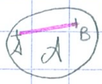
Fonction convexe

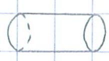
I Définitions

La partie $\mathcal{A}$ du plan est convexe ssi :
pour tout $(A,B) \in \mathcal{A}^2$, le segment $[AB]$ est inclus dans $\mathcal{A}$



non convexe

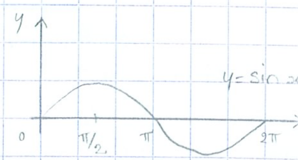
rem : dans l'espace :



volume convexe, surface non convexe

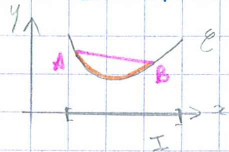
notations : I intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$, $(\mathcal{E}) : y = f(x)$
$\mathcal{A} = \{ M(x,y) \ / \ x \in I, \ y \geq f(x) \}$

f est convexe sur I ssi la partie $\mathcal{A}$ est convexe



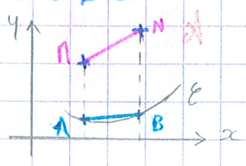
sin est convexe sur $[\pi, 2\pi]$
mais pas sur $[0, \pi]$

hyp : f convexe sur I



pour tout $A \in (\mathcal{E})$, $B \in (\mathcal{E})$,
la corde $[AB]$ est au-dessus de l'arc $\widehat{AB}$

réciproque : on suppose que pour tout $A \in (\mathcal{E})$, $B \in (\mathcal{E})$, $[AB]$ est au-dessus de $\widehat{AB}$



soient $\begin{cases} M, N & 2 \text{ points au-dessus de } \mathcal{E} \\ A \in (\mathcal{E}) & \text{de même abscisse que } M \\ B \in (\mathcal{E}) & \text{........................ } N \end{cases}$

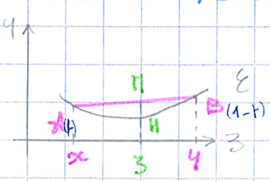
$\begin{cases} M \text{ est au-dessus de } A \\ N \text{ .... } B \end{cases}$ donc $[MN]$ est au-dessus de $[AB]$

or $[AB]$ est au-dessus de $\widehat{AB}$ donc $[MN]$ est au-dessus de $\widehat{AB}$

Ainsi, $[MN]$ est inclus dans $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}$ est convexe : f est convexe sur I.

Th f convexe sur I $\iff$ pour tout $A \in (\mathcal{E})$, $B \in (\mathcal{E})$, $[AB]$ est au-dessus de $\widehat{AB}$

interprétation analytique :



z est entre x et y : $z = y + t(x-y)$ avec $0 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow z = tx + (1-t)y$: $z = \text{bary}\{(x,t), (y, 1-t)\}$
la relation sur les abscisses se transmet aux coordonnées
$M = \text{bary}\{(A,t), (B, 1-t)\}$

donc $y_M = \text{bary}\{(y_A, t), (y_B, 1-t)\}$ $\Rightarrow y_M = t y_A + (1-t) y_B$

Ainsi, $M \begin{pmatrix} z = tx + (1-t)y \\ y = t f(x) + (1-t) f(y) \end{pmatrix}$ et $H \begin{pmatrix} z = tx + (1-t)y \\ y = f(tx + (1-t)y) \end{pmatrix}$

Th f convexe sur I $\iff$ $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$

f est concave sur I ssi $-f$ est convexe sur I

Th f concave sur I $\iff$ la partie du plan au-dessous de $\mathcal{E}$ est convexe
$\iff$ pour tout $A \in (\mathcal{E})$, $B \in (\mathcal{E})$, la corde $[AB]$ est au-dessous de $\widehat{AB}$
$\iff$ $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \geq t f(x) + (1-t) f(y)$

ex. Étudier la concavité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x^2$

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,1]$, soit $d = f[tx + (1-t)y] - t f(x) - (1-t) f(y)$
$= [tx + (1-t)y]^2 - tx^2 - (1-t)y^2$
$= (t^2 - t)x^2 + 2t(1-t)xy + (t^2 - t)y^2$
$= t(t-1)[x-y]^2 \leq 0$

f est donc convexe sur $\mathbb{R}$

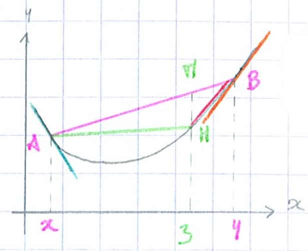
II Caractérisation de la convexité

1) hyp : f dérivable sur $I =]a,b[$ $\quad (a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

* On suppose f convexe sur I :

soit $(x,y,z) \in I^3$ avec $x<z<y$: $z = tx + (1-t)y$ avec $0<t<1$

on a $f(z) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ (1)



(1) $\Rightarrow f(z) - f(x) \leq (t-1)f(x) + (1-t)f(y)$

$\Rightarrow \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq (t-1)\dfrac{f(x)-f(y)}{z-x}$ $\quad$ or, $z-x = (t-1)(x-y)$

d'où $\underline{\underline{\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}}}$

coeff. dir. de (AH) $\quad$ coeff. dir. de (AB)

si $z \to x^+$, $\quad \underline{\underline{f'_d(x) \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}}}$ $\quad$: $f'(x) \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

coeff. dir. de T_A

(1) $\Rightarrow f(z) - f(y) \leq tf(x) - tf(y)$

$\Rightarrow \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq t\,\dfrac{f(x)-f(y)}{z-y}$ $\quad$ or, $z-y = t(x-y)$

d'où $\underline{\underline{\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}}}$ $\quad$ coeff. dir. de (AB)

coeff. dir. de (HB)

si $z \to y^-$, $\quad \underline{\underline{f'_g(y) \geq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}}}$ $\quad$: $f'(y) \geq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

coeff. dir de la tangente en B

Ainsi, $\underline{\underline{\text{si } x<y, \text{ alors } f'(x) \leq f'(y)}}$: $\underline{\underline{f \text{ convexe sur }]a,b[\Rightarrow f' \text{ croissante sur }]a}}$

* On suppose f' croissante sur I :

soit $(x,y) \in I^2$ avec $x \leq y$, $\quad$ pour tout $t \in [0,1]$

on pose $\varphi(t) = f(tx+(1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y)$

$\varphi(t) = f(y+t(x-y)) - tf(x) - (1-t)f(y)$ $\quad \varphi$ est dérivable sur $[0,1]$, et :

$\varphi'(t) = (x-y)f'(y+t(x-y)) - f(x) + f(y)$

. si t croît, $y+t(x-y) \searrow$ $\quad$ donc $f'(y+t(x-y)) \searrow$

or, $x-y<0$ $\quad$ donc $\varphi' \nearrow$

t	0		t_0		1
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ	0	↘ $-$		$-$ ↗	0

$\begin{cases} \varphi \text{ est continue, dérivable sur } [0,1] \\ \varphi(0) = \varphi(1) \end{cases}$

donc : th. de Rolle : $\exists\, t_0 \in]0,1[\,/\, \varphi'(t_0) = 0$

donc, pour tout $t \in [0,1]$, $\quad \varphi(t) \leq 0 \iff f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$

Ainsi, $\underline{\underline{f' \text{ croissante sur }]a,b[\Rightarrow f \text{ convexe sur }]a,b[}}$

Ainsi, f convexe sur $]a,b[\iff f'$ croissante sur $]a,b[$

2) * On suppose f convexe sur $]a,b[$:

T_c : $y = f'(c)(x-c) + f(c)$

soit $\varphi(x) = f(x) - f'(c)(x-c) - f(c)$ $\quad \varphi$ est dérivable sur $]a,b[$, d

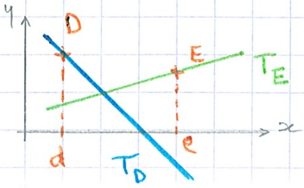
$\varphi'(x) = f'(x) - f'(c)$

x	a		c		b
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
φ	‖	↘ $+$	0	$+$ ↗	‖

f convexe $\Rightarrow f' \nearrow \Rightarrow \varphi' \nearrow$ sur $]a,b[$

donc pour tout $x \in]a,b[$, $f(x) \geq f'(c)(x-c) - f(c)$: $\underline{\underline{\mathcal{C} \text{ est au-dessus de } T}}$

* On suppose que $(\mathcal{C})$ est au-dessus de ses tangentes :



On considère 2 points $D(d,f(d))$ et $E(e,f(e))$ de $(\mathcal{C})$ avec $d<e$

T_D : $y = f'(d)(x-d) + f(d)$

$\mathcal{C}$ est au-dessus de T_D (car $\mathcal{C}$ est au-dessus de ses tangentes)

donc $\quad f(e) \geq f'(d)(e-d) + f(d)$

$\Rightarrow \dfrac{f(e)-f(d)}{e-d} \geq f'(d)$

De même, $\frac{f(d)-f(c)}{d-e} \leqslant f'(e)$ Ainsi, $f'(d) \leqslant f'(e)$ et $d<e$
donc f' est croissante sur $]a,b[$, donc f est convexe sur $]a,b[$.
Ainsi, $(\mathcal{E})$ au-dessus de T $\Longrightarrow$ f convexe sur $]a,b[$

Ainsi, $(\mathcal{E})$ au-dessus de ses tangentes $\Longleftrightarrow$ f convexe

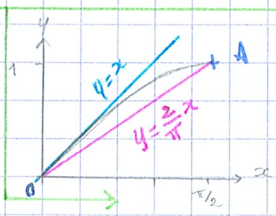
Th

hyp : f dérivable sur $I=]a,b[$
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- (P_1) : f est convexe sur I
- (P_2) : la partie du plan au-dessus de la courbe est convexe
- (P_3) : toute corde $[AB]$ est au-dessus de l'arc $\widehat{AB}$
- (P_4) : la courbe est au-dessus de ses tangentes
- (P_5) : $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$
- (P_6) : f' est croissante sur I
- (P_7) : si f est 2 fois dérivable sur I, $\forall x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$

Th

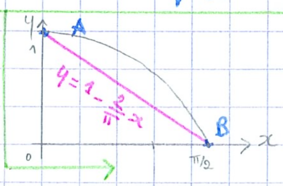
hyp : f dérivable sur I
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- (P_1) : f est concave sur I
- (P_2) : la partie du plan au-dessous de la courbe est concave
- (P_3) : toute corde $[AB]$ est au-dessous de l'arc $\widehat{AB}$
- (P_4) : la courbe est au-dessous de ses tangentes
- (P_5) : $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx+(1-t)y) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y)$
- (P_6) : f' est décroissante sur I
- (P_7) : si f est 2 fois dérivable sur I, $\forall x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$

ex : 1. Établir : pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$



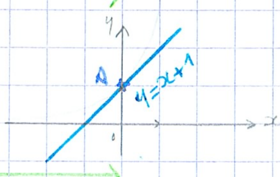
sin est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin''(x) = -\sin x \leqslant 0$: sin est concave
(OA) : $y=\frac{2}{\pi}x$ $\quad$ $\mathcal{E}$ est au-dessus de ses cordes
T_0 : $y=x$ $\quad$ $\mathcal{E}$ est au-dessous de ses tangentes

2. Établir : pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos x \geqslant 1-\frac{2}{\pi}x$

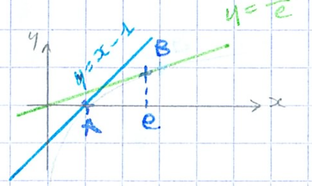


sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, cos est concave
$\mathcal{E}$ est au-dessus de $[AB]$

3.



exp est convexe sur $\mathbb{R}$,
$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$



ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$
$\forall x>0$, $\ln x \leqslant x-1$
$\leqslant \frac{x}{e}$

3) inégalité de convexité

hyp : f convexe sur I

on a $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$

on pose $\begin{cases} \alpha = t \\ \beta = 1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0 \end{cases}$

on a $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall \alpha \geqslant 0$, $\forall \beta \geqslant 0$ / $\alpha+\beta=1$, $\quad$ $f(\alpha x+\beta y) \leqslant \alpha f(x)+\beta f(y)$

Pb : Peut-on généraliser ?

hyp de récurrence : $\forall (x_1,\dots,x_n) \in I^n$, $\forall \alpha_1 \geqslant 0,\dots,\forall \alpha_n \geqslant 0$ / $\alpha_1+\dots+\alpha_n = 1$,
$f(\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1)+\dots+\alpha_n f(x_n)$

soit $(y_1,\dots,y_{n+1}) \in I^{n+1}$, soit $\beta_1 \geqslant 0,\dots,\beta_{n+1} \geqslant 0$ avec $\beta_1+\dots+\beta_{n+1} = 1$

$$f\left((\beta_1 y_1+\dots+\beta_n y_n)+\beta_{n+1}y_{n+1}\right) = f\left[(\beta_1+\dots+\beta_n)\frac{\beta_1 y_1+\dots+\beta_n y_n}{\beta_1+\dots+\beta_n}+\beta_{n+1}y_{n+1}\right]$$
$$\leqslant (\beta_1+\dots+\beta_n)\, f\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\dots+\beta_n}y_1+\dots+\frac{\beta_n}{\beta_1+\dots+\beta_n}y_n\right)+\beta_{n+1}f(y_{n+1})$$

$\leqslant (\beta_1+\dots+\beta_n)\left[\frac{\beta_1}{\beta_1+\dots+\beta_n} f(y_1)+\dots+\frac{\beta_n}{\beta_1+\dots+\beta_n} f(y_n)\right] + \beta_{n+1} f(y_{n+1})$

$= \beta_1 f(y_1)+\dots+\beta_n f(y_n) + \beta_{n+1} f(y_{n+1})$

Th si f est convexe sur I :
$\forall n \geqslant 2,\ \forall (x_1,\dots,x_n)\in I^n,\ \forall \alpha_1\geqslant 0,\dots,\forall \alpha_n \geqslant 0 \ /\ \alpha_1+\dots+\alpha_n = 1,$
$f(\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1)+\dots+\alpha_n f(x_n)$

$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$ si f est concave : $\geqslant$

ex : f convexe sur I, $\forall (x,y)\in I^2$, $f\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right) \leqslant \frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}f(y)$

pour $f = \exp$: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $e^{(x+2y)/3} \leqslant \frac{e^x+2e^y}{3}$

de même, $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ $e^{(x+2y+4z)/7} \leqslant \frac{e^x+2e^y+4e^z}{7}$

de même, $\forall (x,y,z)\in(\mathbb{R}^{+*})^3$, $\ln\left(\frac{x+3y+5z}{9}\right) \leqslant \frac{\ln x+3\ln y+5\ln z}{9}$

rem : si $\alpha_1=\dots=\alpha_n=\frac{1}{n}$, f convexe sur I, alors :
$\forall n\geqslant 2,\ \forall (x_1,\dots,x_n)\in I^n,\ f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}$
(l'image de la moyenne arithmétique est $\leqslant$ à la moyenne arithmétique des images)

application : $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$
soient $x_1>0,\dots,x_n>0$, $\ln\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \geqslant \frac{\ln x_1+\dots+\ln x_n}{n} = \ln(x_1\cdots x_n)^{1/n}$

$\Rightarrow \frac{x_1+\dots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$ moy arit $\geqslant$ moy géom.

en appliquant cette inégalité à $\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_n}$:

$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1\cdots x_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n} \iff \frac{1}{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n}$

Th pour tout $x_1>0,\dots,x_n>0$,
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$$
moyenne harmonique — géométrique — arithmétique

rem : il n'y a égalité que si tous les x_i sont égaux

ex : 1. Etablir : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$

$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\times 2\times\dots\times n} \leqslant \frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$

2. Etablir : $\forall a\geqslant 0, \forall b\geqslant 0, \forall c\geqslant 0$, $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$

$\sqrt[3]{a^3b^3c^3} \leqslant \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$ de même, $a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant 4abcd$

3. Etablir : $\forall a\geqslant 0, \forall b\geqslant 0, \forall c\geqslant 0$, $(a+b+c)^3 \geqslant 27abc$

$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow (a+b+c)^3 \geqslant 27abc$

4. Etudier sur $]1,+\infty[$ la convexité de $f : x \longmapsto \ln(\ln x)$
Etablir $\forall x>1,\ \forall y>1,\ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$

- f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et : $f'(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$

f' est dérivable sur $]1,+\infty[$, et : $f''(x) = -\frac{\ln x + x\frac{1}{x}}{(x\ln x)^2} = -\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2} \leqslant 0$

donc f est concave sur $]1,+\infty[$

• pour $x > 1$, $y > 1$, $f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \geqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$

$\ln\left(\ln \frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln x) + \frac{1}{2}\ln(\ln y) = \frac{1}{2}\ln(\ln x \ln y) = \ln\sqrt{\ln x \ln y}$

d'où $\ln \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$

5. Etudier la concavité de $\varphi : x \longmapsto \ln(1+e^x)$

En déduire : $\forall x_1 \geqslant 0, \dots, \forall x_n \geqslant 0$, $1 + \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \sqrt[n]{(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)}$

En déduire : $\forall a_1 \geqslant 0, \dots, \forall a_n \geqslant 0$, $\forall b_1 \geqslant 0, \dots, \forall b_n \geqslant 0$:

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)\dots(a_n+b_n)}$$

• φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$\varphi'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $\qquad \varphi' \nearrow$ sur $\mathbb{R}$, donc φ est convexe sur $\mathbb{R}$

• je pose $x_n = \ln y_n$ donc $y_n = e^{x_n}$

$\ln\left(1 + e^{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}\right) \leqslant \frac{\ln(1+e^{x_1})}{n} + \dots + \frac{\ln(1+e^{x_n})}{n}$

donc $\ln\left(1 + e^{\frac{1}{n}\ln(y_1 \dots y_n)}\right) \leqslant \frac{1}{n}\ln\left[(1+e^{\ln y_1})(1+e^{\ln y_2})\dots(1+e^{\ln y_n})\right]$

$\iff \ln\left(1 + (y_1 \dots y_n)^{1/n}\right) \leqslant \ln\left[(1+y_1)\dots(1+y_n)\right]^{1/n}$

donc $1 + \sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leqslant \sqrt[n]{(1+y_1)\dots(1+y_n)}$

• je pose $x_n = \frac{b_n}{a_n}$:

$1 + \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \sqrt[n]{(1+x_1)\dots(1+x_n)} \iff 1 + \frac{\sqrt[n]{b_1 \dots b_n}}{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}} \leqslant \sqrt[n]{\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)\dots\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)}$

$\iff \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \dots a_n\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)\dots\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)}$

$\leqslant \sqrt[n]{a_1 \dots a_n \frac{a_1+b_1}{a_1} \dots \frac{a_n+b_n}{a_n}}$

d'où $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)\dots(a_n+b_n)}$