Equations différentielles linéaires

E ev normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dim n, de base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$
$\mathcal{L}(E)$ algèbre munie de la norme associée
I intervalle, $\mathring{I}\neq\emptyset$

pas de pb avec l'intervalle

I Equations différentielles linéaires du 1er ordre à coeff continus

1. $a: I \to \mathcal{L}(E)$ continues (a : coeff, b : 2nd membre)
$b: I \to E$

pas un produit — appli lin qui travaille sur un vect

équa : $x' = a(x)+b$ ou $\forall t\in I,\ x'(t) = a(t)[x(t)]+b(t)$
équa. homo : $x' = ax$ ou $\forall t\in I,\ x'(t) = a(t)[x(t)]$
sol. : $\varphi : I \to E$ définie, continue, dérivable / $\forall t\in I,\ \varphi'(t) = a(t)[\varphi(t)]+b(t)$

* interprétat° matricielle
$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, a$ $\quad B$: vect. des coord. de b ds $\mathcal{B}$
$\quad X$: x $\qquad X' = A.X+B$

Pp 1) si $\begin{cases} a, b \text{ sont de classe } C^k \text{ sur } I \\ \varphi \text{ solut° de } x' = ax+b \end{cases}$ alors $\varphi \in C^{k+1}$

$\varphi\in C^1 \Rightarrow a\varphi+b\in C^1 \Rightarrow \varphi'\in C^1 \Rightarrow a\varphi'+b\in C^1 \Rightarrow \varphi''\in C^1 \dots$
$\dots \Rightarrow a\varphi^{(k)}+b\in C^k \Rightarrow \varphi'\in C^k \quad (\varphi^{(k+1)}\in C^k)$

2) L'ens. des sol. de l'équa. homo. : S_H est un ss ev de $C^{k+1}(I,E)$

$\Psi : C^{k+1} \to C^k(I,E)$, $x \mapsto x' - ax$ est linéaire (a est linéaire)

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(x,y)\in C^{k+1}(I,E)$,
$\Psi(\alpha x+\beta y) = (\alpha x+\beta y)' - a(\alpha x+\beta y) = \alpha x'+\beta y' - \alpha a x - \beta a y = \alpha\Psi(x)+\beta\Psi(y)$

3) $S_H = \mathrm{Ker}\,\Psi$ (est un ss ev de $C^{k+1}(I,E)$)
L'ens. des sol. de l'équa linéaire S est ~~vide~~ ou est un ss esp affine de $C^{k+1}(I,E)$, d'ev. directeur S_H

cf 2.

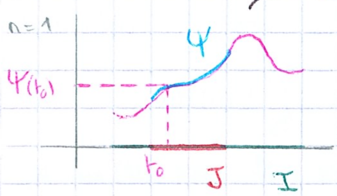
$\forall x\in C^{k+1}(I,E),\ x\in S \Leftrightarrow \Psi(x)=b \Leftrightarrow x\in\Psi^{-1}(b)$
si $b\notin \mathrm{Im}\,\Psi$: $S=\emptyset$
si $b\in\mathrm{Im}\,\Psi$, $\exists\,\varphi_0\in C^{k+1}(I,E)\ /\ \Psi(\varphi_0)=b$ (φ_0 sp)
$\forall\varphi\in C^{k+1}(I,E)$, $\varphi\in S \Leftrightarrow \Psi(\varphi)=b=\Psi(\varphi_0) \Leftrightarrow \Psi(\varphi)-\Psi(\varphi_0)=0$
$\Leftrightarrow \Psi(\varphi-\varphi_0)=0 \Leftrightarrow \varphi-\varphi_0\in\mathrm{Ker}\,\Psi = S_H$
$\Leftrightarrow \varphi\in\varphi_0+S_H$

4) si $\begin{cases}\varphi \text{ sol. de } x' = ax+b \\ J \text{ intervalle } \mathring{J}\neq\emptyset,\ J\subset I\end{cases}$ alors $\varphi_{/J}$ est sol. sur J de $x' = a_{/J}x + b_{/J}$

2. problème de Cauchy
- C.I. (de Cauchy) : $t_0\in I$, $x_0\in E$
- pb : trouver la sol. de $x' = ax+b$ vérifiant $\varphi(t_0)=x_0$

Th de Cauchy Lipschitz linéaire
si $\begin{cases} a : I\to\mathcal{L}(E) \\ b : I \to E \\ t_0\in I,\ x_0\in E\end{cases}$ continues alors $\exists\,!$ sol. φ de $x' = ax+b$ définie sur I, $\varphi(t_0) = x_0$

corollaires 1) $S\neq\emptyset$
2) si $\begin{cases} J \text{ intervalle } J\subset I,\ \mathring{J}\neq\emptyset \\ \psi \text{ sol. de } x' = ax+b \text{ sur } J\end{cases}$ alors $\exists\,!$ sol φ de $x' = ax+b$ sur I (φ prolongem^t de ψ)



$\begin{cases}\text{soit } t_0\in J, & (t_0\in I) \\ \psi(t_0)\in E\end{cases}$ $\quad (t_0, \psi(t_0))$: condit° de Cauchy
$\exists\,!$ sol. φ définie sur I / $\varphi(t_0)=\psi(t_0)$
et la restrict° de φ à J est sol. du pb de Cauchy sur J : $\begin{cases}x'=ax\dots \\ \varphi(t_0)=\psi\dots\end{cases}$

par unicité, $\varphi_{/J} = \psi$

équa. intégrale

φ sol. du pb de Cauchy alors $\forall t \in I$, $\boxed{\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(u)\,du + \int_{t_0}^t a(u)(\varphi(u))\,du}$

$\frac{d}{dt}\left(x_0 + \int_{t_0}^t b(u)du + \int_{t_0}^t a(u)(\varphi(u))du\right) = 0 + b(t) + a(t)(\varphi(t)) = \varphi'(t)$

récip^t : si $\varphi : I \to E$ continue vérifie $\forall t \in I$, $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(u)\,du + \int_{t_0}^t a(u)(\varphi(u))\,du$
alors $\begin{cases} \varphi \text{ est dérivable} \\ \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi' = a\varphi + b \end{cases}$

(dém. du th)

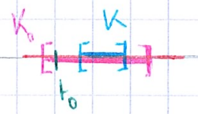
soit $y_0 : \begin{vmatrix} I \to E \\ t \mapsto x_0 \end{vmatrix}$ continue, de classe C^1

$\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} : \begin{vmatrix} I \to E \\ t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t \left(a(u)[y_n(u)] + b(u)\right) du \end{vmatrix}$

y_n est bien définie, de classe C^1 (intégrale d'une somme de fct° C^1)
$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(I,E)^{\mathbb{N}}$

Mq $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV simpl^t, et unif^t sur tt compact de I (séries télescopiques)

soit $v_n : \begin{vmatrix} I \to E \\ t \mapsto y_{n+1}(t) - y_n(t) \end{vmatrix}$



soit K un compact qcq de I
soit K_0 un compact (segment) de I / $\begin{cases} K \subset K_0 \\ t_0 \in K_0 \end{cases}$

$\delta(K_0)$: diamètre de K_0

rem : $\forall t \in K_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(t) = \int_{t_0}^t \left[a(u)(y_n(u)) - a(u)(y_{n-1}(u))\right] du$
$= \int_{t_0}^t a(u)(v_{n-1}(u))\,du$

existence : a est continue sur K_0 compact donc bornée :
$\exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall u \in K_0$, $|||a(u)||| \leq M$
v_0 est continue sur K_0 donc bornée :
$\exists A \in \mathbb{R}^+ / \forall u \in K_0$, $\|v_0(u)\| \leq A$

$u \in K_0$ car $(t, t_0) \in K_0^2$ segment

$\forall t \in K_0$, $\|v_1(t)\| = \left\|\int_{t_0}^t a(u)(v_0(u))\,du\right\| \leq \left|\int_{t_0}^t \|a(u)(v_0(u))\|du\right|$
$\leq \left|\int_{t_0}^t |||a(u)|||\,\|v_0(u)\|\,du\right| \leq \left|\int_{t_0}^t MA\,du\right| \leq MA\,|t-t_0|$
$\leq MA\,\delta(K_0)$

$\|v_2(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^t |||a(u)|||\,\|v_1(u)\|\,du\right| \leq \left|\int_{t_0}^t MA|u-t_0|\,du\right| \leq \frac{M^2A}{2}|t-t_0|^2$
$\leq \frac{M^2A}{2}\delta(K_0)^2$

$\vdots$

$\|v_n(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^t |||a(u)|||\,\|v_{n-1}(u)\|\,du\right| \leq \left|\int_{t_0}^t MA\frac{M^{n-1}}{(n-1)!}|u-t_0|^n\,du\right|$
$\leq \frac{M^nA}{n!}|t-t_0|^n \leq \frac{M^nA}{n!}\delta(K_0)^n$

or, $\lim \frac{(M\delta(K_0))^n}{n!}A = 0$

$\|v_n\|_\infty \leq 0$

donc $\sum v_n$ CV normal^t sur K_0 donc unif^t sur K_0
$y_{n+1} - y_0$
donc $\sum (y_{n+1} - y_n)$ CV unif^t sur K_0
donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV unif^t sur K_0, vers une fct° continue φ.

or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in K_0$, $y_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u)(y_n(u))\,du + \int_{t_0}^t b(u)\,du$

or $\begin{cases} a \text{ est continue} \\ y_n \text{ CV unif vers } \varphi \text{ sur } K_0 \end{cases}$ donc $a(y_n)$ CV unif vers $a(\varphi)$ sur K_0
donc par intégrat° sur le segment $[t_0, t]$,
$\forall t \in K_0$, $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u)(\varphi(u))\,du + \int_{t_0}^t b(u)\,du$

<u>unicité</u> : soient φ_1, φ_2 2 sol.

$\forall t \in I$, $\begin{cases} \varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u)\,(\varphi_1(u))\,du + \int_{t_0}^t b(u)\,du \\ \varphi_2(t) = \ldots\ldots\ldots \varphi_2(u) \ldots\ldots\ldots \end{cases}$

$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^t a(u)\,(\varphi_1(u) - \varphi_2(u))\,du$

$\forall K$ compact inclus ds I, K_0 segm^t compact / $\begin{cases} K \subset K_0 \\ t_0 \in K_0 \end{cases}$

$\forall u \in K_0$, $|||a(u)||| \leq M$ donc bornée

$\varphi_1 - \varphi_2$ continue sur K_0 : $\exists B \in \mathbb{R}^+ / \forall u \in K_0$, $\|\varphi_1(u) - \varphi_2(u)\| \leq B$

$\forall t \in K_0$, $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq B$

$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| = \|\int_{t_0}^t a(u)\,(\varphi_1(u) - \varphi_2(u))\,du\| \leq MB|t - t_0|$

$\leq \left|\int_{t_0}^t M\|\varphi_1(u) - \varphi_2(u)\|\,du\right| \leq \left|\int_{t_0}^t M^2 B|t - t_0|\,du\right| \leq \frac{M^2 B}{2}|t - t_0|^2$

$\vdots$

$\forall t \in K_0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \frac{M^n B}{n!}|t - t_0|^n \leq \frac{M^n B}{n!}\,\delta(K_0)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| = 0$ φ_1 et φ_2 coïncident sur tt compact de I donc sur I

3. Solutions de l'équation homogène

$t_0 \in I$, $\left| \begin{array}{l} S_H \longrightarrow E \\ \varphi \longmapsto \varphi(t_0) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'ev

Cauchy-Lips

conséq : $\dim S_H = \dim E = n$

syst. fondamental de sol. de l'équa. homo = base de S_H

$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in S_H{}^n$ génératrice et libre

Pp équivalentes) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in S_H{}^n$
1) $\iff (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ syst. fonda
2) $\iff (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ libre (ds $C^1(I, E)$)
3) $\iff \exists t \in I / (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ libre
4) $\iff \forall$ ……………

1) $\iff$ 2)

4) $\Rightarrow$ 3)

3) $\Rightarrow$ 2) $\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, $\alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n = 0$

$\Rightarrow \alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t) = 0$ (pr le t de 3))

$\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$

2) $\Rightarrow$ 4) contraposée : $\exists t_1 \in I / (\varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_n(t_1))$ liée non 4)

un vecteur est combi. lin. des autres, par ex $\varphi_1(t_1)$:

$\exists (\beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^{n-1} / \varphi_1(t_1) = \beta_2\varphi_2(t_1) + \ldots + \beta_n\varphi_n(t_1)$

$\varphi_1 - \beta_2\varphi_2 - \ldots - \beta_n\varphi_n \in S_H$

$(\varphi_1 - \beta_2\varphi_2 - \ldots - \beta_n\varphi_n)(t_1) = 0$

or, la fct^o nulle $\in S_H$ et s'annule en t_1 unique

Th Cauchy Lips. lin : $\varphi_1 - \beta_2\varphi_2 - \ldots - \beta_n\varphi_n = 0$

donc $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est liée non 2)

Cauchy-Lips : si une sol. s'annule en un pt, alors elle est nulle

$\mathcal{B}$ base de E, wronskien de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ds $\mathcal{B}$.

$W : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \end{array} \right.$ → sert à reconnaître si des familles sont libres ou non

Pp équivalentes) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ syst. fonda de solut^o $\iff \exists t \in I / W(t) \neq 0$

$\iff \forall$ ……………

<u>calcul</u>. $W \in C^{k+1}(I, E)$

$\forall t \in I$, $W'(t) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1'(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) + \ldots + \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t), \varphi_n'(t))$

si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est liée, alors $\forall t \in I$, $W(t) = 0$ donc $W'(t) = 0$

……………… libre, alors $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ syst. fonda

$\forall t \in I$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E

ds ce cas, $W'(t) = \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))}_{W(t)} \left[\det_{(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))}(\underbrace{\varphi_1'(t)}_{a(t)(\varphi_1(t))},\dots,\varphi_n(t)) + \dots + \det_{(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))}(\varphi_1(t),\dots,\underbrace{\varphi_n'(t)}_{a(t)(\varphi_n(t))}) \right]$

$$= W(t)\left(\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \ddots & 1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 1 & & & a_{1n} \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots 1 & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} \right) = W(t)\left(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}\right)$$

$W'(t) = W(t)\,\mathrm{tr}(a(t))$

ne dépend pas de la base, vrai ds les 2 cas (lié, libre)

W est sol. de l'équa. diff. lin. du 1er ordre : $W' = W\,\mathrm{tr}(a)$:

$$\forall t \in I, \quad W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(a(u))\,du}$$

$f : \begin{vmatrix} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(a(u))\,du} \end{vmatrix}$ $\quad f \in C^0(I, \mathbb{K})$

$\begin{cases} f'(t) = W(t_0)\,\mathrm{tr}(a(t))\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(a(u))\,du} = f(t)\,\mathrm{tr}(a(t)) \\ f(t_0) = W(t_0) \end{cases}$

donc f et W vérifient le $\hat{m}$ pb de Cauchy

donc par le th Cauchy-Lips, $W = f$

4. solutions de l'équation complète

si φ_0 sp. de $x' = ax + b$ alors $S = \varphi_0 + S_H$

si $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ syst. fonda de (H),

$$\varphi \in S \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ \varphi = \varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_n\varphi_n$$

pb : trouver une sp

$\rightarrow$ 3 méthodes :
- sol. évidente
- principe de superposit° des solut° (en phys : grandeurs additives)

  $x' = ax + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k$ (E)

  $\left.\begin{array}{l} \varphi_1 \text{ sol. de } x' = ax + b_1 \\ \vdots \\ \varphi_k \text{ sol. de } x' = ax + b_k \end{array}\right\}$ $\beta_1\varphi_1 + \dots + \beta_k\varphi_k$ sol. de (E)
- variation des cstes

ex : $\begin{cases} x' = 2ty + \sin(t^2) \\ y' = -2tx + \cos(t^2) \end{cases}$ $\quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ -2t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2ty \\ -2tx \end{pmatrix}$ $\quad B(t) = \begin{pmatrix} \sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

($\mathrm{tr}\, A(t) = 0 \Rightarrow W = \text{cste}$)

- (H) : $\begin{cases} x' = 2ty \\ y' = -2tx \end{cases}$ sol. : $\varphi_1 \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$ $\quad \varphi_2 : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ -\sin(t^2) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$

  si ces 2 sol. ne sont pas lin. indép (syst. non fonda) elles ne conviennent pas

  $W(t) = \begin{vmatrix} \sin(t^2) & \cos(t^2) \\ \cos(t^2) & -\sin(t^2) \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc (φ_1, φ_2) syst. fonda. de sol. de (H)

- sol. de l'équa. complète ss la forme : $\varphi_0 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$

  avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in C^1(I, \mathbb{K})$

  $\varphi_0' = \lambda_1'\varphi_1 + \cancel{\lambda_1\varphi_1'} + \lambda_2'\varphi_2 + \cancel{\lambda_2\varphi_2'} = \cancel{\lambda_1 a(\varphi_1)} + \cancel{\lambda_2 a(\varphi_2)} + b$

  $\iff \underbrace{\lambda_1'}_{\in \mathbb{K}}\underbrace{\varphi_1}_{\in E} + \lambda_2'\varphi_2 = b$ syst. lin de dét : $W(t) \neq 0$ (Cramer)

  $$\lambda_1'(t)\begin{pmatrix} \sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix} + \lambda_2'(t)\begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ -\sin(t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix}$$

  $\iff \begin{cases} \sin(t^2)\,\lambda_1'(t) + \cos(t^2)\,\lambda_2'(t) = \sin(t^2) \\ \cos(t^2)\,\lambda_1'(t) - \sin(t^2)\,\lambda_2'(t) = \cos(t^2) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1'(t) = 1 \\ \lambda_2'(t) = 0 \end{cases}$

  d'où une primitive : $\begin{cases} \lambda_1 : t \longmapsto t \\ \lambda_2 : t \longmapsto 0 \end{cases}$

  une Sp : $\begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} t\sin(t^2) \\ t\cos(t^2) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$

les sol : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} t\sin(t^2) + \lambda_1 \sin(t^2) + \lambda_2 \cos(t^2) \\ t\cos(t^2) + \lambda_1 \cos(t^2) - \lambda_2 \sin(t^2) \end{pmatrix} \end{cases}$

II Équations différentielles linéaires du 1^er ordre à coefficient constant (2nd membre var)

$\begin{cases} a \in \mathcal{L}(E) \\ b \in C^k(I,E) \end{cases}$ $\quad x' = ax + b \quad$ $\begin{cases} A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(a) \\ B = \text{coord. de } b \text{ ds } \mathcal{B} \end{cases}$ $\quad X' = AX + B$

1. solutions de l'équation homogène

a. exponentielle d'endomorphisme

$\forall a \in \mathcal{L}(E), \quad e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k$ série abs.o CV

Pp 1) : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ t \longmapsto e^{ta} \end{cases} \in C^\infty$

2) $\frac{d}{dt}(e^{ta}) = a \circ e^{ta} = e^{ta} \circ a$

3) $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{(s+t)a} = e^{sa} \circ e^{ta} = e^{ta} \circ e^{sa}$

4) $e^{ta} \in Gl(E), \quad (e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$

b. Solution du pb de Cauchy homogène

$x_0 \in E, t_0 \in I$ $\quad \varphi_0 : \begin{cases} I \longrightarrow E \\ t \longmapsto e^{((t-t_0)a)}(x_0) \end{cases}$

$\varphi_0 \in C^\infty(I)$

$\varphi_0(t_0) = x_0$

$\varphi_0'(t) = (a \circ e^{(t-t_0)a})(x_0) = a(e^{(t-t_0)a})(x_0) = a\,\varphi_0(t)$

c. système fondamental de solutions

soit $(x_1, \dots, x_n)$ base de E, soit $\varphi_i : \begin{cases} I \longrightarrow E \\ t \longmapsto e^{(t-t_0)a}(x_i) \end{cases}$

alors, $\begin{cases} (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S_H^n \\ (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \text{ est libre} \end{cases}$ ($\varphi_i(t)_0 = y$ a une ! sol.)

donc c'est un syst. fonda. de sol. de S_H

et $W(t) = \det_{\mathcal{B}}(e^{(t-t_0)a}(x_1), \dots, e^{(t-t_0)a}(x_n))$

$= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \det_{(x_1, \dots, x_n)}(e^{(t-t_0)a}(x_1), \dots, e^{(t-t_0)a}(x_n))$

$\varphi_i(t_0) = x_{i_0}$ $\quad = W(t_0) \det(e^{(t-t_0)a})$

rem : $W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(a(u))\,du} = W(t_0)\, e^{(t-t_0)\text{tr}(a)}$

ccl : $\det(e^{(t-t_0)a}) = e^{(t-t_0)\text{tr}\,a}$ $\quad \det(e^a) = e^{\text{tr}\,a}$

ex : $X' = AX$

1^er cas : A diagonalisable $\quad \exists \begin{cases} P \in Gl_n(\mathbb{K}) \\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \end{cases}$ / $D = P^{-1}AP$

méth 1 :

$X_1, \dots, X_n$ vect. propres de A pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\quad (P = (X_1, \dots, X_n))$

$\begin{cases} \varphi_1 : t \longmapsto (e^{\lambda_1 t}) X_1 \\ \vdots \\ \varphi_n : t \longmapsto (e^{\lambda_n t}) X_n \end{cases}$ $\quad \varphi_1'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} X_1 = e^{\lambda_1 t} \lambda_1 X_1 = e^{\lambda_1 t} A X_1$
$= A(e^{\lambda_1 t} X_1) = A\varphi_1(t)$

donc $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un syst. fonda de sol. de (H)

sol. de (H) : $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ t \longmapsto \alpha_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} X_n \end{cases}$ $\quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$

méth 2 :

$\begin{cases} D = P^{-1}AP \\ X' = AX \end{cases}$ $\quad$ je pose $X = PY$, $\quad X' = PY' = AX = APY$

donc $Y' = P^{-1}APY = DY$

$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases} y_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$

(pas besoin de P^{-1}) $\quad$ on connaît Y puis $X = PY$

Ex : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 6x + 2y \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = (1-X)(2-X)-6 = X^2 - 3X - 4 = (X+1)(X-4)$

A est diagonalisable

val. p. -1 : $\begin{cases} x+y=-x \\ 6x+2y=-y \end{cases}$ $\quad X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad X(t) = \alpha_1 e^{-t} X_1 + \alpha_2 e^{4t} X_2$

4 : $\begin{cases} x+y=4x \\ 6x+2y=4y \end{cases}$ $\quad X_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

sol. : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{4t} \\ -2\alpha_1 e^{-t} + 3\alpha_2 e^{4t} \end{pmatrix} \end{array} \right.$ $\quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

2ème cas : A non diagonalisable

$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = (2-X)(-X)+1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ scindé

or, $A \neq I_2$ donc A non diagonalisable

A trigonalisable

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T$

val. p. 1 : $\begin{cases} 2x - y = x \\ x = y \end{cases}$ $\quad X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad X_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qcq / (X_1, X_2) libre

$A X_1 = X_1$

$A X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1 + X_2$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T$

$PY = X$ $\quad P^{-1}X' = P^{-1}APY$ $\quad Y' = TY$ $\quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} u' = u + v \\ v' = v \end{cases}$

$X' = AX$

$\Rightarrow \begin{cases} v(t) = \alpha_1 e^t \\ u' = u + \alpha_1 e^t \end{cases}$

(H) : $u' = u \Rightarrow u = \alpha_2 e^t$ $\qquad \begin{cases} v(t) = \alpha_1 e^t \\ u(t) = \alpha_1 t e^t + \alpha_2 e^t \end{cases}$

sp : $\alpha_1 t e^t$

$Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 t e^t + \alpha_2 e^t \\ \alpha_1 e^t \end{pmatrix}$ $\qquad X = PY$ $\qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 t e^t + (\alpha_1 + \alpha_2) e^t \\ \alpha_1 t e^t + \alpha_2 e^t \end{pmatrix}$

3ème cas : A non trigonalisable

$\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = x \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = (2-X)(-X)+2 = X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1$

pas de racines ds $\mathbb{R}$

ds $\mathbb{C}$: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i \end{cases}$ $\quad X_1$: $\begin{cases} 2x - 2y = (1+i)x \\ x = (1+i)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [2(1+i)-2]y = (1+i)^2 y \\ x = (1+i)y \end{cases} \Leftrightarrow x = (1+i)y$

$X_1 \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ de m, $X_2 \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$

sol. complexes : $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ t \longmapsto \alpha_1 e^{(1+i)t} X_1 + \alpha_2 e^{(1-i)t} X_2 \end{array} \right.$ $\quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$

conjugués

une sol. réelle : $e^{(1+i)t} X_1 + e^{(1-i)t} X_2 = 2\mathrm{Re}\left(e^{(1+i)t} X_1\right)$

conjugués

une autre : $\frac{1}{i}\left(e^{(1+i)t} X_1 - e^{(1-i)t} X_2\right) = 2\,\mathrm{Im}\left(e^{(1+i)t} X_1\right)$

$\det_{(X_1, X_2)}\left(e^{(1+i)t} X_1 + e^{(1-i)t} X_2, \frac{1}{i}\left(e^{(1+i)t} X_1 - e^{(1-i)t} X_2\right)\right) = -\frac{2}{i} e^{2t} \neq 0$

$\begin{vmatrix} e^{(1+i)t} & \frac{1}{i} e^{(1+i)t} \\ e^{(1-i)t} & -\frac{1}{i} e^{(1-i)t} \end{vmatrix}$

$-\frac{2}{i} e^{(1+i)t} e^{(1-i)t} = -\frac{2}{i} e^{2t}$

$\varphi_1(t) = 2e^t \left(\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ $\qquad \varphi_2(t) = 2e^t \left(\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

sol : $\begin{cases} x(t) = e^t(\beta \cos t - \beta \sin t + \gamma \cos t + \gamma \sin t) \\ y(t) = e^t(\beta \cos t + \gamma \sin t) \end{cases}$ $\quad (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$

* $\forall (t_0, x_0) \in I \times E$, $\quad \varphi : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow E \\ t \longmapsto e^{(t-t_0)a}(x_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)a}\, b(u)\, du \end{array} \right.$

φ est la sol. du pb de Cauchy $(\varphi(t_0) = x_0)$

dérivée de $\int$

$\varphi'(t) = a \circ e^{(t-t_0)a}(x_0) + a \circ e^{ta} \int_{t_0}^{t} e^{-ua} b(u)\, du + e^{ta} e^{-ta} b(t)$

$= a\left[e^{(t-t_0)a}(x_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)a} b(u)\, du\right] + b(t) = a(\varphi(t)) + b(t)$

$\varphi(t_0) = x_0 + 0$

III Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients continus

$(\alpha,\beta,b)\in C^0(I,\mathbb{K})^3$, $\forall t\in I,\ \alpha(t)\neq 0$ $\quad \alpha y'+\beta y=b$

$\forall t\in I,\ \alpha(t)y'(t)+\beta(t)y(t)=b(t)$

(H) : $\alpha y'+\beta y=0$

* rem : * m̂ situat° qu'au I : $y'=-\frac{\beta}{\alpha}y-\frac{b}{\alpha}$

$\forall t\in I,\ a(t):\left|\begin{array}{l}\mathbb{K}\to\mathbb{K}\\ u\mapsto \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}u\end{array}\right.$ $\quad a(t)\in\mathcal{L}(\mathbb{K})$

ccl : solut° de classe $C^1(I)$ $\quad$ (C^{k+1} si α,β,b de classe C^k)

dim $S_H=1$

S esp. affine d'ev directeur S_H

th Cauchy Lips : $\forall t_0\in I,\ \forall y_0\in\mathbb{K},\ \exists!$ sol. φ / $\varphi(t_0)=y_0$ (sur I)

1. solutions de (H)

méth 1 : $t_0\in I$, $\varphi_0:\left|\begin{array}{l}I\to\mathbb{K}\\ t\mapsto e^{-\int_{t_0}^t\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}du}\end{array}\right.$ $\quad$ alors φ_0 est une sol. non nulle de (H)

(φ_0) est un syst. fonda de sol. de (H)

$$\forall t\in I,\ \varphi_0'(t)=-\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}e^{-\int_{t_0}^t\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}du}=-\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\varphi_0(t)$$

méth 2 : séparat° des variables ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

$\varphi'(t)=-\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\varphi(t)$ $\quad$ soit φ une sol.

1er cas : $\exists t_0\in I/\ \varphi(t_0)=0$

alors, par Cauchy-Lips, $\forall t\in I,\ \varphi(t)=0$

2ème cas : $\forall t\in I,\ \varphi(t)\neq 0$

alors $\begin{cases}I \text{ est connexe par arcs}\\ \varphi \text{ est continue}\end{cases}$

donc $(\forall t\in I,\ \varphi(t)>0)$ ou $(\forall t\in I,\ \varphi(t)<0)$

$$\forall t\in I,\ \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=-\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\Rightarrow\int_{t_0}^t\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}du=\int_{t_0}^t-\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}du\Rightarrow\left[\ln|\varphi(u)|\right]_{t_0}^t=-\int_{t_0}^t\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}du$$

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \ln|\varphi(t)|-\lambda=-\int_{t_0}^t\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}du$$

$$\Rightarrow|\varphi(t)|=e^{\lambda}e^{-\int_{t_0}^t\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}du}$$

$$\exists\mu\in\mathbb{R}^*/\ \forall t\in I,\ \varphi(t)=\mu e^{-\int_{t_0}^t\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}du}$$

donc les sol. sont $\boxed{\left|\begin{array}{l}I\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\mu e^{-\int_{t_0}^t\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}du}\end{array}\right.}$ $\mu\in\mathbb{R}^*$

2. solutions de l'équation complète

recherche d'une sp. → sol évid.

→ cas partic. (polynôme, ...)

→ superposit°

→ var. de la cste : $\alpha y'+\beta y=b$ $\quad \varphi_0\neq 0\in S_H$

on cherche $\lambda\in C^1(I,\mathbb{K})$ / $\varphi=\lambda\varphi_0$ solut°

$\alpha\lambda'\varphi_0=b$

rem : si α s'annule sur I,

$\exists t_0\in \mathring{I}/\ \alpha(t_0)=0$ et $\forall t\in I\setminus\{t_0\},\ \alpha(t)\neq 0$,

on résout $\begin{cases}\text{sur } I\cap]-\infty,t_0[\\ \text{sur } I\cap]t_0,+\infty[\end{cases}$ $\quad$ puis on accorde les sol.

(S peut être vide, de dim 0, 1 ou 2)

IV Équations différentielles linéaires scalaires du 2nd ordre à coefficient continus

$(\alpha,\beta,\gamma,b)\in C^0(I,\mathbb{K})^4$ $\quad\forall t\in I,\ \alpha(t)\neq 0$ $\quad\alpha y''+\beta y'+\gamma y=b$

$\forall t\in I,\ \alpha(t)y''(t)+\beta(t)y'(t)+\gamma(t)y(t)=b(t)$

1. transformation

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\gamma}{\alpha} & -\frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{\alpha} \end{pmatrix}$ $A \in C^0(I, \mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$ $(Y,B) \in C^0(I,\mathbb{K})^2$

$AY + B = \begin{pmatrix} y' \\ -\frac{\gamma y}{\alpha} - \frac{\beta y'}{\alpha} + \frac{b}{\alpha} \end{pmatrix}$ $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = b \iff Y' = AY + B$

conséquences : * les sol. sont de classe $C^2(I)$

* Th Cauchy-Lips. lin. : $\forall t_0 \in I$, $\forall (y_0, z_0) \in \mathbb{K}^2$, $\exists!$ sol φ de $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = b$, définie sur I / $\begin{cases} \varphi(t_0) = y_0 \\ \varphi'(t_0) = z_0 \end{cases}$

2. solutions de l'équation homogène

$\dim S_H = 2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in S_H^2$

syst. fonda (de $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$) $\iff (\varphi_1, \varphi_2)$ base de S_H

$\iff \left(\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{pmatrix} \right)$ syst. fonda de $Y' = AY$

$\iff \exists t_0 \in I / \left(\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} \right)$ est libre

$\iff \forall t$ ...

$\iff W : \begin{vmatrix} I \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix}$ $\exists t_0 \in I / W(t_0) \neq 0$

$\iff \forall t$ ...

calcul : $W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))\, W(t) = -\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} W(t)$

sol : $W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{\beta(u)}{\alpha(u)} du}$

3. solutions de l'équation complète

a. recherche d'un syst. fonda.

* var. de la cste

b. recherche d'une s.p

* sol. évidente
* superpositº
* var des cstes

ex : $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 \sin x$: (E) $I =]1, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 1[$)

• (H) : $(x-1)y'' - xy' + y = 0$

φ_1 s.p. : $\varphi_1 : \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{vmatrix}$

$\varphi_2 \to$ non évidente $\to$ var de la cste :

$\begin{cases} \varphi_2(x) = \lambda(x)\varphi_1(x) = \lambda(x)\, x \\ \varphi_2'(x) = \lambda'(x)\, x + \lambda(x) \\ \varphi_2''(x) = \lambda''(x)\, x + 2\lambda'(x) \end{cases}$

(H) : $(x-1)[\lambda'' x + 2\lambda'] - x[\lambda' x + \lambda] + [\lambda x] = 0$

$\iff x(x-1)\lambda'' + [2(x-1) - x^2]\lambda' - x\lambda + \lambda x = 0$

$\iff x(x-1)\lambda'' + (-x^2 + 2x - 2)\lambda' = 0$

$J \subset \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$\iff \frac{\lambda''}{\lambda'} = \frac{-x^2 + 2x - 2}{x(x-1)} = \dots = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}$

$\iff \ln|\lambda'| = x - 2\ln|x| + \ln|x-1|$

$\iff \lambda' = \frac{x-1}{x^2} e^x$

d'où une sol : $\lambda(x) = \frac{e^x}{x}$ $\varphi_2 : \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{vmatrix}$

Vérif : $W(x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = (x-1)e^x \neq 0$

• on cherche une sol de (E) : $\varphi = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$ avec $(\lambda, \mu) \in C^2(I, \mathbb{R})^2$

imposé et $\forall x \in I$, $\lambda'(x)\varphi_1(x) + \mu'(x)\varphi_2(x) = 0$

$$\varphi' = \cancel{\lambda'\varphi_1} + \lambda\varphi_1' + \cancel{\mu'\varphi_2} + \mu\varphi_2' = \lambda\varphi_1' + \mu\varphi_2'$$
$$\varphi'' = \lambda'\varphi_1' + \lambda\varphi_1'' + \mu'\varphi_2' + \mu\varphi_2''$$

φ sol. de (E) : $\cancel{(x-1)}[\lambda'\varphi_1' + \cancel{\lambda\varphi_1''} + \mu'\varphi_2' + \cancel{\mu\varphi_2''}] - x[\cancel{\lambda\varphi_1'} + \cancel{\mu\varphi_2'}] + [\cancel{\lambda\varphi_1} + \cancel{\mu\varphi_2}] = (x-1)^{\cancel{2}}\sin x$

$\Leftrightarrow \cancel{(x-1)}[\lambda'\varphi_1' + \mu'\varphi_2'] = (x-1)^{\cancel{2}}\sin x$

donc $\begin{cases} \varphi_1(x)\lambda'(x) + \varphi_2(x)\mu'(x) = 0 \\ \varphi_1'(x)\lambda'(x) + \varphi_2'(x)\mu'(x) = (x-1)\sin x \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\lambda' + e^x\mu' = 0 \\ \lambda' + e^x\mu' = (x-1)\sin x \end{cases}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = x.e^x - 1.e^x = (x-1)e^x \neq 0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x\mu' = -x\lambda' \\ \lambda'(1-x) = (x-1)\sin x \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(x) = -\sin x \\ \mu'(x) = e^{-x}(-x)(-\sin x) = xe^{-x}\sin x \end{cases}$

4 - solutions de l'équation à coefficients constants

$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = b$ $\quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$
$b \in C^0(I, \mathbb{K})$

on cherche des sol. de (H) ss la forme : $\varphi(t) = e^{\lambda t}$

on cherche les valeurs de λ pr lesquelles on a des sol.

φ sol. de (H) $\Leftrightarrow \alpha\lambda^2 e^{\lambda t} + \beta\lambda e^{\lambda t} + \gamma e^{\lambda t} = 0$
$\Leftrightarrow \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$ (équa caract.)

→ 2 racines distinctes λ_1, λ_2 :
$\begin{cases} \varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \\ \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ $\quad W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} = (\lambda_2-\lambda_1)e^{-\beta/\alpha} \neq 0$

→ 1 racine double : λ :
$\begin{cases} \varphi_1(t) = e^{\lambda t} \\ \varphi_2(t) = te^{\lambda t} \end{cases}$ $\quad W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} \end{vmatrix} = e^{2\lambda t} \neq 0$