Équations différentielles non linéaires

I Système différentiel autonome

1. $E = \mathbb{R}^n$, U ouvert de E, base cano, $F : U \to E$ de classe C^k

syst. diff. autonome : $X' = F(X)$
(pas de t)

cas $n = 1$: $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad x' = f(x) \quad \frac{dx}{dt} = f(x)$ ou $x'(t) = f(x(t))$
U ouvert de $\mathbb{R}$

cas $n = 2$: $f, g : U \to \mathbb{R}$ $\quad \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$
U ouvert de $\mathbb{R}^2$

solution :
↳ couple : intervalle, fct° : (I, φ) avec $\begin{cases} I \text{ intervalle } \mathring{I} \neq \emptyset \\ \varphi : I \to E \text{ de classe } C^1 \end{cases}$

(I, φ) solut° de $X' = F(X)$ $\Leftrightarrow$ $\forall t \in I$, $\begin{cases} \varphi(t) \in U \\ \varphi'(t) = F(\varphi(t)) \end{cases}$

cas $n = 1$: $x' = f(x)$ $\quad (I, \varphi)$ sol $\Leftrightarrow \forall t \in I$, $\begin{cases} \varphi(t) \in U \\ \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \end{cases}$

cas $n = 2$: $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ $\quad (I, \varphi)$ sol $\quad \varphi : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \end{array}$

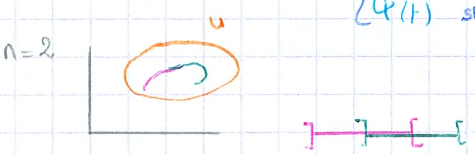
$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in I, \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \in U \\ \varphi_1'(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ \varphi_2'(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{cases}$

rem : * F affine $\Rightarrow$ équat° linéaire
* ttes les fct° solut° ne sont pas définies sur le m̂ intervalle
* $\begin{cases} F \text{ de classe } C^k \\ (I, \varphi) \text{ solut°} \end{cases} \Rightarrow \varphi$ de classe C^{k+1}
* $\begin{cases} (I, \varphi) \text{ solut°} \\ J \text{ intervalle } \begin{cases} J \subset I \\ \mathring{J} \neq \emptyset \end{cases} \end{cases} \Rightarrow (J, \varphi_{/J})$ solut°

(I, φ) solut° maximale $\Leftrightarrow$ (I, φ) restrict° d'aucune solut°
$\Leftrightarrow$ (I, φ) non prolongeable

recollement
si (I, φ), (J, ψ) sont 2 solut° / $\begin{cases} I \cap J \neq \emptyset \\ \forall t \in I \cap J, \ \varphi(t) = \psi(t) \end{cases}$

alors $\begin{cases} I \cup J \text{ est un intervalle} \\ \theta : \begin{array}{l} I \cup J \to E \\ t \mapsto \begin{cases} \varphi(t) \text{ si } t \in I \\ \psi(t) \text{ si } t \in J \end{cases} \end{array} \end{cases}$ $\quad (I \cup J, \theta)$ est une solut°



2. Théorème de Cauchy-Lipschitz local

Th si $\begin{cases} F \text{ de classe } C^k, \ k \geq 1 \\ F : U \to \mathbb{R}^n, \ U \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \\ t_0 \in \mathbb{R}, \ X_0 \in U \end{cases}$ alors $\exists \begin{cases} \alpha > 0 \\ \varphi :]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\to \mathbb{R}^n \end{cases}$ /

$\begin{cases} (]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \varphi) \text{ solut° de } X' = F(X) \\ \varphi(t_0) = X_0 \\ (I, \psi) \text{ solut° de } X' = F(X) \ / \ \psi(t_0) = X_0 \end{cases}$

sol. maximale

unicité $\Rightarrow \forall t \in I \cap]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, $\varphi(t) = \psi(t)$

rem : * c'est une sol. au pb. de Cauchy
* Th d'existence et d'unicité locale

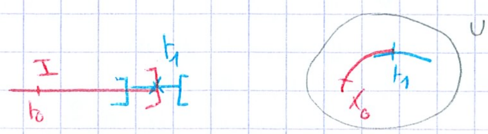
3. Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Th si $\begin{cases} F \in C^k(U, \mathbb{R}^n), \ U \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n, \ k \geq 1 \\ t_0 \in \mathbb{R}, \ X_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $\exists$ une solut° maximale $(I, \varphi) / \begin{cases} t_0 \in I \\ \varphi(t_0) = X_0 \end{cases}$

de plus, (1) I est un intervalle ouvert
(2) si a est une borne finie de I alors φ n'a pas de lim en a dans U
(3) $\forall$ te sol. (J,ψ) / $\begin{cases} t_0 \in J \\ \psi(t_0) = x_0 \end{cases}$ est une restrict° de (I,φ)

rem : Th d'existence et d'unicité

(1)



Cauchy-Lipschitz local en t_1

(2) a borne sup de I, $a \notin I$

$\varphi : \begin{vmatrix} I \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in I \\ \lim \varphi & \text{si } t = a \end{cases} \end{vmatrix}$

alors le prol. de la dérivée $(I \cup \{a\}, \varphi)$ est sol° .

(3)

← impossible par th Cauchy Lips. local

$A = \{t \in \mathbb{R} \;/\; t \geq t_0,\ t \in I,\ t \in J,\ \forall u \in [t_0, t[,\ \varphi(u) = \psi(u)\}$
$\beta = \sup A$
on cherche t où coïncident les 2 sol. dès qu'elles divergent
on utilise Cauchy Lips. en β, sauf si $\beta = \sup J$

ex : $x' = x^2 - 1$
$E = \mathbb{R}$ $\quad f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 - 1 \end{vmatrix}$ de classe C^∞
$n = 1$

* solut° singulières : $\varphi_1 : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto 1 \end{vmatrix}$ $\quad \varphi_2 : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto -1 \end{vmatrix}$ $\quad (\mathbb{R}, \varphi_1), (\mathbb{R}, \varphi_2)$ sol. maxi (non prolongeables car déjà définies sur $\mathbb{R}$)

* autres solut° : si (I,φ) est une sol. maxi $\neq$ de $(\mathbb{R}, \varphi_1)$, $(\mathbb{R}, \varphi_2)$
$\begin{cases} \text{si } \exists t_0 \in I \;/\; \varphi(t_0) = 1 \text{ alors } (I,\varphi) = (\mathbb{R}, \varphi_1) \\ \text{. . . . . } -1 \text{ . . . . } (\mathbb{R}, \varphi_2) \end{cases}$ (chacune est la restrict° de l'au[tre])

donc $\forall t \in I, \begin{cases} \varphi(t) \neq 1 \\ \varphi(t) \neq -1 \end{cases}$ $\quad$ donc $\varphi'(t) = \varphi^2(t) - 1 \iff \dfrac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t) - 1} = 1$

$$\iff \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi(t)-1} - \frac{1}{\varphi(t)+1}\right)\varphi'(t) = 1$$

$$t_0 \in I, \quad \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi(u)-1} - \frac{1}{\varphi(u)+1}\right)\varphi'(u)\,du = \int_{t_0}^{t} du \iff \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\varphi(u)-1}{\varphi(u)+1}\right|\right]_{t_0}^{t} = t - t_0$$

$$\iff \ln\left|\frac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)+1}\right| - \ln\left|\frac{\varphi(t_0)-1}{\varphi(t_0)+1}\right| = 2(t - t_0) \iff \left|\frac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)+1}\right| = \lambda e^{2(t-t_0)}$$

signe cst sur I $\qquad \lambda \in \mathbb{R}_+^*$

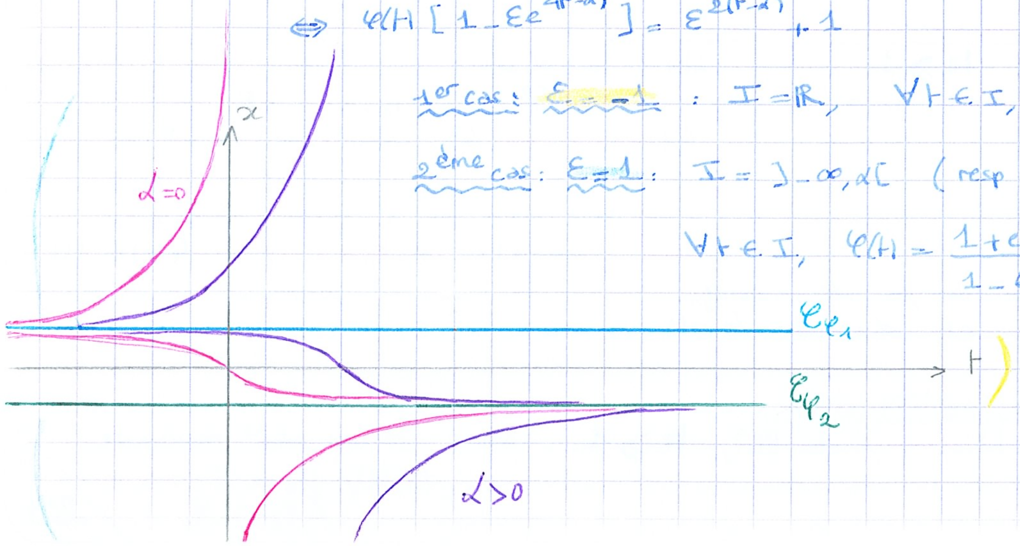
$$\iff \frac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)+1} = \pm e^{2(t-t_0) + \ln\lambda} \iff \exists \varepsilon \in \{-1, 1\}, \exists \alpha \in \mathbb{R} \;/\; \frac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)+1} = \varepsilon e^{2(t-\alpha)}$$

$$\iff \varphi(t)\left[1 - \varepsilon e^{2(t-\alpha)}\right] = \varepsilon^{2(t-\alpha)} + 1$$

1er cas : $\varepsilon = -1$: $I = \mathbb{R}$, $\forall t \in I$, $\varphi(t) = \dfrac{1 - e^{2(t-\alpha)}}{1 + e^{2(t-\alpha)}} = -\mathrm{th}(t-\alpha)$

2ème cas : $\varepsilon = 1$: $I =]-\infty, \alpha[$ (resp $]\alpha, +\infty[$)

$\forall t \in I$, $\varphi(t) = \dfrac{1 + e^{2(t-\alpha)}}{1 - e^{2(t-\alpha)}} = -\coth(t-\alpha)$



$\begin{cases} x' = -\dfrac{y}{2x} \\ y' = 4x^2 - 2 \end{cases}$ $\quad U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ $\quad f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{y}{2x} \\ 4x^2-2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$ de classe C^∞

* sol. singu $(\mathbb{R}, \varphi_1)$: $\varphi_1 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

* $\begin{cases} 2xx' = -y \\ y' = 4x^2 - 2 \end{cases}$: (E) $\quad$ je pose $X = x^2$ de classe C^∞ $\quad \begin{cases} X' = -y \\ y' = 4X - 2 \end{cases}$

(H) : $\begin{cases} X' = -y \\ y' = 4X \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} X'' = -y' = -4X \\ y' = 4X \end{cases}$ $\quad$ solut° de (H) : $\begin{cases} X = \alpha \cos(2(t-t_0)) \\ y = 2\alpha \sin(2(t-t_0)) \end{cases}$

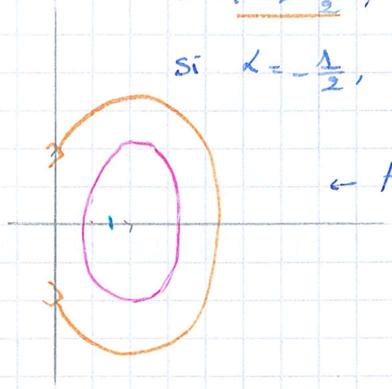
sp : $\begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$

sol. de (E) : $\begin{cases} X(t) = \alpha \cos(2(t-t_0)) + \frac{1}{2} \\ y(t) = 2\alpha \sin(2(t-t_0)) \end{cases}$ $\quad (\alpha, t_0) \in \mathbb{R}^2$

si $|\alpha| < \frac{1}{2}$, $I = \mathbb{R}$, $\varphi : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha \cos(2(t-t_0)) + \frac{1}{2}} \\ 2\alpha \sin(2(t-t_0)) \end{pmatrix} \end{array} \right.$ $\quad \alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$, sol. singu)

si $|\alpha| > \frac{1}{2}$, $I =]t_0 - \beta, t_0 + \beta[$

si $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\quad t_0 = 0 \quad \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(2t))} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ \sin^2 t = |\sin t|$ pas dérivable en 0



← trajectoire des sol. (par la représentat° puisque 2 var.)

II Propriétés géométriques des solutions

(I, φ) sol de $X' = F(X)$

$t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma_{t_0} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t + t_0 \end{array} \right.$ $\quad \varphi \circ \sigma_{t_0}^{-1}$ est définie sur $\sigma_{t_0}(I)$, intervalle

(pr calculer $\varphi(\sigma_{t_0}^{-1}(t))$ il faut que $\sigma_{t_0}^{-1}(t) \in I$ donc $t \in \sigma_{t_0}(I)$)

Pp) $(\sigma_{t_0}(I), \varphi \circ \sigma_{t_0}^{-1})$ est une sol. de $X' = F(X)$

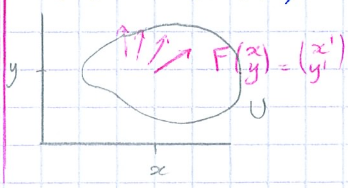
$\varphi \circ \sigma_{t_0}^{-1} \in C^1(\sigma_{t_0}(I))$ par composit°

$(\varphi \circ \sigma_{t_0}^{-1})'(t) = \underbrace{\sigma_{t_0}^{-1\,\prime}(t)}_{1 = t'} \cdot \varphi'(\sigma_{t_0}^{-1}(t)) = \varphi'(\sigma_{t_0}^{-1}(t))$ $\quad \varphi$ sol de $X' = F(X)$

$= F(\varphi(\sigma_{t_0}^{-1}(t))) = F(\varphi \circ \sigma_{t_0}^{-1}(t))$

champ de vecteurs :

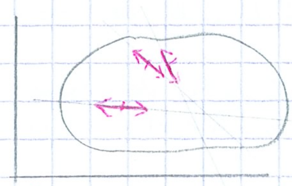
U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $F : U \to \mathbb{R}^2$ est un champ de vect.



← les vect. ont une taille (longueur)

≠

↙ il ne s'agit que de la dir°



champ d'éléments de contact :

couple {point, direct° de droite}

si on a un champ de vect, on a un champ d'él^ts de contact (on peut mettre une droite sur les vect) d'él^ts de contacts, on n'a pas.

ligne de champ

(I, φ) sol. de $X' = F(X)$ $\quad F \in C^1$ $\quad$ soit $\gamma : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \varphi(t) \end{array} \right.$ l'arc paramétré (ligne de champ)

alors, $\forall t \in I$, $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$

donc si $F(\varphi(t_0)) \neq 0$, alors la courbe param. possède en $\varphi(t)$ une tangente dirigée par le vect. champ $F(\varphi(t_0))$

↳ droite définie par l'él^t de contact

si $F(\varphi(t_0)) = 0$ alors $\varphi'(t_0) = 0$ $\quad \psi : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \varphi(t_0) \end{array} \right.$ est sol. par Cauchy. Lips : $\psi = \varphi$

résoudre une équa. diff : faire passer une courbe par ts les vect.

courbe intégrale : ligne de champ correspondant à une solut° maximale

Pp 1) $X_0 \in U$, $t_0 \in \mathbb{R}$, (I, φ) sol. maximale / $\begin{cases} t_0 \in I \\ \varphi(t_0) = X_0 \end{cases}$

on compare $\varphi(I)$ et $\psi(J)$: le support des courbes intégrales

$t_1 \in \mathbb{R}$, (J, ψ) - - - - - - - - - - / $\begin{cases} t_1 \in J \\ \psi(t_1) = X_0 \end{cases}$

$\sigma : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t + t_1 - t_0 \end{vmatrix}$ $\quad \sigma(t_0) = t_1$

$(\sigma(I), \varphi \circ \sigma^{-1})$ est une solut° / $\begin{cases} t_1 \in \sigma(I) \\ \varphi \circ \sigma^{-1}(t_1) = \varphi(t_0) = \psi(t_1) \end{cases}$

donc (J, ψ) est un prolongt de $(\sigma(I), \varphi \circ \sigma^{-1})$ (sol. maxi qui vérifie les m̂ cond. maxi)

donc $\sigma(I) \subset J$

de m̂, $I \subset \sigma^{-1}(J)$ $\quad$ donc $\begin{cases} \sigma(I) = J \\ \varphi \circ \sigma^{-1} = \psi \end{cases}$ $\quad$ en partic. $\varphi \circ \sigma^{-1}(J) = \psi(J)$

d'où $\psi(J) = \varphi \circ \sigma^{-1}(\sigma(I)) = \varphi(I)$

la courbe intégrale ne dépend que de X_0

2) $\forall X_0 \in U$, $\exists !$ courbe intégrale qui passe par X_0

3) si $F(X_0) = 0$, la courbe int. est $\{X_0\}$

4) si $X_0 \in U$, (I, φ) sol. maximale avec $\exists (t_0, t_1) \in I^2$, $t_0 \neq t_1$ / $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = X_0$

alors $\varphi \circ \sigma^{-1} = \varphi$ $\quad$ donc $\begin{cases} I = \mathbb{R} \\ \varphi \text{ périodique} \end{cases}$ $\quad$ (la période divise $|t_0 - t_1|$)

$F : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1
$G : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1

G **intégrale première** $\Leftrightarrow \forall X \in U$, $d_X G(F(X)) = 0$

Pp) $\begin{cases} G \text{ intégrale première} \\ (I, \varphi) \text{ sol. de } X' = F(X) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $G \circ \varphi$ constante sur I.

(les int. 1ères sont cstes sur les lignes de champ)

$\forall t \in I$, $(G \circ \varphi)'(t) = d(G \circ \varphi)_t(1) = (dG_{\varphi(t)} \circ d\varphi_t)(1) = dG_{\varphi(t)}(\underbrace{\varphi'(t)}_{F(\varphi(t))})$
$= 0$

ex : $U = \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{cases} x' = -y(x^2 + y^2) \\ y' = x(x^2 + y^2) \end{cases}$

- $xx' + yy' = 0$ $\quad$ donc $G : \begin{vmatrix} U \to \mathbb{R} \\ \binom{x}{y} \mapsto x^2 + y^2 \end{vmatrix}$ est une int. 1ère $\quad (d(x^2 + y^2) = 2(xx' + yy'))$

les courbes int. sont sur des cercles centrés en 0.

- passage en polaires : $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$

$\begin{cases} \rho' \cos\theta - \theta' \rho \sin\theta = -\rho \sin\theta \, \rho^2 \\ \rho' \sin\theta + \theta' \rho \cos\theta = \rho \cos\theta \, \rho^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = \rho^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \theta = \rho_0^2 (t - t_0) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x(t) = \rho_0 \cos(\rho_0^2 (t - t_0)) \\ y(t) = \rho_0 \sin(\rho_0^2 (t - t_0)) \end{cases}$

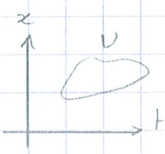
III Equations différentielles non autonomes d'ordre 1

U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $k \geq 1$

$x' = f(t, x)$

① I intervalle, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1

(I, φ) sol. de $x' = f(t, x)$ $\Leftrightarrow$ $\forall t \in I$, $\begin{cases} (t, \varphi(t)) \in U \\ \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \end{cases}$



② (I, φ) sol. max $\Leftrightarrow$ (I, φ) restrict° d'aucune sol.

1. transformation

$F : \begin{vmatrix} U \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \binom{t}{x} \mapsto \binom{1}{f(t, x)} \end{vmatrix}$ $\quad$ $x' = f(t, x)$ éq. non autonome équivalente au syst. autonome $X' = F(X)$

2. th de Cauchy-Lipschitz local

U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^k(U, \mathbb{R})$, $k \geq 1$

$\forall (t_0, x_0) \in U$, $\exists (I, \varphi)$ solut° de $x' = f(t, x)$ / $\begin{cases} t_0 \in \mathring{I} \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$

si (J, ψ) solut° ... / $\{t_0 \in J$ ... donc $\forall t \in J \cap I$ ...

Pp 1) $X_0 \in U$, $t_0 \in \mathbb{R}$, (I,φ) sol. maximale / $\begin{cases} t_0 \in I \\ \varphi(t_0) = X_0 \end{cases}$ on compare $\varphi(I)$ et $\psi(J)$: le support des courbes intégrales

$t_1 \in \mathbb{R}$, (J,ψ) - - - - - - - - - / $\begin{cases} t_1 \in J \\ \psi(t_1) = X_0 \end{cases}$

$\sigma : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t + t_1 - t_0 \end{vmatrix}$ $\sigma(t_0) = t_1$

$(\sigma(I), \varphi \circ \sigma^{-1})$ est une solut° / $\begin{cases} t_1 \in \sigma(I) \\ \varphi \circ \sigma^{-1}(t_1) = \varphi(t_0) = \psi(t_1) \end{cases}$

donc (J,ψ) est un prolongem^t de $(\sigma(I), \varphi\circ\sigma^{-1})$ (sol. maxi qui vérifie les m̂ cond. maxi)

donc $\sigma(I) \subset J$

de m̂, $I \subset \sigma^{-1}(J)$ donc $\begin{cases} \sigma(I) = J \\ \varphi\circ\sigma^{-1} = \psi \end{cases}$ en partic. $\varphi\circ\sigma^{-1}(J) = \psi(J)$

d'où $\psi(J) = \varphi\circ\sigma^{-1}(\sigma(I)) = \varphi(I)$

la courbe intégrale ne dépend que de X_0

2) $\forall X_0 \in U$, $\exists!$ courbe intégrale qui passe par X_0

3) si $F(X_0) = 0$, la courbe int. est $\{X_0\}$

4) si $X_0 \in U$, (I,ψ) sol. maximale avec $\exists (t_0,t_1) \in I^2$, $t_0 \neq t_1$ / $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = X_0$

alors $\varphi\circ\sigma^{-1} = \varphi$ donc $\begin{cases} I = \mathbb{R} \\ \varphi \text{ périodique} \end{cases}$ (la période divise $|t_0 - t_1|$)

$F : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 G intégrale première $\Leftrightarrow \forall X \in U$, $d_X G(F(X)) = 0$

$G : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1

Pp) $\begin{cases} G \text{ intégrale première} \\ (I,\varphi) \text{ sol. de } X' = F(X) \end{cases} \Rightarrow G\circ\varphi$ constante sur I

(les int. 1ères sont cstes sur les lignes de champ)

$\forall t \in I$, $(G\circ\varphi)'(t) = d(G\circ\varphi)_t(1) = (dG_{\varphi(t)} \circ d\varphi_t)(1) = dG_{\varphi(t)}(\underbrace{\varphi'(t)}_{F(\varphi(t))})$

$= 0$

ex : $U = \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x' = -y(x^2+y^2) \\ y' = x(x^2+y^2) \end{cases}$

- $xx' + yy' = 0$ donc $G : \begin{vmatrix} U \to \mathbb{R} \\ \binom{x}{y} \mapsto x^2+y^2 \end{vmatrix}$ est une int. 1ère ($d(x^2+y^2) = 2(xx'+yy')$)

les courbes int. sont sur des cercles centrés en 0.

- passage en polaires : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$\begin{cases} \rho'\cos\theta - \theta'\rho\sin\theta = -\rho\sin\theta\,\rho^2 \\ \rho'\sin\theta + \theta'\rho\cos\theta = \rho\cos\theta\,\rho^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = \rho^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \theta = \rho_0^2(t - t_0) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x(t) = \rho_0 \cos(\rho_0^2(t-t_0)) \\ y(t) = \rho_0 \sin(\rho_0^2(t-t_0)) \end{cases}$

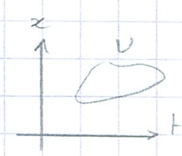
III Equations différentielles non autonomes d'ordre 1

U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $k \geq 1$

$x' = f(t,x)$

① I intervalle, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1

(I,φ) sol. de $x' = f(t,x) \Leftrightarrow \forall t \in I$, $\begin{cases} (t,\varphi(t)) \in U \\ \varphi'(t) = f(t,\varphi(t)) \end{cases}$



② (I,φ) sol. max $\Leftrightarrow (I,\varphi)$ restrict° d'aucune sol.

1. transformation

$F : \begin{vmatrix} U \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ \binom{t}{x} \mapsto \binom{1}{f(t,x)} \end{vmatrix}$ $x' = f(t,x)$ éq. non autonome équivalente au syst. autonome $X' = F(X)$

2. th de Cauchy-Lipschitz local

U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^k(U,\mathbb{R})$, $k \geq 1$

$\forall (t_0,x_0) \in U$, $\exists (I,\varphi)$ soluto de $x' = f(t,x)$ / $\begin{cases} t_0 \in \mathring{I} \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$

si (J,ψ) est une sol. / $\begin{cases} t_0 \in J \\ \psi(t_0) = x_0 \end{cases}$ alors $\forall t \in I\cap J$, $\varphi(t) = \psi(t)$

3. th de Cauchy-Lipschitz global

m̂ hyp

$\forall (t_0,x_0) \in U$, $\begin{cases} \exists \text{ une sol. maximale } (I,\varphi) \text{ / } \begin{cases} t_0 \in \mathring{I} \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases} \\ I \text{ est un intervalle} \\ \text{si } (J,\psi) \text{ est une solut° / } t_0 \in J,\ \psi(t_0) = x_0 \text{ alors } (J,\psi) \text{ est une restrict° de } (I,\varphi) \end{cases}$