f en a

$\varphi = df_a \qquad \varphi(h) = df_a(h) \qquad (df(a)(h))$

f différentiable en $a \implies f$ possède des dérivées en a selon tous les vecteurs (de E) et $\forall h \in E$, $Df_h(a) = \varphi(h) = df_a(h)$

$h \in E$ fixé

$f(a+th) - f(a) = \varphi(th) + o(\|th\|) = t\varphi(h) + o(t)$

$\iff \frac{1}{t}\left(f(a+th) - f(a)\right) = \varphi(h) + o(1)$

$\iff \lim_{t\to 0} \left(f(a+th) - f(a)\right) - \varphi(h) = 0 \qquad Df_h(a) = \varphi(h)$

express° : $f : U \to F$, $U \subset \mathbb{R}^m$

$a = (a_1, \dots, a_j, \dots, a_m) \in U$

f différentiable en a

$h = (h_1 e_1, \dots, h_j e_j, \dots, h_m e_m) \in E$

$\boxed{df_a(h)} = df_a(h_1e_1 + \dots + h_me_m) = h_1 df_a(e_1) + \dots + h_m df_a(e_m) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)$

$= \boxed{\sum_{j=1}^{m} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}$

rem : l'existence des dérivées partielles ne garantit pas la différentiabilité de f

ex : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

ds la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de F, $f = f_1 \varepsilon_1 + \dots + f_n \varepsilon_n$

$$df_a(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \dots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)$$

$$= h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \varepsilon_1 + h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) \varepsilon_2 + \dots + h_1 \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \varepsilon_n$$

$$+ h_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \varepsilon_1 + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \varepsilon_2 + \dots + h_2 \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) \varepsilon_n$$

$$+ \dots + h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \varepsilon_i + \dots$$

$$+ \dots + h_m \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \varepsilon_i$$

$i \to$, $\downarrow j$ Jac $\downarrow i$, $j \to$

on pose $\operatorname{Jac} f(a) = \left(\dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ Jacobienne de f en a : matrice de la différentielle de f en a exprimée ds une base de E (ou de F)

ex : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x^2 + y \\ xy^3 \end{pmatrix} \end{cases}$

dérivée 1er vect / x 1ère var x

$$\operatorname{Jac} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 1 \\ y^3 & 3xy^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, 1^{er} \text{vect}}{\partial\, 1^{ère} \text{var}} & \dfrac{\partial\, 1^{er} \text{vect}}{\partial\, 2^{ème} \text{var}} \\ \dfrac{\partial\, 2^{ème} \text{vect}}{\partial\, 1^{ère} \text{var}} & \dfrac{\partial\, 2^{ème} \text{vect}}{\partial\, 2^{ème} \text{var}} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + df_{\binom{x}{y}}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|\right)$

$$df_{\binom{x}{y}}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 1 \\ y^3 & 3xy^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xh + k \\ y^3 h + 3xy^2 k \end{pmatrix} \qquad df_a(h) = \operatorname{Jac} f(a)\, h$$

vérificat° : $f\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+h)^2 + (y+k) \\ (x+h)(y+k)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 + 4xh + 2h^2 + y + k \\ xy^3 + 3xy^2k + 3xyk^2 + xk^3 + hy^3 + 3hy^2k + 3hyk^2 + hk^3 \end{pmatrix}$

$$= f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + df_{\binom{x}{y}}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|\right)$$

4. applications continuement différentiables

$f : U \to F$, f continuement différentiable sur U
$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in U, \forall h \in E, \quad D f_h(a) \text{ existe} \\ \forall h \in E, \begin{cases} U \to F \\ a \mapsto D f_h(a) \end{cases} \text{ continue} \end{cases}$

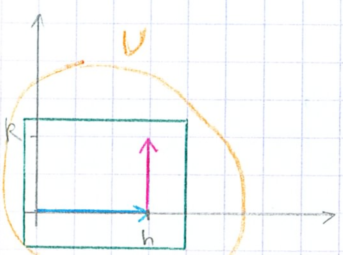
$C^1(U,F)$: ens. des fct° continuement différentiables (de classe C^1 sur U) à valeurs ds F

rem. : f continuement différentiable $\Longrightarrow$ les dérivées partielles de f sont continues $\begin{cases} U \to F \\ a \mapsto D_j f(a) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} U \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ a \mapsto \operatorname{Jac} f(a) \end{cases}$ continue

th $f : U \to F$, f a des dérivées partielles continues sur U $\Longrightarrow \begin{cases} f \text{ différentiable sur } U & ① \\ f \text{ continuement différentiable sur } U & ② \end{cases}$

U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ définies et continues sur U



① f est différentiable en 0, donc continue en 0

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*} / \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \underbrace{\|(x,y)\|_\infty}_{\|(x,y) - (0,0)\|_\infty} < \alpha \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in U \\ \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| < \varepsilon \\ \left| \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| < \varepsilon \end{cases}$

$\forall (h,k) \in B_\infty(0,\alpha)$,   pr x, y assez proches $f(x), f(y)$ assez proches

$$f(h,k) - f(0,0) = f(h,k) - f(h,0) + f(h,0) - f(0,0)$$
$$= \int_0^k \frac{\partial f}{\partial y}(h,t)\,dt + \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)\,dt$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k + \int_0^k \left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h + \int_0^h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) dt$$

| | si jms $h<0$, $k<0$

$$\left| f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k \right| \leqslant \left| \int_0^k \left| \frac{\partial f}{\partial y}(h,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| dt \right| + \left| \int_0^h \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| dt \right|$$

$(h,t) \in B_\infty(0,\alpha)$
$(t,0)$

$$\leqslant \varepsilon |k| + \varepsilon |h| \leqslant 2\varepsilon \left\| \binom{h}{k} \right\|_\infty$$

donc $f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k = o\left(\left\| \binom{h}{k} \right\|_\infty\right)$

② f a des dérivées partielles continues
donc est différentiable
$\forall h \in E$, $h = h_1 e_1 + \dots + h_m e_m$ $\qquad \forall a \in U$, $D_h f(a) = df_a(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

pr savoir si f est continûment différentiable, on regarde si les dérivées partielles sont continues

donc $\forall h \in E$, $\left| \begin{array}{l} U \to F \\ a \mapsto D_h f(a) \end{array} \right.$ est continue

ex : * $f \in \mathcal{L}(E,F)$
$\forall x \in E$, $\forall h \in E$ $\quad f(x+h) = f(x) + f(h) = f(x) + f(h) + o(\|h\|)$
• donc f est différentiable sur E
et $\forall x \in E$, $df_x = f$
• $\left| \begin{array}{l} E \to \mathcal{L}(E,F) \\ x \mapsto df_x \end{array} \right.$ est cste donc continue donc $\boxed{f \in C^1(E,F)}$
→ une appli linéaire est de classe C^1 et sa différentielle est elle-même

* $f : \left| \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \to F \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{array} \right.$ bilinéaire
$\forall (x,y) \in E_1 \times E_2$, $\forall (h,k) \in E_1 \times E_2$,
$f((x,y) + (h,k)) = f(x+h, y+k) = f(x,y) + f(x,k) + f(h,y) + f(h,k)$
or, $\left| \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \to F \\ (h,k) \mapsto f(h,y) + f(x,k) \end{array} \right.$ est linéaire et $\|f(h,k)\| \leqslant M \|h\| \|k\| = o\left(\left\| \binom{h}{k} \right\|\right)$
donc f est différentiable sur $E_1 \times E_2$
et $\forall (x,y) \in E_1 \times E_2$, $df_{\binom{x}{y}}\binom{h}{k} = f(h,y) + f(x,k)$
: $\left| \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F) \\ (x,y) \mapsto df_{\binom{x}{y}} \end{array} \right.$ est linéaire en dim finie donc continue
donc $\boxed{f \in C^1(E_1 \times E_2, F)}$

* fct° vectorielle (1 seule variable)
$f : I \to F$ $\quad I$ intervalle ouvert, $x \in I$, $h \in \mathbb{R}$,
$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + o(h)$ $\quad$ donc f est différentiable en x
et $df_x : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to F \\ h \mapsto h f'(x) \end{array} \right.$

si $f \in C^1(I)$, f est continuement différentiable sur I
$df_x(h) = h f'(x) \Rightarrow df_x(1) = f'(x)$

5. fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

$U \in E$, $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$

* rem : $\forall a \in U$, $df_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$: df_a est une forme linéaire
* gradient : si E a une structure eucli pr laquelle $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une bon
alors, $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, $\exists u \in E$ / $\forall h \in E$, $\varphi(h) = (u|h)$
$df_a \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, $\quad u = \text{grad} f(a)$, $\forall h \in E$, $df_a(h) = (\text{grad}(a)|h)$

coord. du gradient :
$h = h_1 e_1 + \dots + h_m e_m$, $\quad df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\,h_m = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) e_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) e_m \,\middle|\, h\right)$

coord du grad : $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$ $\qquad$ différentielle → grad
ligne → colonne ds une Bon

→ $\boxed{f(a+h) = f(a) + \text{grad} f(a) \cdot h + o(\|h\|)}$

* notation
$j \in \{1, \dots, m\}$, $\quad x_j : \left| \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \mapsto x_j \end{array} \right.$ est une forme linéaire : $x_j \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$
$j^{\text{ème}}$ forme coord : $x_j = e_j^*$

donc $x_j \in C^1(U,\mathbb{R})$ et $\forall a \in U$, $dx_{j_a} = x_j$ (ex 1)

$\forall h \in E$, $df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) h_m$

$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, dx_1(h) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\, dx_m(h) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right](h)$

donc $\forall a \in U$, $\boxed{df_a = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, dx_j}$

III Opérations sur les applications de classe C^1

1. structure

* $f \in C^1(U,F)$, $\forall a \in U$, $df_a \in \mathcal{L}(E,F)$

la différentielle de f : $df : \begin{vmatrix} U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \\ a \longmapsto df_a \end{vmatrix}$ est continue : $df \in C^0(U, \mathcal{L}(E,F))$

vect. appli. lin

(① on différencie ② l'ep. d'arrivée est grad)

* $C^1(U,F)$ est un $\mathbb{R}$ ev ($f+g \in C^1$)

$:\begin{vmatrix} C^1(U,F) \longrightarrow C^0(U, \mathcal{L}(E,F)) \\ f \longmapsto df \end{vmatrix}$ est linéaire (diff d'une somme = somme des diff)

2. composition (règle de la chaîne)

$\begin{cases} f \in C^1(U,F) & U \text{ ouvert de } E \\ f(U) \in V & V \text{ ouvert de } F \end{cases}$ $g \in C^1(V,G)$ G : $\mathbb{R}$ ev de dim p de base $(v_1, \dots, v_p)$

alors $g \circ f : U \to G$

$\forall a \in U, \forall h \in E \;/\; a+h \in U$, $g\circ f(a+h) = g(f(a+h)) = g\big(\underbrace{\underbrace{f(a)}_{\in V} + \underbrace{df_a(h) + o(h)}_{\in F}}_{\in V}\big)$

$g\circ f(a+h) = g(f(a)) + dg_{f(a)}\big(df_a(h) + o(h)\big) + \underbrace{o\big(\underbrace{df_a(h) + o(h)}_{O(h)}\big)}_{o(h)}$ car $\|df_a(h)\| \leq |||df_a|||\;\|h\|$

$= g\circ f(a) + dg_{f(a)}(df_a(h)) + \underbrace{dg_{f(a)}(o(h))}_{o(h)} + o(h)$ $\qquad \|dg_{f(a)}(o(h))\| \leq |||dg_{f(a)}|||\;\|o(h)\|$

$\boxed{g\circ f(a+h) = g\circ f(a) + dg_{f(a)} \circ df_a(h) + o(h)}$

d'où : ① $g \circ f$ est différentiable sur U

② $\forall a \in U$, $d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$

③ $:\begin{vmatrix} U \longrightarrow C^0(U, \mathcal{L}(E,F)) \\ a \longmapsto df_a \end{vmatrix}$ est continue $\qquad :\begin{vmatrix} V \longrightarrow C^0(V, \mathcal{L}(F,G)) \\ b \longmapsto dg_b \end{vmatrix}$ est continue

donc $:\begin{vmatrix} U \longrightarrow C^0(U, \mathcal{L}(F,G)) \\ a \longmapsto dg_{f(a)} \end{vmatrix}$ est continue (par composit°)

$:\begin{vmatrix} U \longrightarrow C^0(U, \mathcal{L}(E,G)) \\ a \longmapsto dg_{f(a)} \circ df_a \end{vmatrix}$ est continue (bilin. en dim finie)

d'où $:\begin{vmatrix} U \longrightarrow \mathcal{L}(E,G)^U \\ a \longmapsto dg_a \end{vmatrix}$ est continue donc $g\circ f \in C^1(U,G)$

et $d(g\circ f) \in C^0(U, \mathcal{L}(E,G))$

express° matricielle

df_a a pour matrice $\operatorname{Jac} f(a)$ ds les bases $(e_1, \dots, e_n)$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$dg_{f(a)}$ .... $\operatorname{Jac} g(f(a))$ .... $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $(v_1, \dots, v_p)$

donc $d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$ ...... $\operatorname{Jac} g\circ f(a)$ ...... $(e_1, \dots, e_n)$, $(v_1, \dots, v_p)$

$\operatorname{Jac} f_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ $\qquad \operatorname{Jac} g_{f(a)} = \left(\frac{\partial g_k}{\partial y_i} f(a)\right)_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq i\leq n}}$

$\operatorname{Jac} g\circ f_a = \left(\frac{\partial (g\circ f)_k}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq j\leq m}} = \left(\frac{\partial (g_k \circ f)}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq j\leq m}}$

$f : \begin{vmatrix} U \longrightarrow F \\ (x_1, \dots, \overset{x_j}{\dots}, x_m) \longmapsto (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \overset{f_i()}{\dots}, f_n(x_1, \dots, x_m)) \end{vmatrix}$ $\qquad g : \begin{vmatrix} V \longrightarrow G \\ (y_1, \overset{y_i}{\dots}, y_n) \longmapsto (g_1(y_1, \dots, y_n), \overset{g_k}{\dots}, g_p(y_1, \dots, y_n)) \end{vmatrix}$

$g\circ f \left| \begin{array}{l} U \longrightarrow G \\ (x_1,\dots,\underset{x_j}{x_n}) \longmapsto \left(g_1\left(f_1(x_1,\dots,\overset{f_j}{x_m}),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\right),\ \dots\dots\underset{g_k}{},\ g_p\left(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\right)\right)\end{array}\right.$

or, $\mathrm{Jac}\, g\circ f_a = \mathrm{Jac}\, g_{f(a)} \circ \mathrm{Jac}\, f_a$

$\dfrac{\partial g_k \circ f}{\partial x_j}(a) = \left(\dfrac{\partial g_k}{\partial y_i} f(a)\right)\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ $\qquad$ $\dfrac{\partial g_k \circ f}{\partial x_j}(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial g_k}{\partial y_i} f(a) \cdot \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$

$g_k \circ f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j+h_j,x_{j+1},\dots,x_m) = g_k\left(f_1(\ \ ),\ f_i(\ ),\ f_n(\ \ )\right)$

$= g_k\left(f_1(x)+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}h_j + o(h_j),\ \dots\dots,\ f_n(x)+\dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}h_j+o(h_j)\right)$

$= g_k(f(x)) + \dfrac{\partial g_k}{\partial y_1} f(x)\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(x)\left(h_j+o(h_j)\right) + \cdots \dfrac{\partial g_k}{\partial y_i} + \dfrac{\partial g_k}{\partial y_n}(f(x))\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(x)\left(h_j+o(h_j)\right)$

$= g_k\, f(x) + \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial g_k}{\partial y_i} f(x)\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] h_j + o(h_j)$

ex : * $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto (\cos t, \sin t, t)\end{array}\right.$ $\quad g_1 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ \ \binom{y}{z} \\ (x,y,z) \longmapsto (y,z)\end{array}\right.$ $\quad g_2 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ \ \binom{x}{z} \\ (x,y,z) \longmapsto (x,z)\end{array}\right.$ $\quad g_3 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \longmapsto (x,y) \ \ \binom{x}{y}\end{array}\right.$

g_1, g_2, g_3 sont lin. donc leur diff sont elles-m, leur Jac sont leur matrice.

$\mathrm{Jac}\, f(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{Jac}\, g_1\begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (= mat g_1 car g_1 linéaire)

$\mathrm{Jac}\, g_2\begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Jac}\, g_3\begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$\mathrm{Jac}\, g_1\circ f(t) = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t\\ \cos t\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t\\ 1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{Jac}\, g_2\circ f(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ 1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{Jac}\, g_3\circ f(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$

interprétat° :

f courbe paramétrée, si $f'(t)\neq 0$, $f'(t)$ dirige la tangente au support

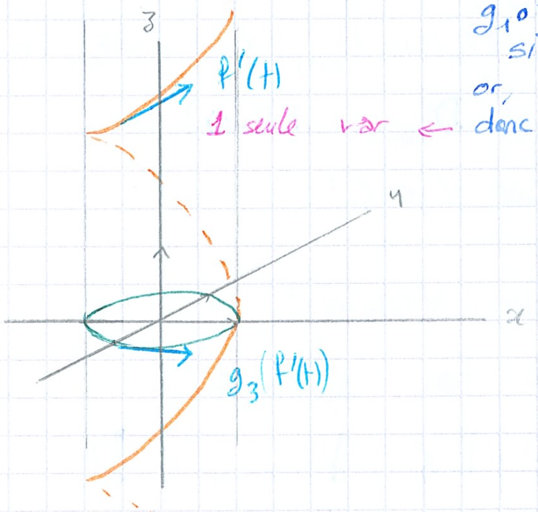
$g_1\circ f$: courbe param. projetée sur le plan yz

si $(g_1\circ f)'(t)\neq 0$, $(g_1\circ f)'(t)$ dirige la tangente au support

or, $f'(t) = df_t(1)$

1 seule var $\leftarrow$ donc $(g_1\circ f)'(t) = d(g_1\circ f)_t(1) = dg_{1\,f(t)}\circ df_t(1) = g_1\circ f'(t)$

$= g_1(f'(t))$



* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $\in C^1(U)$, $\quad \forall (x_1,\dots,x_n)\in U,\ f(x_1,\dots,x_n)\neq 0$

$g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \dfrac{1}{y}\end{array}\right.$ $\in C^1(\mathbb{R}^*)$ $\qquad$ $g\circ f = \dfrac{1}{f}$ $\quad$ calculer la diff. de $g\circ f$

$\forall (x_1,\dots,x_n) = a,\quad d(g\circ f)_a = dg_{f(a)}\circ df_a$

$\forall h\in E,\quad d(g\circ f)_a(h) = dg_{f(a)}(df_a(h))$

or, $\forall k\in\mathbb{R},\ dg_{f(a)}(k) = g'(f(a)).k$ $\qquad$ car $dg_{f(a)}(k.\overset{\text{base cano}}{1}) = k\, dg_{f(a)}(1) = k\, g'(f(a))$

donc $d(g\circ f)_a(h) = g'(f(a)).df_a(h)$ $\qquad$ donc $d\left(\dfrac{1}{f}\right)_a = d(g\circ f)_a = -\dfrac{1}{f(a)^2}\, df_a$ continue

donc $g\circ f = \dfrac{1}{f} \in C^1(U)$

* $(f,g) \in C^1(U,\mathbb{R})$, $\Phi : \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \longmapsto f(x_1,\dots,x_n)\, g(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$

$$U \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (f(x), g(x))$$
$$(y_1,y_2) \longmapsto y_1 y_2$$

$$\Phi = \varphi \circ \psi$$

$\forall h \in E$, $\forall a \in U$,
$$d\psi_a(h) = (df_a(h), dg_a(h)) \in \mathbb{R}^2, \quad \psi \in C_1(U,\mathbb{R}^2)$$
$\forall (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$d\varphi_{(y_1,y_2)}(k_1,k_2) = \underbrace{\varphi(y_1,k_2) + \varphi(k_1,y_2)}_{\varphi \text{ appli bilin.}} = y_1 k_2 + y_2 k_1$$

φ bilin $\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ donc $\Phi \in C^1(U,\mathbb{R})$ par composit°

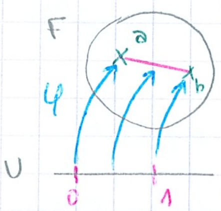
$\forall a \in U$, $\forall h \in E$,
$$d\Phi_a(h) = d\varphi_{\psi(a)} \circ d\psi_a(h) = d\varphi_{\psi(a)}\big(d\psi_a(h)\big) = d\varphi_{(f(a),g(a))}\big(df_a(h), dg_a(h)\big)$$
$$= f(a)\, dg_a(h) + g(a)\, df_a(h) \qquad \text{d'où } d\Phi = f.dg + g.df$$

Ainsi, $C^1(U,\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (l'appli cste $=$ à 1 est différentiable
la diff d'un produit est la somme des produits)
dont les él^{ts} inversibles (pour $\times$) sont les fct° f / $\forall x \in U$, $f(x) \neq 0$

IV Accroissements finis

1. Pp) U ouvert de E, convexe, $f \in C^1(U,F)$

$$\forall (a,b) \in U^2, \quad f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{a+t(b-a)}(b-a)\,dt = \int_0^1 D_{b-a} f(a+t(b-a))\,dt$$



soit $\varphi : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow F \\ t \longmapsto f(\underbrace{a+t(b-a)}_{\in [ab] \subset U}) = f \circ \gamma(t) \end{cases}$ avec $\gamma : t \mapsto a + t(b-a)$

alors $\begin{cases} \varphi(0) = f(a) \\ \varphi(1) = f(b) \end{cases}$

$\varphi \in C^1([ab])$, $\forall t \in [ab]$

$$\varphi'(t) = d\varphi_t(1) = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t(1) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = df_{\gamma(t)}(b-a)$$
$$= df_{a+t(b-a)}(b-a) = Df_{b-a}(a+t(b-a))$$

or, $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt$ car $\varphi \in C^1$

2. inégalité des accroissements finis

si $\exists K \in \mathbb{R} / \forall a \in U$, $|||df_a|||_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant K$ alors, $\forall (a,b) \in U^2$,
$$\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant K \|b-a\|_E \qquad (f \text{ K-lips})$$

$|\ |$ inutile car $1>0$

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\|\int_0^1 df_{a+t(b-a)}(b-a)\,dt\right\| \leqslant \left|\int_0^1 \|df_{a+t(b-a)}(b-a)\|\,dt\right|$$
$$\leqslant \int_0^1 |||df_{a+t(b-a)}|||\ \|b-a\|\,dt \leqslant \int_0^1 K\|b-a\|\,dt$$
$$\leqslant K\|b-a\|$$

3. cas particulier

E euclidien, $F = \mathbb{R}$ ev. d'arrivée

int d'une forme diff = circulat°

$f \in C^1(U,\mathbb{R})$, U ouvert convexe

$\forall (ab) \in U^2$, $\forall t \in [0,1]$, $df_{a+t(b-a)}(b-a) = \big(\mathrm{grad} f(a+t(b-a)) \mid b-a\big)$

$$\text{donc } f(b) - f(a) = \int_0^1 \big(\mathrm{grad} f(a+t(b-a)) \mid b-a\big)\,dt \underset{\text{continuité de } (|)}{=} \left(\int_0^1 \mathrm{grad} f(a+t(b-a))\,dt \;\Big|\; b-a\right)$$

4. applications

Th U ouvert convexe de E, $f \in C^1(U,F)$

f cste sur $U \iff \forall a \in U,\ df_a = 0$

$\Rightarrow$ f cste $\Rightarrow \forall a \in U, \forall h \in E,\ D_h f(a) = 0$

$\Rightarrow \forall a \in U,\ df_a = 0$

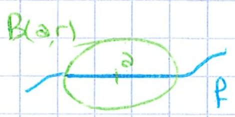
$\Leftarrow$ $\forall a \in U,\ df_a = 0 \iff \forall (a,b) \in U^2,\ f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{a+t(b-a)}(b-a)\,dt = 0$

$\iff f(b) = f(a)$

th | U ouvert connexe par arcs, $f \in C^1(U,F)$,
f **cste** sur $U \iff df = 0$

$\Rightarrow$ idem

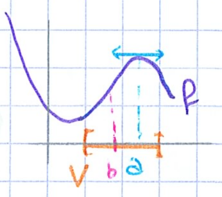
$\Leftarrow$ $\forall a \in U,\ df_a = 0$ alors f est localement cste :
$\exists r > 0 \,/\, B_a(r) \subset U$ — $B_a(r)$ ouvert convexe, f cste sur $B_a(r)$



or U est connexe par arcs
donc f localement cste sur $U \Rightarrow f$ cste sur U (p.

5_ extremum des fonctions numériques

$f : U \to \mathbb{R}$, (pour pouvoir comparer)
$a \in U$, f possède un maximum local en a
$\iff \exists V \in \mathcal{V}_a \,/\, \forall b \in U \cap V,\ f(b) \leqslant f(a)$



alors, $df_a = 0$

$\forall h \in E$, $\varphi : \begin{array}{l}]-\alpha,\alpha[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(a+th) \end{array}$

φ | présente un extremum local en 0 ($\varphi(0) = f(a)$)
| est dérivable en 0

donc $\varphi'(0) = 0$
$\varphi'(0) = D_h f(a) = df_a(h) = 0$

a pt critique de $f \iff df_a = 0$ (annulat° du gradient : cond. nécessaire)

V Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$

1. U ouvert de E, $f : U \to F$
f 2 fois continuement différentiable (C^2 sur U) $\iff \begin{cases} f \in C^1(U) \\ df : \begin{array}{l} U \to \mathcal{L}(E,F) \\ a \mapsto df_a \end{array} \text{ de classe } C^1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} f \in C^1(U) \\ \forall h \in E,\ D_h f : U \to F \text{ est } C^1(U) \end{cases}$

Pp équivalentes) $f \in C^2(U)$

$\iff$ ses appli. compo. le sont ($f_1 : U \to \mathbb{R}, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$)

$\iff \begin{cases} f \in C^1 \\ \forall h \in E, \forall k \in E,\ D_k D_h f : \begin{array}{l} U \to F \\ a \mapsto D_k(D_h f)(a) \end{array} \text{ existe et est continue} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} f \in C^1 \\ \forall j \in \{1,\ldots,m\}\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j} : U \to F \text{ est } C^1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} f \in C^1 \\ \forall (j_1,j_2) \in \{1,\ldots,m\}^2,\ \dfrac{\partial}{\partial x_{j_1}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{j_2}} f\right) : U \to F \text{ existe et est continue} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} f \in C^1 \\ : \begin{array}{l} U \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ a \mapsto \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Jac}\, f(a) \end{array} \quad C^1 \end{cases}$

déf. récursive :
f **k** fois conti diffé (C^k sur U) $\iff \begin{cases} f \in C^1\ U \\ df : \begin{array}{l} U \to \mathcal{L}(E,F) \\ a \mapsto df_a \end{array} \quad C^{k-1} \end{cases}$

Pp équiv.) $\iff \forall \ell \in \{1,\ldots,k\},\ \forall (j_1,\ldots,j_\ell) \in \{1,\ldots,m\}^2,$
$\dfrac{\partial}{\partial x_{j_\ell}} \dfrac{\partial}{\partial x_{j_1}} \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_{j_\ell}} f : U \to F$ existe et est continue

($\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\frac{\partial}{\partial x_{j_0}} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_l}} f_i : U \to F$ existe et est continue

ex : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x\sin y,\ e^{x+y}) \end{cases}$

- f est continue
- f est dérivable $/x$ et $/y$

$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto (\sin y,\ e^{x+y})$

$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto (x\cos y,\ e^{x+y})$

$\Big\}$ continues

donc $f \in C^1$

- .. $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dérivables $/x$ et $/y$

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto (0,\ e^{x+y})$

$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto (\cos y,\ e^{x+y})$

Th de Schwarz

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto (\cos y,\ e^{x+y})$

$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto (-x\sin y,\ e^{x+y})$

$\Big\}$ continues

donc $f \in C^2$

etc ......

notat° : $C^k(U,F)$: ens. des appli. de classe C^k sur U à valeurs de F

$C^\infty(U,F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U,F)$

Pp 1) $C^k(U,F)$ e.v

$C^k(U,\mathbb{R})$, $C^k(U,\mathbb{C})$ algèbres (combi. lin., produits)

$\begin{cases} f \in C^k(U,F) \\ f(U) \subset V \quad V \text{ ouvert de } E \\ g \in C^k(V,G) \end{cases}$ alors $g \circ f \in C^k(U,G)$

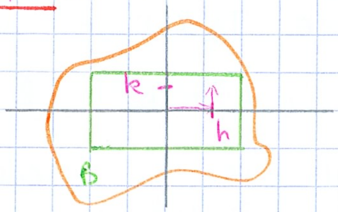
$\left(d(g\circ f)(a) = dg_{f(a)} \circ df_a \quad \text{récu} \right)$

2. Th de Schwarz

H U ouvert de $\mathbb{R}^2$ $\quad 0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

$\begin{cases} f : U \to \mathbb{R}^2 \in C^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(0) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0)$

inutile ici



$\exists \alpha > 0 \ /\ B_\infty(0,\alpha) \subset U$

soit $\Delta : B_\infty(0,\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$\Delta(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0)$

avec $\begin{cases} -\alpha < h < \alpha \\ -\alpha < k < \alpha \end{cases}$

* soit $\varphi : \begin{cases}]-\alpha,\alpha[\longrightarrow \mathbb{R} \\ h \longmapsto f(h,k) - f(h,0) \end{cases}$ alors $\Delta(h,k) = \varphi(h) - \varphi(0)$

$\varphi \in C^2$

$\varphi'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(h,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(h,0)$

Th acc finis : $\exists \theta_1 \in]0,1[\ /\ \varphi(h) - \varphi(0) = h\,\varphi'(\theta_1 h)$

donc $\Delta(h,k) = h\,\varphi'(\theta_1 h) = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_1 h, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_1 h, 0) \right)$

* soit $\psi : \begin{cases}]-\alpha,\alpha[\longrightarrow \mathbb{R} \\ k \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_1 h, k) \end{cases}$ alors $\Delta(h,k) = h\left(\psi(k) - \psi(0)\right)$

$\psi \in C^1$

$\psi'(k) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_1 h, k)$

Th acc finis : $\exists \theta_2 \in]0,1[\ /\ \psi(k) - \psi(0) = k\,\psi'(\theta_2 k)$

donc $\Delta(h,k) = hk\,\psi'(\theta_2 k) = hk\,\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_1 h, \theta_2 k)$

or, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f$ est continue

donc $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(\theta_1 h, \theta_2 k) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk} \Delta(h,k) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$

de m̂, $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk} \Delta(h,k) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(0,0)$

Ainsi, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$

b. généralisation

* $f(0) \in \mathbb{R}$
* $f : U \to F$ dém. compo. par compo : $\forall i \in \{1,\dots,n\}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f_i(0) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f_i(0)$
* $a \in U$, $a = (a_1, a_2)$

$\Delta(h,k) = f(a_1+h, a_2+k) - f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2+k) - f(a_1, a_2)$

* U ouvert de $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$,

$(j_1, j_2) \in \{1,\dots,m\}^2$, $: \left| \begin{array}{l}]a_{j_1}-\alpha, a_{j_1}+\alpha[\times]a_{j_2}-\alpha, a_{j_2}+\alpha[\longrightarrow F \\ (x_{j_1}, x_{j_2}) \longmapsto f(a_1, a_2, \dots, x_{j_1}, \dots, x_{j_2}, \dots, a_n) \end{array} \right.$

$(a = (a_1, \dots, a_{j_1}, \dots, a_{j_2}, \dots, a_n))$

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial}{\partial x_{j_2}} f(a_1, \dots, a_{j_1}, \dots, a_{j_2}, \dots, a_n) = \frac{\partial}{\partial x_{j_2}}\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} f(a_1, \dots, a_{j_2}, \dots, a_{j_1}, \dots, a_n)$$

* $\forall (h,k) \in E^2, \forall a \in U, \quad D_k D_h f(a) = D_h D_k f(a) \qquad \left(D_h f(a) = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right)$

donc $D_k D_h f(a) = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j D_k \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{\ell=1}^{n} h_j k_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}\frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$

* $f \in C^k(U,F)$, $\ell \in \{1,\dots,k\}$

$(j_1, \dots, j_\ell) \in \{1,\dots,m\}^\ell$, $\sigma \in \sigma_\ell$ $a \in U$

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \cdots\cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_\ell}} f(a) = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(j_1)}} \cdots\cdots \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(j_\ell)}} f(a)$$

notat° : $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(a) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(a) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(a) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a)$

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(a) = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(a)$

expressions :

si $f \in C^2(U,F)$, $\quad df \in C^1(U, \mathcal{L}(E,F))$, $\quad \underbrace{d\,df}_{d^2f} \in C^0(U, \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F)))$

$\forall (h,k) \in E^2, \forall a \in U, \quad d^2 f_a(h) \in \mathcal{L}(E,F) \qquad (d^2 f_a(h))(k) \in F$

or, $\boxed{(d^2 f_a(h))(k)} = d_a(df_a(h))(k) = D_k(df_a(h)) = D_k D_h f(a) = D_h D_k f(a)$

$= \boxed{(d^2 f_a(k))(h)}$

ccl : $d^2 f_a \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$

$d^2 f_a$ appli bilinéaire sym de E ds F $d^2 f_a(h,k) = D_h D_k f(a)$

$h = (h_1, \dots, h_m) = (h_j)_{1 \leq j \leq m}$

$k = (k_1, \dots, k_m) = (k_\ell)_{1 \leq \ell \leq m} \qquad f(a) = (f_1(a), \dots\dots, f_n(a)) = (f_i(a))_{1 \leq i \leq n}$

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^{m} h_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, h_j \right)_{1 \leq i \leq n}$$

$$d^2 f_a(h,k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} h_j \cdot k_\ell \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}(a) = \left(\sum_{1 \leq j, \ell \leq m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_\ell} h_j k_\ell \right)_{1 \leq i \leq n}$$

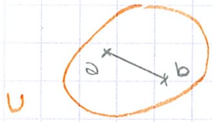
3. formules de Taylor

a. avec reste intégral

U ouvert convexe de E, $\quad f : U \to F \quad C^{k+1}$

$(a,b) \in U^2$

alors $f(b) = f(a) + D_{b-a} f(a) + \frac{1}{2} D_{b-a}^2 f(a) + \dots + \frac{1}{k!} D_{b-a}^k f(a) + \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-u)^k D_{b-a}^{k} f(a+u(b-a))\,du$



$$\varphi : \begin{vmatrix} [0,1] \longrightarrow F \\ t \longmapsto f(\underbrace{a+t(b-a)}_{\in U}) \end{vmatrix} \qquad \varphi \in C^k([0,1])$$

Taylor avec reste inté pr φ :

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \frac{\varphi'''(0)}{3!} + \dots + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-u)^k \varphi^{(k+1)}(u)\,du$$

or $\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t(b-a)) - f(a)}{t} = D_{b-a} f(a) = df_a(b-a)$

$\varphi'(t) = D_{b-a} f(a+t(b-a))$

$\varphi''(t) = D_{b-a} D_{b-a} f(a+t(b-a)) = D_{b-a}^2 f(a+t(b-a)) = d^2 f_{a+t(b-a)}(b-a, b-a)$

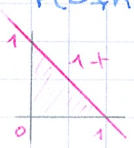
$a \in U$, $h \in E$ / $a+h \in U$, $f(a+h) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + \dots + \frac{1}{k!} D_h^k f(a) + \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-u)^k D_h^{k+1} f(a+uh)\,du$

b. Taylor-Young à l'ordre 2

U ouvert convexe de E $f : U \to F$ C^2, $a \in U$, $h \in E$ / $a+h \in U$

$f(a+h) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + o(\|h\|^2)$

$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2} d^2 f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$



$\int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 (1-t) D_h^2 f(a)\,dt = \frac{D_h^2 f(a)}{2}$

$f(a+h) = f(a) + D_h f(a) + \int_0^1 (1-t) D_h^2 f(a+th)\,dt$

$= f(a) + D_h f(a) + \underbrace{\frac{1}{2} D_h^2 f(a)}_{} + \int_0^1 (1-t)\left[D_h^2 f(a+th) - \underbrace{D_h^2 f(a)}_{\text{cste}}\right] dt$

or, $D_h^2 f(a+th) - D_h^2 f(a) = (d^2 f_{a+th} - d^2 f_a)(h,h)$

$\| D_h^2 f(a+th) - D_h^2 f(a) \| \leq \||| d^2 f_{a+th} - d^2 f_a \||| \; \|h\|^2$

$f \in C^2$ donc $d^2 f$ est continue

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \forall h \in E,\ \|h\| < \alpha \Rightarrow \begin{cases} a+h \in U \\ \forall t \in [0,1],\ \||| d^2 f_{a+th} - d^2 f_a \||| \leq \varepsilon \end{cases}$

$\left\| \int_0^1 (1-t)(D_h^2 f(a+th) - D_h^2 f(a))\,dt \right\| \leq \int_0^1 (1-t)\,\varepsilon \|h\|^2\,dt$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} \|h\|^2$

expression : $f \in C^2(U,F)$, U ouvert convexe, $a \in U$, $h \in E$ / $a+h \in U$

$f(a+h) = f(a) + D_h f(a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a) + o(\|h\|^2)$

$$= f(a) + \underbrace{\sum_{j=1}^m h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}_{\text{forme linéaire tangente}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m h_j h_l \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}(a)}_{\text{hessienne}} + o(\|h\|^2)$$

4 - applications aux extremums locaux

$\Phi : \begin{vmatrix} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h,k) \longmapsto D_h D_k f(a) \end{vmatrix}$ est une forme bilinéaire sym : hessienne de f en a

Th U ouvert de E, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$,

hessienne de f en a définie positive $\Rightarrow$ a minimum local strict

.... définie négative $\Rightarrow$ a maximum local strict

.... ni positive, ni négative $\Rightarrow$ a n'est pas extremum

rem : si la hessienne est juste positive, ou négative : pas de ccl

Φ : hessienne de f en a, $\exists r > 0 / \underbrace{B(a,r)}_{\text{ouvert convexe}} \subset U$

$\forall h \in E,\ \|h\| < r \Rightarrow a+h \in B(a,r) \subset U$ $\quad$ 0 car a pt critique

$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + \cancel{df_a(h)} + \frac{1}{2} \Phi(h,h) + o(\|h\|^2)$

1er cas : Φ déf. positive : $Sp\,\Phi \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\inf Sp\,\Phi = \lambda > 0$

$\forall h \in E,\ \Phi(h,h) \geq \lambda \|h\|^2$

(ds la Bon de diago de Φ : $\Phi(h,h) = \sum \lambda_i h_i^2 \geq \sum \lambda h_i^2 = \lambda \|h\|^2$)

$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\Phi(h,h) + o(\|h\|^2)$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \,/\, \forall h \in E,$

$\|h\| < \alpha \Rightarrow |f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2}\Phi(h,h)| \leq \varepsilon \|h\|^2$

soit $\varepsilon = \frac{\lambda}{4} > 0$,

$\forall h \in E,\quad \|h\| < \inf(\alpha, r) \Rightarrow |f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2}\Phi(h,h)| \leq \frac{\lambda}{4}\|h\|^2$

$\Rightarrow f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2}\Phi(h,h) \geq -\frac{\lambda}{4}\|h\|^2$

$\Rightarrow f(a+h) \geq f(a) + \frac{1}{2}\left(\lambda\|h\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|h\|^2\right)$

$\Rightarrow f(a+h) \geq f(a) + \frac{\lambda}{4}\|h\|^2$

2ème cas : Φ déf. négative : idem

3ème cas : $\Phi \begin{cases} \text{non négative} : \exists \mu \in Sp\,\Phi \cap \mathbb{R}^{+*} \\ \text{non positive} : \exists \lambda \in Sp\,\Phi \cap \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$

$\begin{cases} \exists h \in E,\ h \neq 0 \,/\, \Phi(h,h) = \lambda \|h\|^2 \\ \exists k \in E,\ k \neq 0 \,/\, \Phi(k,k) = \mu \|k\|^2 \end{cases}$

$\exists \alpha > 0 \,/\, \forall t \in]-\alpha, \alpha[,\ \begin{cases} \|th\| < r \\ \|tk\| < r \end{cases}$

$t \in]-\alpha,\alpha[,\ f(a+th) = f(a) + 0 + \frac{1}{2}\Phi(th,th) + o(\|th\|^2)$

$= f(a) + \frac{\lambda}{2}t^2\|h\|^2 + o(t^2) = f(a) + \underbrace{\left(\frac{\lambda}{2} + o(1)\right)}_{<0 \text{ pr } t \text{ voisin de } 0} t^2\|h\|^2$

t voisin de $0 \Rightarrow f(a+th) < f(a)$

de m̂, $f(a+tk) = f(a) + \left(\frac{\mu}{2} + o(1)\right) t^2 \|k\|^2$

t voisin de $0 \Rightarrow f(a+tk) > f(a)$

corollaire : notat° de Monge

U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $a \in U$

$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$ $\quad$ a pt critique $\Leftrightarrow$ $p = q = 0$

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$

matrice de la hessienne de f en a ds la base cano de $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{l} \Phi(h,h) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=m}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_j h_\ell \\ \Phi\left(\binom{h_1}{h_2},\binom{h_1}{h_2}\right) = r h_1^2 + s h_1 h_2 + s h_1 h_2 + t h_2^2 \end{array} \right)$

alors $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ $\Rightarrow$ a minimum local strict

$r < 0$ $\Rightarrow$ maximum

$rt - s^2 < 0$ $\Rightarrow$ a ni max ni min

$rt - s^2 = 0$ pas de ccl

$r + t$ = trace : invariante par diagonalisat°

or, trace(mat diagonalisée) = $\sum$ vl.p.

cf p.66

soient λ_1, λ_2 les valeurs propres de Φ :

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = r + t \\ \lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2 \end{cases}$ coeff cst du poly caract.

1er cas : $rt - s^2 > 0$: λ_1 et λ_2 de m̂ signe, celui de r

1er ss-cas : $r > 0$: Φ défi. positive

2ème ss-cas : $r < 0$: Φ défi. négative

2ème cas : $rt - s^2 < 0$: une valeur propre > 0, l'autre < 0

$\begin{cases} Sp\,\Phi \not\subset \mathbb{R}^{+*} \\ Sp\,\Phi \not\subset \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$ $\quad$ Φ ni $\oplus$ ni $\ominus$

3ème cas : $rt - s^2 = 0$: Φ est $\oplus$ ou $\ominus$

ex : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^4 - y^4 \end{array}$

$\begin{cases} p = 4x^3 \\ q = -4y^3 \end{cases}$ $\quad$ $p = q = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

en $(0,0)$: $\left.\begin{cases} r = 12x^2 = 0 \\ s = 0 \\ t = -12y^2 = 0 \end{cases}\right\}$ $rt - s^2 = 0$ $\quad$ $u \neq 0$, $f(u,0) > 0 = f(0,0)$, $f(0,u) < 0$

pr $x^4 + y^4$: mini local

VI Difféomorphismes

1. U ouvert de E, $f \in C^k(U,F)$, $V = f(U)$
f réalise un C^k-difféo de U sur V $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ injective} \\ V \text{ ouvert de } F \\ f^{-1} : V \to U \text{ de classe } C^k \end{cases}$

Pp) f réalise un C^k difféo de U sur V, $k \geq 1$
$f \circ f^{-1} = Id_V$ $\quad f^{-1} \circ f = Id_U$
en différenciant :
$\forall y \in V,\ df_{f^{-1}(y)} \circ df^{-1}_y = Id_F \ (= d\,Id_{V_y})$ $\quad d\,Id_V \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(E,F))$
$\forall x \in U,\ df^{-1}_{f(x)} \circ df_x = Id_E$

donc $\begin{cases} d(f^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1} \\ d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1} \end{cases}$

$y = f(x)$, $d(f^{-1})_y = (df_x)^{-1}$

rem : nécessairement, $\forall x \in U$, df_x est inversible
or $df_x \in \mathcal{L}(E,F)$
donc $\dim E = \dim F$ (on ne peut faire des C^k-difféo qu'entre des espaces de m̂ dim)

Dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E et F,
$Jac(f^{-1}_y) = (Jac\, f_x)^{-1}$

$f \in C^k(U,F)$, $x \in U$, f étale en x $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \dim E = \dim F \\ df_x \text{ Isomorphisme} \end{cases}$

ds $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, si $\dim E = \dim F$
si $x \in U$, jacobien de f en x = $\det Jac\, f(x)$
" $jac\, f(x)$ réel — matrice carrée

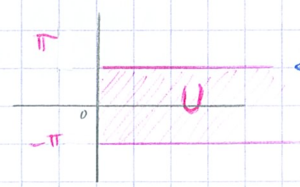
f étale en x $\Leftrightarrow$ $jac\, f(x) \neq 0$

2. Th d'inversion locale
Th
$\dim E = \dim F$, U ouvert de E
$f \in C^k(U,F)$, $k \geq 1$, $x \in U$
f étale en x $\Longrightarrow$ $\exists r > 0$ / f réalise un C^k difféo de $B(x,r)$ sur $f(B(x,r))$

3. Th d'inversion globale
Th
$\forall x \in U$, $\begin{cases} f \text{ étale en } x \\ f \text{ injective} \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} V = f(U) \text{ ouvert de } F \\ f \text{ réalise un } C^k\text{-difféo de } U \text{ sur } V \end{cases}$

VII Coordonnées polaires

$U = \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ ouvert de $\mathbb{R}^2$



$P : \begin{vmatrix} U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} e \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} e\cos\theta \\ e\sin\theta \end{pmatrix} \end{vmatrix}$ est C^∞

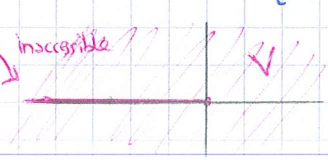
* soient $(e, e') \in \mathbb{R}^{+2}$, $(\theta, \theta') \in]-\pi, \pi[^2$,
$\begin{pmatrix} e\cos\theta \\ e\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'\cos\theta' \\ e'\sin\theta' \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} e^2 = e'^2 \\ e\cos\theta = e'\cos\theta' \\ e\sin\theta = e'\sin\theta' \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} e = e' \\ \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} e = e' \\ \theta = \theta' \end{cases}$

donc P injective

* $Jac\, P(e,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -e\sin\theta \\ \sin\theta & e\cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad jac\, P(e,\theta) = e > 0$ donc P étale en (e,θ)

$P(U) = V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) / x \leq 0\}$

$e > 0$
$-\pi < \theta < \pi$



ainsi, P réalise un C^∞ difféo de U sur V
(th inv° globale)

P_p) chg^t de coord.

$f \in C^k(V,\mathbb{R})$, $\forall (x,y) \in V^2$, $\exists (\rho,\theta) \in U$ / $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\qquad (\rho,\theta) = P^{-1}(x,y)$

$f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = F(\rho,\theta)$ (nouvelles variables $\rightarrow$ nouveau nom)

F définie sur U, $\quad f \circ P = F$

$\qquad f = F \circ P^{-1}$

$$\mathrm{Jac}\, f\underbrace{(x,y)}_{P(\rho,\theta)} \cdot \mathrm{Jac}\, P(\rho,\theta) = \mathrm{Jac}\, F(\rho,\theta)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}}_{\frac{\partial F}{\partial \rho}} & \underbrace{-\rho\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}}_{\frac{\partial F}{\partial \theta}} \end{pmatrix}$$

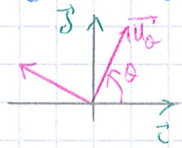
$$\mathrm{Jac}\, f(x,y) = \mathrm{Jac}\, F(\rho,\theta) \left(\mathrm{Jac}\, P(\rho,\theta)\right)^{-1}$$

$$\left(\mathrm{Jac}\, P(\rho,\theta)\right)^{-1} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\theta & \rho\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\cos\theta \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}}_{\frac{\partial f}{\partial x}} & \underbrace{\sin\theta \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}}_{\frac{\partial f}{\partial y}} \end{pmatrix}$$

gradient en polaires

$$\vec{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} = \left(\cos\theta \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)\vec{\imath} + \left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)\vec{\jmath}$$



$$= \frac{\partial F}{\partial \rho}\left(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\left(-\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right) = \frac{\partial F}{\partial \rho}\vec{u_\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$$

laplacien en polaires

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}} - \cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho\partial \theta}} + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} - \cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta\partial \rho}} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} - \cancel{\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\sin\ \cos}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho\partial \theta}} + \frac{\cos^2\theta}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta\partial \rho}} + \frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

une forme linéaire est de classe C^1 (p. 189)