I - Intégration des fonctions en escalier

a et b désignent deux réels vérifiant $a < b$

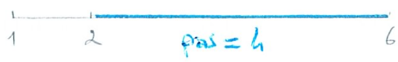
1. Subdivision de l'intervalle [a,b]

Définition On appelle subdivision de l'intervalle $[a,b]$ toute suite finie $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

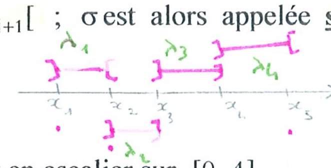
On appelle **pas** de la subdivision : $\sup\{x_{i+1} - x_i \,/\, 0 \le i \le n-1\}$

Exemples $(1, 2, 6)$ est une subdivision de $[1, 6]$ de pas 4



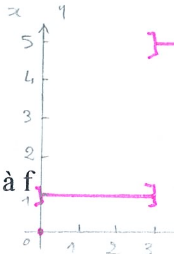
2. Fonction en escalier sur [a , b]

Définition $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$; σ est alors appelée **subdivision adaptée à f**



Exemple La fonction f définie sur $[0,4]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ 5 & \text{si } 3 < x \le 4 \end{cases}$ est en escalier sur $[0,4]$

$\sigma = (0, 3, 4)$ est une subdivision adaptée à f ; mais $(0, 1, 2, 3, 4)$ est aussi une subdivision adaptée à f.



Notation E([a , b]) désigne l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Remarque
- si f et g sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ alors $f + g$, αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f \times g$ sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$
- si $f \in E([a,b])$ alors $|f| \in E([a,b])$

3. Intégration d'une fonction en escalier

Soient $f \in E([a,b])$ et $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$ on pose : $f(x) = \lambda_i$.

On pose : $S_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$

Problème : σ' étant une autre subdivision adaptée à f comparer $S_\sigma(f)$ et $S_{\sigma'}(f)$

Le raisonnement comporte 3 étapes

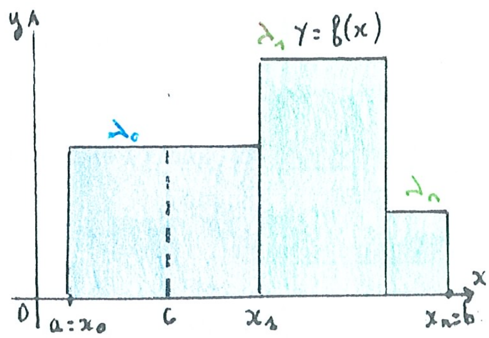
1ère étape : Soit c un point de $[a, b]$ n'appartenant pas à σ et posons $\sigma_1 = \sigma \cup \{c\}$. Supposons, par exemple , $x_0 < c < x_1$

$$S_\sigma(f) = \lambda_0 (x_1 - x_0) + \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$$

$$S_\sigma(f) = \lambda_0 (c - x_0) + \lambda_0 (x_1 - c) + \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) = S_{\sigma_1}(f)$$

On raisonne de façon analogue si $x_1 < c < x_2$, . . .

Donc : si on ajoute un point c à σ alors $S_\sigma(f) = S_{\sigma_1}(f)$ où $\sigma_1 = \sigma \cup \{c\}$



2ème étape : On ajoute un nombre fini n de points à σ. On obtient une nouvelle subdivision σ_2 qui vérifie : $S_\sigma(f) = S_{\sigma_2}(f)$ (il suffit de répéter n fois le raisonnement précédent)

246

$3^{\text{ème}}$ étape : On considère la subdivision $\sigma \cup \sigma'$. On passe de σ (respectivement σ') à $\sigma \cup \sigma'$ en ajoutant un nombre fini de points . Donc :

$$S_\sigma(f) = S_{\sigma\cup\sigma'}(f) \quad \text{et} \quad S_{\sigma'}(f) = S_{\sigma\cup\sigma'}(f). \text{ Il en résulte : } \quad S_\sigma(f) = S_{\sigma'}(f)$$

Théorème | $S_\sigma(f)$ est indépendant de la subdivision σ adaptée à f

Définition | $S_\sigma(f)$ est appelée intégrale de f sur $[a , b]$ et est notée $\int_a^b f(x)\,dx$

Remarque 1 $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$ où λ_i désigne la valeur de la fonction f sur $]x_i\ , x_{i+1}[$

Remarque 2 x est une "variable muette" ; on peut écrire $\int_a^b f(t)\,dt$, . . .

Remarque 3 les valeurs prises par f aux points $x_0 , \ldots , x_n$ n'interviennent pas dans la valeur de l'intégrale

Remarque 4 si on change la valeur de f en un nombre fini de points l'intégrale de f sur $[a , b]$ est inchangée

Remarque 5 si f est à valeurs dans R^+, $\int_a^b f(x)\,dx$ représente une aire

Conventions $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Propriétés

Théorème | L'application $I : \begin{array}{|l} E([a,b]) \to R \\ \quad f \to I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \end{array}$ est une **forme linéaire** ; c'est-à-dire :

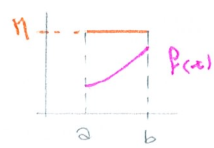
$$\forall (f,g) \in \left(E([a,b])\right)^2, \forall(\alpha,\beta)\in R^2,\ \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Théorème | f et g appartiennent à $E([a,b])$

1. si $a \le b$ et si f est positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ ⚠ pas de réciproque
2. si $a \le b$ et si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \le g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
   donc g-f est positive donc $\int g\text{-}f > 0$

dém * 3. si $a \le b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

4. si $a \le b$ et si $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \le M$ alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M(b-a)$

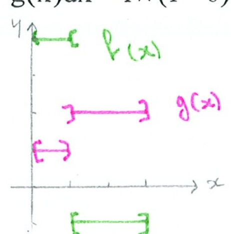


5. si $c \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx$

ATTENTION **les points 1 et 2 N'ADMETTENT PAS de réciproque.**

Contre exemple : $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \le x \le 3 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 3 \end{cases}$; f et g sont en escalier sur $[0, 3]$

- $\int_0^3 f(x)dx = 4\times(1-0) + (-1)\times(3-1) = 2 \ge 0$ alors que f est négative sur $[1, 3]$
- $\int_0^3 g(x)dx = 1\times(1-0) + 2\times(3-1) = 5 \ge \int_0^3 f(x)dx$ alors que sur $[0, 1[$ $g(x) \le f(x)$



247

II - Intégration des fonctions continues par morceaux

a et b désignent deux réels vérifiant $a < b$

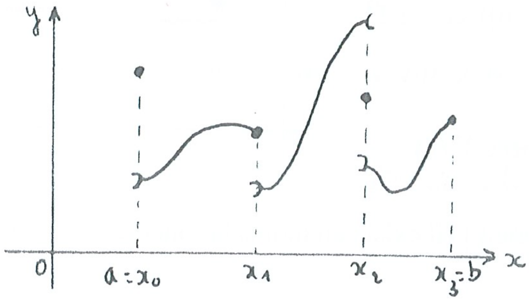
Si, pour tout $x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ on dit que φ minore ψ (ou que ψ majore φ) et on note $\varphi \leq \psi$

1. Définition

Définition | $f : [a, b] \to R$ est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ si :

- f admet un **nombre fini** de points de discontinuité
- en chaque point de discontinuité (distinct de b) f admet une **limite finie à droite**
- en chaque point de discontinuité (distinct de a) f admet une **limite finie à gauche**

Interprétation :

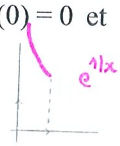


il existe une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ et soit prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$

Remarque | Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ f est bornée. Donc f est bornée sur $[a, b]$

Remarque |

- une fonction en escalier est continue par morceaux
- une fonction continue sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$
- la fonction $f : [0, 1] \to R$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ si $x \in]0, 1]$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ (car $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = +\infty$)



f non bornée ⟹ f non continue par morceaux

Remarque | Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$ il en est de même de $f + g$, αf $(\alpha \in R)$, $f \times g$, $|f|$

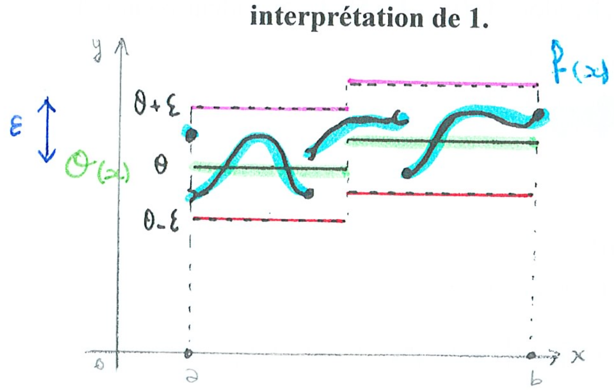
2. Approximation d'une fonction continue par morceaux

Théorème | Soit f une fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$.

Pour tout $\varepsilon > 0$: **1.** il existe θ, fonction en escalier sur $[a, b]$, telle que $|f - \theta| \leq \varepsilon$

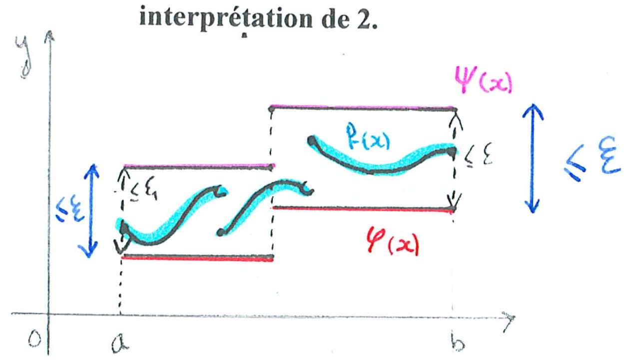
2. il existe φ et ψ, fonctions en escalier sur $[a, b]$, telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$

interprétation de 1.



Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe θ, fonction en escalier sur $[a, b]$, telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $\theta(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq \theta(x) + \varepsilon$

interprétation de 2.

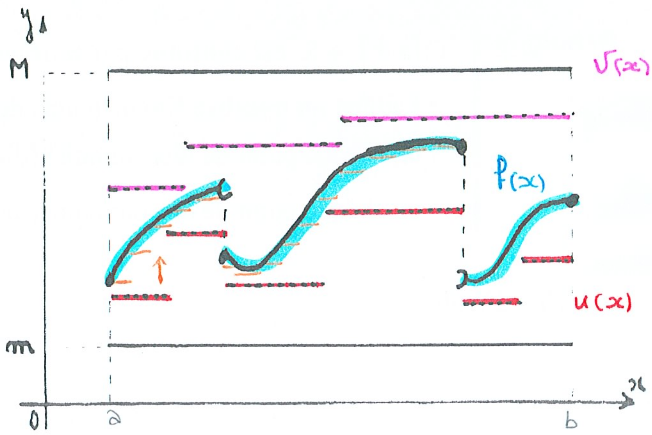


Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe φ et ψ, fonctions en escalier sur $[a, b]$, telles que, pour tout $x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$

3. Intégration des fonctions continues par morceaux

hypothèse : f est **continue par morceaux** sur $[a, b]$

• f est bornée sur $[a, b]$. Il existe donc deux constantes m et M telles que : $\forall x \in [a, b], \ m \leq f(x) \leq M$



• On considère les fonctions en escalier u minorant f (il existe au moins la fonction $x \mapsto m$) et on calcule $I(u) = \int_a^b u(x)dx$

On envisage l'ensemble $U = \{I(u) \ / \ u \in E([a, b]) \text{ et } u \leq f\}$

U est une partie non vide de R majorée par $\int_a^b M dx = M(b-a)$

au moins y=m

la partie U admet une borne supérieure, notée $I^-(f)$

$\sup U = I^-(f)$

• On considère les fonctions en escalier v majorant f (il existe au moins la fonction $x \mapsto M$) et on calcule $I(v) = \int_a^b v(x)dx$

On envisage l'ensemble $V = \{I(v) \ / \ v \in E([a, b]) \text{ et } f \leq v\}$

V est une partie non vide de R minorée par $\int_a^b m \, dx$

la partie V admet une borne inférieure, notée $I^+(f)$ $\inf V = I^+(f)$

• Les fonctions en escalier u et v vérifiant $u \leq f \leq v$. On a donc $I(u) \leq I(v)$. On en déduit $\mathbf{I^-(f) \leq I^+(f)}$

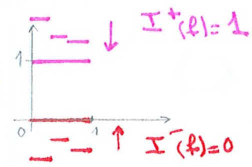
• Supposons $I^-(f) < I^+(f)$ et posons $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(I^+(f) - I^-(f)\right)$ $(\varepsilon > 0)$

D'après le théorème du §2 il existe deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, φ et ψ, telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

On a donc $\int_a^b \varphi(x)dx \leq I^-(f)$, $\int_a^b \psi(x)dx \geq I^+(f)$, $\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \leq \varepsilon$

On en déduit $I^+(f) - I^-(f) \leq \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \leq \varepsilon$ ce qui implique $2\varepsilon \leq \varepsilon$, soit $\varepsilon < 0$.

rem : $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$



On aboutit à une impossibilité. On a donc $\mathbf{I^-(f) = I^+(f)}$ $= \int_{[a,b]} f$

Théorème et définition

Si f est une fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$ alors $\mathbf{I^-(f) = I^+(f)}$. Cette valeur commune est appelée **intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$** et est notée $\int_{[a, b]} f$

4. Première propriété

Théorème

Soit f une fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$.
Soit $(u_n)_{n \in N}$ une suite de réels **strictement positifs** tendant vers 0.

• Pour tout $n \in N$ il existe φ_n, fonction en escalier sur $[a, b]$, telle que $|f - \varphi_n| \leq u_n$

• $\int_{[a, b]} f = \lim_{n \mapsto +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx$

249

Démonstration

- l'existence des fonctions en escalier φ_n résulte du théorème du §2.
- $\varphi_n - u_n \le f \le \varphi_n + u_n$.

D'après la définition de l'intégrale : $\int_a^b (\varphi_n(x) - u_n)dx \le \int_{[a,b]} f \le \int_a^b (\varphi_n(x) + u_n)dx$

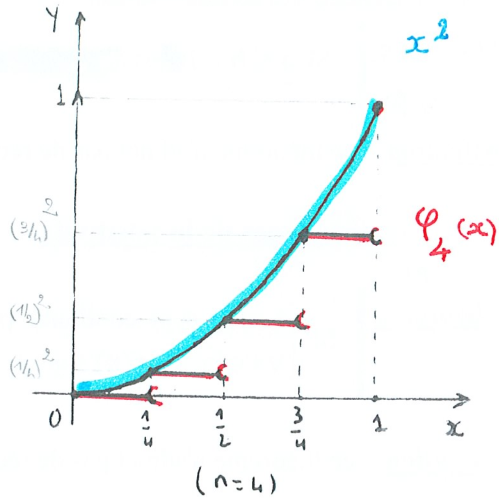
Soit : $\int_a^b \varphi_n(x)dx - u_n(b-a) \le \int_{[a,b]} f \le \int_a^b \varphi_n(x)dx + u_n(b-a)$

D'où $\left| \int_{[a,b]} f - \int_a^b \varphi_n(x)dx \right| \le u_n(b-a)$

On en déduit : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \int_{[a,b]} f - \int_a^b \varphi_n(x)dx = 0$, c'est-à-dire $\int_{[a,b]} f = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx$

5. Un exemple

Soit $f : \begin{array}{|l} [0,1] \to R \\ x \mapsto x^2 \end{array}$



- f est continue sur $[0,1]$
- Pour $n \ge 1$ on pose : $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, . . . , $x_i = \frac{i}{n}$, . . . , $x_n = 1$
- On définit la fonction en escalier φ_n par :

  - $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}, \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, \varphi_n(x) = f(x_i) = \frac{i^2}{n^2}$
  - $\varphi_n(1) = 1$

- Pour $x \in [x_i, x_{i+1}[$

$$0 \le f(x) - \varphi_n(x) = x^2 - \frac{i^2}{n^2} \le \overbrace{\frac{(i+1)^2}{n^2}}^{f(x_{i+1})} - \overbrace{\frac{i^2}{n^2}}^{f(x_i)} \le \frac{2i+1}{n^2} \le \frac{2n-1}{n^2} \quad \text{et} \quad f(1) - \varphi_n(1) = 0$$

Donc $|f - \varphi_n| \le \frac{2n-1}{n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0$

D'après le théorème précédent on en déduit : $\int_{[0,1]} f = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)dx$.

- $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \sum\limits_{i=0}^{i=n-1} \frac{i^2}{n^2} \overbrace{\frac{1}{n}}^{x_{i+1}-x_i} = \frac{1}{n^3} \sum\limits_{i=0}^{i=n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)dx = \frac{1}{3}$. Donc : $\boxed{\int_{[0,1]} f = \frac{1}{3}}$
- $\frac{1}{3}$ peut donc être interprété comme l'aire de la partie du plan comprise entre l'arc de parabole, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

6. Extension de la définition

Définition f est continue par morceaux sur l'intervalle I. a et b sont deux éléments quelconques de I. On pose :

- si $a < b$ $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f$
- si $a > b$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f$
- si $a = b$ $\int_a^a f(x)dx = 0$

250

III - Propriétés de l'intégrale

1. Linéarité

Théorème si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$ (ou $[b,a]$), si $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$:

$$\int_a^b (\alpha g+\beta g)(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

2. Relation de Chasles

Théorème soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I; soient a , b et c trois points de I

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

3. "Positivité" de l'intégrale

Théorème Si $a\le b$, si f est continue par morceaux et positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

Attention ce théorème n'admet pas de réciproque et il faut $a\le b$ ⚠

4. Conséquences de la positivité

a)

Théorème Si $\begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont continues par morceaux sur } [a,b] \\ \forall x\in[a,b],\ f(x)\le g(x)\end{cases}$ et si $a\le b$ alors : $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

Attention ce théorème n'admet pas de réciproque ⚠

b)

Théorème Si $a\le b$ et si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

5. Inégalité de la moyenne

Théorème Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$ avec $a\le b$ alors :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sup_{x\in[a,b]}|f(x)| \times \int_a^b |g(x)|dx$$

Démonstration $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \le \int_a^b \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\times|g(x)|\,dx$

soit : $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sup_{x\in[a,b]}|f(x)| \times \int_a^b |g(x)|\,dx$

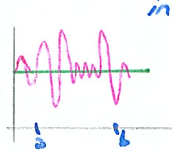
Pour $g(x)=1$ on obtient :

Cas particulier Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ avec $a\le b$ alors : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le (b-a)\times \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$

Définition le réel $\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}_{\mu}$ est appelé **valeur moyenne de f** sur $[a,b]$

valeur de la fct cste ayant sur [a,b] même intégrale que f.

$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) = \mu\int_a^b dx = \int_a^b \mu\,dx$

μ 

251

III 4) dém

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

si $a \leq b$, alors, $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$

$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

ex: f est définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-x^2\sin^2 t}\,dt$

Montrer que f est définie sur $[-1,1]$, étudier sa parité, sa continuité, ses variations

- soit $x \in [-1,1]$ fixé
  si $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq x^2\sin^2 t \leq 1$ donc $1 - x^2\sin^2 t \geq 0$
  $t \mapsto \sqrt{1-x^2\sin^2 t}$ est définie, continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$
  donc intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, donc f est définie sur $[-1,1]$
- $f(x) = f(-x)$ f est paire.
  rem: $f(0) = \frac{\pi}{2}$ $f(-1) = f(1) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = 1$
- soit $a \in [-1,1]$, soit $a+h \in [-1,1]$

  $|f(a+h)-f(a)| = \left|\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{1-(a+h)^2\sin^2 t} - \sqrt{1-a^2\sin^2 t}\right)dt\right| \leq \int_0^{\pi/2}\left|\sqrt{1-(a+h)^2\sin^2 t} - \sqrt{1-a^2\sin^2 t}\right|dt$

  or, pour $x \geq 0, y \geq 0$, $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$

  donc $|f(a+h)-f(a)| \leq \int_0^{\pi/2}\sqrt{|1-(a+h)^2\sin^2 t + a^2\sin^2 t|}\,dt = \int_0^{\pi/2}\sqrt{|2ah\sin^2 t + h^2\sin^2 t|}\,dt$

  $|f(a+h)-f(a)| \leq \sqrt{|2ah+h^2|}\int_0^{\pi/2}|\sin t|\,dt$

  d'où $|f(a+h)-f(a)| \leq \sqrt{|2ah+h^2|}$ donc $\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a) = 0$

  d'où $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ f est continue sur $[-1,1]$

- sens de variation sur $[0,1]$:
  soient x,y / $0 \leq x \leq y \leq 1$
  pour $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $x^2\sin^2 t \leq y^2\sin^2 t$ donc $\sqrt{1-x^2\sin^2 t} \geq \sqrt{1-y^2\sin^2 t}$

  donc $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-x^2\sin^2 t}\,dt \geq \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-y^2\sin^2 t}\,dt \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$
  sur $[0,1]$, f décroît

5) ex: Calculer μ, valeur moyenne de E, sur $[0,3]$

$\mu = \frac{1}{3}\int_0^3 E(x)\,dx = \frac{1}{3}[0\times1 + 1\times1 + 2\times1] = 1$

IV Intégrale d'une fonction continue

1) valeur moyenne d'une fonction continue

hyp: f est continue sur $[a,b]$

$f([a,b]) = [m,M]$ pour tout $t \in [a,b]$, $m \leq f(t) \leq M$

pour $a \leq b$, $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

$\Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M$ donc $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \in [m,M] = f([a,b])$

donc $\exists\, c \in [a,b]$ / $\frac{1}{b-a} f(x)dx = f(c)$

Th

si $\begin{cases} a < b \\ f \text{ est continue sur } [a,b] \end{cases}$ (th de la moyenne)

alors, $\exists\, c \in [a,b]$ / $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$

rem: ce th est valable si $a > b$, on écrit alors $[b,a]$
il est donc valable en tout $a \neq b$

2) existence de primitives pour une fonction continue

hyp : f continue sur I

soit $a \in I$ fixé, on définit $F : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$

soient $x \in I$, $x+h \in I$,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{(x+h)-x}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

donc $\exists\, c \in [x, x+h] \ / \ \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c)$

or si $h \to 0$, $c \to x$ et $f(c) \to f(x)$ car f est continue en x

ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) = F'(x)$. F est dérivable en tout $x \in I$, et : $F' = f$

Th hyp : f continue sur I

soit $a \in I$, soit $F : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$

F est dérivable sur I, et $F' = f$ donc $F \in C^1(I)$

F est la primitive sur I de f, s'annulant en a

conséquence : si f est continue sur I, alors, f admet des primitives sur I

rem : soit f continue sur I, soit $(\alpha, \beta) \in I^2$,

soit $a \in I$,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_a^\beta f(x)\,dx - \int_a^\alpha f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

si G est 1 autre primitive de f sur I, $G = F + K$, $G(\beta) - G(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha)$

3) fonction continue positive

hyp : $a<b$, f continue positive sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

Pb : Que dire de f ?

Soit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ on a $F(b) - F(a) = 0$ et $F(a) = 0$ donc $F(b) = F(a) = 0$

$F' = f$ et f est positive : F croît.

$\forall x \in [a,b]$, $F(x) = 0$ donc $F'(x) = 0 = f(x)$ (valable pour f négative et $a > b$)

Th si $\begin{cases} f \text{ est continue, de signe constant sur } [a,b] \\ \int_a^b f(x)\,dx = 0 \end{cases}$

alors, f est nulle sur $[a,b]$

⚠ la continuité de f sur $[a,b]$ est indispensable. $\int_0^1 E(x)\,dx = 0$, or $E(1) \neq 0$

conséquence : si $\begin{cases} f \text{ est continue, de signe constant sur } [a,b] \\ f \text{ s'annule uniquement en des points isolés} \end{cases}$

alors, $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$

ex : Justifier que $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\,dx \neq 0$

$x \mapsto (\cos x)^n$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc intégrable
positive et s'annule uniquement en 0 donc $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\,dx > 0$

4) exemples usuels

a) f continue sur $[0,1]$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\,dt$

$\exists\,(m,M) \ / \ f([0,1]) = [m,M]$ $\quad \forall t \in [0,1]$, $m \leq f(t) \leq M$ donc $m t^n \leq t^n f(t) \leq M t^n$

donc $m \frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 t^n f(t)\,dt \leq M \frac{1}{n+1}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$

b f continue sur $[0,1]$. $\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^{1/n} t f(t)\,dt$

f est continue sur $[0,\frac{1}{n}]$ donc $f([0,\frac{1}{n}])=[m,M]$, intervalle qui dépend de n.

$\forall t\in[0,\frac{1}{n}]$, $m\leq f(t)\leq M$ donc $mt\leq tf(t)\leq Mt$ donc $m\int_0^{1/n} t\,dt\leq\int_0^{1/n} tf(t)\,dt\leq M\int_0^{1/n} t\,dt$

$\Leftrightarrow m\frac{(1/n)^2}{2}\leq\int_0^{1/n} tf(t)\,dt\leq M\frac{(1/n)^2}{2}$ d'où $\frac{m}{2}\leq n^2\int_0^{1/n} tf(t)\,dt\leq\frac{M}{2}$

on ne peut pas conclure car m, M dépendent de n

on a $m\leq 2n^2\int_0^{1/n} tf(t)\,dt\leq M$ donc $2n^2\int_0^{1/n} tf(t)\,dt\in f([0,\frac{1}{n}])$

$\exists c\in[0,\frac{1}{n}]\ /\ 2n^2\int_0^{1/n} tf(t)\,dt=f(c)$ donc $n^2\int_0^{1/n} tf(t)\,dt=\frac{f(c)}{2}$

si $n\to+\infty$, $c\to 0^+$ et f est continue à droite en 0, donc $\lim_{c\to 0^+} f(c)=f(0)$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^{1/n} tf(t)\,dt=\frac{f(0)}{2}$

c f continue sur $[0,1]$. $\lim_{n\to+\infty} n^3\int_0^{1/n} t^2 f(t)\,dt$

idem jusqu'à : $mt^2\leq t^2f(t)\leq Mt^2$ $\to$ $m\frac{(1/n)^3}{3}\leq\int_0^{1/n} t^2f(t)\,dt\leq M\frac{(1/n)^3}{3}$

$\to\frac{m}{3}\leq n^3\int_0^{1/n} t^2f(t)\,dt\leq\frac{M}{3}$ $\to$ $m\leq 3n^3\int_0^{1/n} t^2 f(t)\,dt\leq M$

donc $3n^3\int_0^{1/n} t^2f(t)\,dt\in[m,M]=f([0,\frac{1}{n}])$

donc $\exists c\in[0,\frac{1}{n}]\ /\ 3n^3\int_0^{1/n} t^2f(t)\,dt=f(c)$ ~~donc~~ $n^3\int_0^{1/n} t^2f(t)\,dt=\frac{f(c)}{3}$

si $n\to+\infty$, $c\to 0^+$ et f est continue en 0^+ donc $\lim_{c\to 0^+} f(c)=f(0)$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n^3\int_0^{1/n} t^2f(t)\,dt=\frac{f(0)}{3}$

d Déterminer les domaines de définition, continuité, dérivabilité de $\varphi: x\longmapsto\int_x^{2x}\cos(t^2)\,dt$. Définir φ'

- $f: t\longmapsto\cos(t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur tout intervalle fermé inclus dans $\mathbb{R}$.
  φ est donc définie sur $\mathbb{R}$
- Soit F 1 primitive de f sur $\mathbb{R}$.
  Pour $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=F(2x)-F(x)$, φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
  donc continue sur $\mathbb{R}$.
- φ' est définie sur $\mathbb{R}$, et :
  $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=2F'(2x)-F'(x)=2f(2x)-f(x)=2\cos(4x^2)-\cos x^2$

e $\varphi: x\longmapsto\int_x^{5x}\frac{\cos t}{t}\,dt$.
- Préciser le domaine de définition de φ
- Démontrer que φ est prolongeable par continuité en 0
- Étudier la continuité, la dérivabilité du prolongement.

- $f: t\longmapsto\frac{\cos t}{t}$ est définie, continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ donc intégrable sur tout intervalle fermé inclus dans $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.
  φ est donc définie pour tout $x\neq 0$.
- on encadre $\varphi(x)=\int_x^{5x}\frac{\cos t}{t}\,dt$

1er cas : x dans 1 voisinage de 0^+ : pour $t\in[x,5x]$, $\cos 5x\leq\cos t\leq\cos x$

$\Rightarrow\frac{\cos 5x}{t}\leq\frac{\cos t}{t}\leq\frac{\cos x}{t}$ $\Rightarrow$ $\cos 5x\int_x^{5x}\frac{1}{t}\,dt\leq\int_x^{5x}\frac{\cos t}{t}\,dt\leq\cos x\int_x^{5x}\frac{dt}{t}$

$\Leftrightarrow\cos 5x\ln 5\leq\varphi(x)\leq\cos x\ln 5$

d'où $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\ln 5$

2ème cas : x dans 1 voisinage de 0^- : pour $t \in [5x, x]$, $\cos 5x \leq \cos t \leq \cos x$

$\Rightarrow \frac{\cos 5x}{t} \geq \frac{\cos t}{t} \geq \frac{\cos x}{t}$ $\Rightarrow \cos x \int_{5x}^{x} \frac{dt}{t} \leq -\varphi(x) \leq \cos 5x \int_{5x}^{x} \frac{dt}{t}$

$\Leftrightarrow \cos 5x \int_x^{5x} \frac{dt}{t} \leq \varphi(x) \leq \cos x \int_x^{5x} \frac{dt}{t}$ $\Rightarrow \cos 5x \ln 5 \leq \varphi(x) \leq \cos x \ln 5$

d'où $\lim_{x \to 0^-} \varphi(x) = \ln 5$

Ainsi, φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \ln 5$

Ainsi, φ est définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \ln 5 & \text{si } x = 0 \\ \int_x^{5x} \frac{\cos t}{t} dt & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$

- $f : t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, +\infty[$.

soit F 1 primitive de f sur $]0, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, 0[$)
pour $x > 0$ (respectivement $x < 0$), $\varphi(x) = F(5x) - F(x)$
φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (resp. $\mathbb{R}^{-*}$), et :
$\varphi'(x) = 5F'(5x) - F'(x) = 5f(5x) - f(x) = 5 \frac{\cos 5x}{5x} - \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 5x - \cos x}{x}$
φ' est donc continue pour $x \neq 0$
φ est continue sur $\mathbb{R}$, au moins dérivable pour $x \neq 0$
$\lim_{x \to 0} \varphi'(x) = \lim_0 \frac{\cos 5x - \cos x}{x} = \lim_0 \frac{-2 \sin 3x \sin 2x}{x} = \lim_0 -\frac{2}{x} 3x \, 2x = \lim_0 (-12x) = 0$
φ est donc dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$

Ainsi, φ est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et :
$\varphi'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{2 \sin 3x \sin 2x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

rem : $\varphi(-x) = \int_{-x}^{-5x} \frac{\cos t}{t} dt$ $(x \neq 0)$ je pose $y = -t \Rightarrow dy = -dt$

$\varphi(-x) = \int_x^{5x} \frac{\cos y}{-y} (-dy) = \varphi(x)$ φ est paire

F Etudier, représenter $\varphi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t(1+t^2)}}$

- soit $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1+t^2)}}$ f est définie, continue sur $]0, +\infty[$, intégrable sur tout intervalle fermé inclus dans $]0, +\infty[$

φ est donc définie pour $x > 0$

- Soit F 1 primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ $\varphi(x) = F(2x) - F(x)$
φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- φ' est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et : $\varphi'(x) = F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$
$= 2 \frac{1}{\sqrt{2x(1+4x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}$

$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2x(1+4x^2)}} > \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}} \Leftrightarrow \frac{4}{2x(1+4x^2)} > \frac{1}{x(1+x^2)}$
$\Leftrightarrow 2(1+x^2) > 1 + 4x^2 \Leftrightarrow 1 > 2x^2 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

x	0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
φ	‖ 0	$\nearrow$		$\searrow$	0

rem : φ est 1 fonction positive : minorée par 0
donc en $+\infty$, φ a 1 limite finie $\ell_1 \geq 0$
de même en 0^+, φ a 1 limite finie $\ell_2 \geq 0$

Limite de φ en $+\infty$: pour $t \in [x, 2x]$, $\frac{1}{\sqrt{2x(1+4x^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{t(1+t^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}$

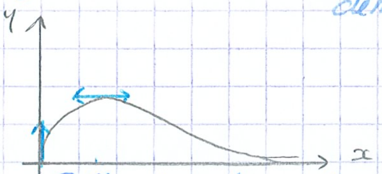
$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2x(1+4x^2)}} \leq \varphi(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x(1+x^2)}}$ d'où $\lim_{+\infty} \varphi(x) = 0$

Limite de φ en 0^+ : $\sqrt{\frac{x}{2(1+4x^2)}} \leq \varphi(x) \leq \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$ d'où $\lim_{0^+} \varphi(x) = 0$

conséquence : on prolonge φ par continuité en 0^+ en posant $\varphi(0) = 0$

étude de la dérivabilité en 0^+ : $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{\varphi(x)}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{2x(1+4x^2)}}$

$\lim_{0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ en 0^+, f n'est pas dérivable, mais la courbe a 1 demi-tangente // Oy



9 Déterminer les domaines de définition, continuité, dérivabilité de $\varphi : x \longmapsto \int_x^{4x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$

• $f : t \longmapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est définie, continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ donc intégrable sur tout intervalle fermé inclus dans $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.

φ est donc définie pour $x \neq 0$.

• Soit F 1 primitive de f sur $]0,+\infty[$ ($]-\infty,0[$)

$\varphi(x) = F(4x) - F(x)$

φ est dérivable donc continue sur $]0,+\infty[$ ($]-\infty,0[$)

φ est définie, continue, dérivable pour $x \neq 0$ et

$\varphi'(x) = 4F'(4x) - F'(x) = 4f(4x) - f(x) = \frac{\sin(4x)}{4x^2} - \frac{\sin x}{x^2} = \sin x \, \frac{\cos x \cos 2x - 1}{x^2}$

étude en 0 : indication : écrire $\frac{\sin t}{t^2} = \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{t}$ et encadrer

pour $x \neq 0$, $\varphi(x) = \int_x^{4x} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{t}\,dt$

1er cas : $x > 0$ $\quad g : t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[x, 4x]$

donc $g([x,4x]) = [m, M]$

(m, M dépendent a priori de x)

pour $t \in [x,4x]$, $m \leq g(t) \leq M \Rightarrow \frac{m}{t} \leq \frac{g(t)}{t} \leq \frac{M}{t}$

$\Rightarrow m \int_x^{4x} \frac{1}{t}\,dt \leq \varphi(x) \leq M \int_x^{4x} \frac{1}{t}\,dt \Rightarrow m \ln 4 \leq \varphi(x) \leq M \ln 4$

donc $m \leq \frac{\varphi(x)}{\ln 4} \leq M$ donc $\frac{\varphi(x)}{\ln 4} \in g([x,4x])$

donc $\exists\, c \in [x,4x] \,/\, \frac{\varphi(x)}{\ln 4} = g(c) \Rightarrow \varphi(x) = \ln 4\, g(c)$

si $x \to 0^+$, $c \to 0^+$ donc $g(c) \to 1$ donc $\lim_{0^+} \varphi(x) = \ln 4$

2ème cas : $x < 0$ $\quad g([4x, x]) = [m, M]$

pour $t \in [4x, x]$, $\frac{m}{t} \geq \frac{g(t)}{t} \geq \frac{M}{t}$

$\Rightarrow M \int_{4x}^{x} \frac{dt}{t} \leq \frac{-g(x)}{t} \leq m \int_{4x}^{x} \frac{dt}{t} \Rightarrow -M \ln 4 \leq \frac{-g(x)}{t} \leq -m \ln 4$

$\Rightarrow m \ln 4 \leq \varphi(x) \leq M \ln 4$ donc $\frac{\varphi(x)}{\ln 4} \in [m, M] = g([4x, x])$

$\exists\, c \in [4x, x] \,/\, \frac{\varphi(x)}{\ln 4} = g(c)$

si $x \to 0^-$, $c \to 0^-$ donc $g(c) \to 1$ donc $\lim_{0^-} \varphi(x) = \ln 4$

Ainsi, $\lim_0 \varphi(x) = \ln 4$ on prolonge φ par continuité en posant $\varphi(0) = \ln 4$

φ est définie, continue sur $\mathbb{R}$, au moins dérivable pour $x \neq 0$.

$\lim_0 \varphi'(x) = \lim_0 \frac{\sin x}{x} \frac{\overbrace{(\cos x \cos 2x}^{h(x)} - 1)}{x}$ $h(0)$

or, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\Rightarrow \cos x \cos 2x - 1 = (\cos x - 1) - 2\cos x \sin^2 x$

$= -2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\cos x \sin^2 x$

mieux : taux d'accroissement de h

$= \lim_0 \frac{\sin x}{x} \left[-\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} - 2\cos x \frac{\sin x}{x} \sin x \right] = 0$

Ainsi, $\begin{cases} \varphi \text{ est dérivable en } 0 \\ \varphi'(0) = 0 = \lim_0 \varphi'(x) \end{cases}$ donc φ' est continue en 0

rem : φ' est continue sur $\mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

5) inégalité de Cauchy-Schwarz

hyp : $a \leq b$, f et g continues par morceaux sur $[a,b]$,
soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 dx \geq 0$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underbrace{\lambda^2 \underbrace{\int_a^b f^2(x)\,dx}_{cste} + 2\lambda \underbrace{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}_{cste} + \underbrace{\int_a^b g^2(x)\,dx}_{cste}}_{\text{trinôme en } \lambda \text{, ayant 1 signe cst}} \geq 0$

$\Delta = 4\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx$ $\quad \hookrightarrow \Delta \leq 0$

donc $\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx$

Th [inégalité de Cauchy-Schwarz :
si $\begin{cases} a \leq b \\ f, g \text{ continues par morceaux sur } [a,b] \end{cases}$ alors, $\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$]

applications : 1. $0 < a \leq b$ établir $\ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$

$\ln \frac{b}{a} = \int_a^b \frac{dx}{x}$ $\quad \left[\int_a^b \frac{dx}{x}\right]^2 \leq \left(\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx\right)\left(\int_a^b dx\right) = \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)(b-a)$

$= \frac{(b-a)^2}{ba}$

d'où $\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ba}}$ $\quad$ d'où $\ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$

2. $a \leq b$, f et g continues par morceaux sur $[a,b]$.
Majorer $\sqrt{\int_a^b [f(x) + g(x)]^2\,dx}$

$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx + 2\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

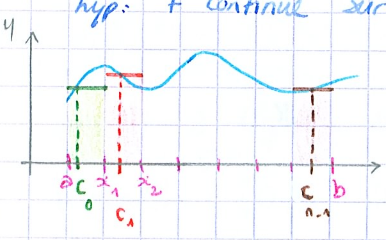
or, $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx}$

donc $\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx \leq \left(\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}\right)^2$

Ainsi, $\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$

6) sommes de Riemann

hyp : f continue sur $[a,b]$.



On considère la subdivision de $[a,b]$:
$x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$, ..., $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, ...
......, $x_n = b$.
On choisit dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ 1 élément noté c_i.

On pose $S_n = (x_1 - x_0) f(c_0) + (x_2 - x_1) f(c_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) f(c_{n-1})$

somme de Riemann relative à f et à $[a,b]$

$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)$

Th [si f est continue sur $[a,b]$, alors, $\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$]

applications : 1er choix : $c_i = x_i = a + i\frac{b-a}{n}$
si f est continue sur $[a,b]$, $\lim_{+\infty} \frac{b-a}{n}\left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right] = \int_a^b f(x)\,dx$

2ème choix : $c_i = x_{i+1} = a + (i+1)\frac{b-a}{n}$
$\lim \frac{b-a}{n}\left[f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + \dots + f(b)\right] = \int_a^b f(x)\,dx$

ex : 1. $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ étudier $\lim_{+\infty} u_n$

$u_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$ $\quad$ soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$; $u_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$

u_n est 1 somme de Rieman relative à f et $[0,1]$, f est continue sur $[0,1]$: $\lim_{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$

rem : $g : x \longrightarrow \frac{1}{x}$ $\quad u_n = \frac{1}{n}\left[g\left(1+\frac{1}{n}\right) + g\left(1+\frac{2}{n}\right) + \dots + g(2)\right]$

$\begin{cases} u_n \text{ est 1 somme de Riemann relative à } g \text{ et } [1,2] \\ g \text{ est continue sur } [1,2] \end{cases}$

donc $\lim\limits_{+\infty} u_n = \int_1^2 g(x)\,dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \underline{\underline{\ln 2}}$

2. $v_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

soit $f : x \longmapsto \cos(\pi x)$

$v_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$

$\begin{cases} v_n \text{ est 1 somme de Riemann relative à } f \text{ et à } [0,1] \\ f \text{ est continue sur } [0,1] \end{cases}$

donc $\lim\limits_{+\infty} v_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^1 = \underline{0}$

3. $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$

soit $f : x \longmapsto \frac{1+x}{1+x^2}$: $\quad w_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

f est continue sur $[0,1]$:

$\lim\limits_{+\infty} w_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right)dx = [\arctan x]_0^1 + \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}}$

4. $d_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$

$\ln d_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$ $\quad$ soit $f : x \longmapsto \ln(1+x^2)$: $\quad \ln d_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

f est continue sur $[0,1]$: $\quad \lim\limits_{+\infty} \ln d_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = I_n$

je pose $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(1+x^2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$

$I_n = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \ln 2 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

d'où $\lim\limits_{+\infty} d_n = e^{\ln 2 - 2 + \pi/2} = \underline{\underline{2e^{\pi/2 - 2}}}$

5. $t_n = \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \dots + \sqrt[n]{2^{4n}}}{n}$

$t_n = \frac{1}{n}\left[2^{1/n} + 2^{2/n} + \dots + 2^{4n/n}\right]$ $\quad$ soit $f : x \longmapsto 2^x$

$t_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{4n}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{4n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

f est continue sur $[0,4]$: $\quad \lim\limits_{+\infty} t_n = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 2^x\,dx = \int_0^4 e^{x\ln 2}\,dx$

$= \left[\frac{e^{x\ln 2}}{\ln 2}\right]_0^4 = \frac{e^{4\ln 2} - 1}{\ln 2} = \frac{2^4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \underline{\underline{\frac{15}{\ln 2}}}$

V Intégration des fonctions de ℝ dans ℂ

Rappel : I intervalle $\subset \mathbb{R}$, $\quad f : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(t) = f_1(t) + i f_2(t) \end{cases}$ $\quad (f_1(t), f_2(t)) \in \mathbb{R}^2$

on suppose F_1 1 primitive de f_1 sur I

F_2 — — — — f_2 sur I

alors $F_1 + iF_2$ est 1 primitive de f sur I :

$\underline{\underline{\int f(t)\,dt = F_1(t) + iF_2(t) + K}}$ $\quad (K \in \mathbb{C})$

$$\int_a f(t)\,dt = \left[F_1(t) + i\,F_2(t)\right]_a$$

rem : $\mathrm{Re}\left[\int f(t)\,dt\right] = \int \mathrm{Re}[f(t)\,dt]$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\left[\int f(t)\,dt\right] = \int \mathrm{Im}[f(t)\,dt]$

rem : $\displaystyle\int e^{(a+ib)t}\,dt = \frac{e^{(a+ib)t}}{a+ib} + K$

ex 1. Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{x-i}$ $(x \in \mathbb{R})$, puis $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-i}$

$\dfrac{1}{x-i} = \dfrac{x+i}{x^2+1}$ $\qquad$ $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{\ln(x^2+1)}{2} + K'$ $(K' \in \mathbb{R})$ $\qquad$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x + K''$ $(K'' \in \mathbb{C})$

donc $\displaystyle\int \frac{dx}{x-i} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + i\arctan x + K$ $\quad (K \in \mathbb{C})$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-i} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\,\frac{\pi}{4}$

2. Calculer $F(x) = \displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

$F(x) = \displaystyle\int \mathrm{Im}\left[e^{2x}e^{i3x}\right]dx = \mathrm{Im}\int e^{(2+3i)x}\,dx = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{(2+3i)x}}{2+3i} + K\right]$ $\quad (K \in \mathbb{C})$

$= \mathrm{Im}\left[\dfrac{(2-3i)e^{(2+3i)x}}{4+9} + K\right] = \mathrm{Im}\left[\dfrac{2-3i}{13}\,e^{2x}(\cos 3x + i\sin 3x) + K\right]$

$= \dfrac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + K_1$ $\quad (K_1 \in \mathbb{R})$