Courbes paramétrées

E_2 ev de dim 2, de base $(\vec{i},\vec{j})$ $\mathcal{E}_2$ espace affine d'ev directeur E_2
E_3 3 $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\mathcal{E}_3$

On identifie $\mathcal{E}_2$ et E_2 par $O \in \mathcal{E}_2$, repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
$\mathcal{E}_3$ E_3 $O \in \mathcal{E}_3$ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$:\left|\begin{array}{l}\mathcal{E}_2 \to E_2 \\ m \mapsto \overrightarrow{Om}\end{array}\right.$ $:\left|\begin{array}{l}\mathcal{E}_3 \to E_3 \\ m \mapsto \overrightarrow{Om}\end{array}\right.$

I Propriétés affines

* courbe param. de classe C^k = arc param. de classe C^k
= applicat° $\varphi : I \to \mathcal{E}_2$ $(\mathcal{E}_3)$ avec $\begin{cases} I \text{ intervalle} \\ \varphi \text{ de classe } C^k \end{cases}$

* $n=2$: $\varphi : \left|\begin{array}{l} I \to \mathcal{E}_2 \\ t \mapsto m(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix}\end{array}\right.$ $n=3$: $\varphi : \left|\begin{array}{l} I \to \mathcal{E}_3 \\ t \mapsto m(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t)\end{pmatrix}\end{array}\right.$ $\varphi(t) = m(t) = \overrightarrow{Om}(t)$
courbe plane courbe gauche
* $\varphi(I) \subset \mathcal{E}_2 (\mathcal{E}_3)$
↳ support de la courbe param.
* $m(t)$ est simple $\Leftrightarrow$ $\forall u \in I \setminus \{t\}$, $m(u) \neq m(t)$
* (I,φ) est un lacet $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} I = [a b] & a \neq b \\ \varphi(a) = \varphi(b) \end{cases}$

1. interprétation cinématique

$k \geq 1$: $\varphi'(t) = \dfrac{d\overrightarrow{Om}}{dt} = \dfrac{d\vec{m}}{dt}$ (vecteur vitesse) $\|\varphi'(t)\| = \dfrac{d\vec{m}}{dt} \in \mathbb{R}^+$ (vitesse instant

$k \geq 2$: $\varphi''(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{Om}}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{m}}{dt^2}$ (vect. accélérat°)

2. changement de paramètre C^k admissible

(I,φ) courbe param. de classe C^k $(k \geq 1)$
J intervalle, $\theta : J \to I$ C^k-difféo $\psi : \left|\begin{array}{l} J \to \mathcal{E} \\ u \mapsto \varphi(\theta(u))\end{array}\right.$

(J,ψ) courbe param. de classe C^k
rem : (I,φ) et (J,ψ) ont m̂ support

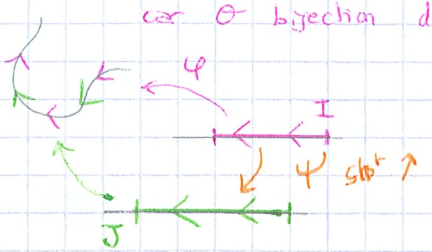
3. relation

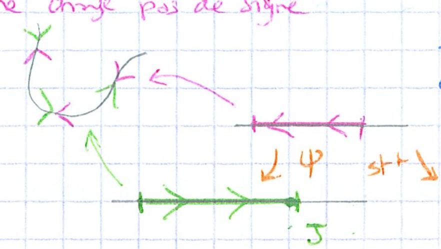
(I,φ), (J,ψ) 2 courbes de classe C^k
(J,ψ) équivalente à (I,φ) $\Leftrightarrow$ $\exists$ un C^k-difféo $\theta : J \to I$ / $\psi = \varphi \circ \theta$
c'est une relat° d'équivalence :

* réflexivité : $\theta : \left|\begin{array}{l} I \to I \\ t \mapsto t\end{array}\right.$
* sym : $\begin{cases} \psi = \varphi \circ \theta \\ \varphi = \psi \circ \theta^{-1} \end{cases}$, $\theta^{-1} : I \to J$ C^k-difféo
* transi. : $\begin{cases} \psi = \varphi \circ \theta \\ \chi = \psi \circ \theta' \end{cases}$ $\chi = \psi \circ \theta' = \varphi \circ \theta \circ \theta'$ $\theta \circ \theta'$ C^k-difféo

arc géométrique = classe d'équivalence pr cette relat°
(I,φ), (J,ψ) représentent le m̂ arc géom. $\Leftrightarrow$ $\exists$ un C^k-difféo $\theta : J \to I$ / $\psi = \varphi \circ \theta$
donc $\forall u \in J$, $\theta'(u) > 0$ **ou** $\forall u \in J$, $\theta'(u) < 0$
car θ bijection donc θ' ne change pas de signe

(I,φ) et (J,ψ) ont m̂ sens de parcours





sens opposés

Chaque arc géom. a 2 sens de parcours
Orienter un arc géom = choisir un sens

4 - sous-espaces caractéristiques

(I,φ) courbe param. de classe C^k $(k \geq 1)$, $t_0 \in I$

$$\begin{cases} V_1(t_0) = \mathrm{Vect}(\varphi'(t_0)) \\ V_2(t_0) = \mathrm{Vect}(\varphi'(t_0), \varphi''(t_0)) \\ \vdots \\ V_k(t_0) = \mathrm{Vect}(\varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(k)}(t_0)) \end{cases}$$

Pp 1) $V_1(t_0) \subset V_2(t_0) \subset \dots \subset V_k(t_0)$

2) ss-esp. indépendants du paramétrage C^k admissible

$$\begin{cases} \psi = \varphi \circ \theta \\ \theta(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1(u_0) = \mathrm{Vect}(\psi'(u_0)) \\ U_2(u_0) = \mathrm{Vect}(\psi'(u_0), \psi''(u_0)) \\ \vdots \\ U_k(u_0) = \mathrm{Vect}(\psi'(u_0), \dots, \psi^{(k)}(u_0)) \end{cases}$$

$\psi' = \theta' \cdot \varphi' \circ \theta$ $\qquad \psi'(u_0) = \underbrace{\theta'(u_0)}_{\neq 0} \cdot \varphi' \circ \theta(u_0) = \theta'(u_0)\, \varphi'(t_0)$

donc $U_1(u_0) = V_1(t_0)$

$\psi'' = \theta'^2\, \varphi'' \circ \theta + \theta'' \cdot \varphi' \circ \theta$ $\qquad \psi''(u_0) = \theta'(u_0)^2\, \varphi'' \circ \theta(u_0) + \theta''(u_0)\, \varphi' \circ \theta(u_0) \in V_2(t_0)$

donc $U_2(u_0) \subset V_2(t_0)$

$\psi^{(j)} = \theta'^{j}\, \varphi^{(j)} \circ \theta + \sum_{i \leq j} \dots \varphi^{(i)} \circ \theta$

$\psi^{(j+1)} = \theta'^{j+1}\, \varphi^{(j+1)} \circ \theta + \sum_{i \leq j} \dots \varphi^{(i)}(\theta)$

$\psi^{(j+1)}(u_0) = \theta'(u_0)^{j+1}\, \varphi^{(j+1)}(t_0) + \underbrace{\vec{u}}_{\in V_j(t_0)}$

donc $U_{j+1}(u_0) \subset V_{j+1}(t_0)$

$\forall j \in \{1, \dots, k\}$, $U_j(u_0) \subset V_j(t_0)$

de $\hat{m}$ $V_j(t_0) \subset U_j(u_0)$ $\qquad$ d'où $U_j(u_0) = V_j(t_0)$

5 - définitions

(I,φ) courbe param. de classe C^k (k suffisant), $t_0 \in I$

t_0 est régulier $\iff \dim V_1(t_0) = 1$

$\iff \varphi'(t_0) \neq 0$

t_0 est stationnaire $\iff \dim V_1(t_0) = 0$

$\iff \varphi'(t_0) = 0$

birégulier $\iff \dim V_2(t_0) = 2$

$\iff (\varphi'(t_0), \varphi''(t_0))$ libre

ne dépend pas du param. C^k admissible

$$\begin{cases} (I,\varphi) \\ (J,\psi) \\ \theta : J \to I \quad C^k\text{-difféo} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_0 \in I \\ u_0 \in J \\ t_0 = \theta(u_0) \end{cases} \quad \text{ont les } \hat{m} \text{ qualités}$$

6 - applications

* $n = 2$: (I,φ), $t_0 \in I$ régulier

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + (t-t_0)\,x'(t_0) + o(t-t_0) \\ y(t) = y(t_0) + (t-t_0)\,y'(t_0) + o(t-t_0) \end{cases}$$

$m(t) = m(t_0) + (t-t_0)\,\vec{\varphi}'(t_0) + o(t-t_0)$

$\overrightarrow{m(t_0)m(t)} = (t-t_0)\,\underbrace{\vec{\varphi}'(t_0)}_{\neq 0} + o(t-t_0)$

le vecteur $\varphi'(t_0)$ dirige la tangente au support de la courbe en $\varphi(t_0)$ ($V_1(t_0)$ est l'ev directeur de la tangente au support en $\varphi(t_0)$)

équat° de la tangente en $\varphi(t_0)$:

$M(X,Y) \in T \iff (\overrightarrow{m(t_0)M}, \varphi'(t_0))$ liée $\iff \begin{vmatrix} X - x(t_0) & x'(t_0) \\ Y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$

système paramétrique : $\begin{cases} X = x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ Y = y(t_0) + \lambda y'(t_0) \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

* $n = 3$: (I,φ), $t_0 \in I$ birégulier

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + (t-t_0)\,x'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\,x''(t_0) + o((t-t_0)^2) \\ y(t) = \dots \\ z(t) = \dots \end{cases}$$

$m(t) = m(t_0) + (t-t_0)\,\vec{\varphi}'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\,\vec{\varphi}''(t_0) + o((t-t_0)^2)$

la famille $(\varphi'(t_0), \varphi''(t_0))$ dirige le plan osculateur au support de la courbe en $\varphi(t_0)$

$V_2(t_0)$ est l'ev directeur du plan osculateur au support en $\varphi(t_0)$

équat° du plan osculateur en $\varphi(t_0)$:

$M(X,Y,Z) \in \mathcal{P} \iff (\overrightarrow{m(t_0)M}, \varphi'(t_0), \varphi''(t_0))$ liée $\iff \begin{vmatrix} X - x(t_0) & x'(t_0) & x''(t_0) \\ Y - y(t_0) & y'(t_0) & y''(t_0) \\ Z - z(t_0) & z'(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$

syst. paramétrique : $\begin{cases} X = x(t_0) + \lambda x'(t_0) + \mu x''(t_0) \\ Y = \dots \\ Z = \dots \end{cases}$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

rem : le plan osculateur contient la tangente

$n = 2$: $V_1(t_0) = V_2(t_0) = \dots\dots = V_{p-1}(t_0) = \{0\}$ dim 0

$\begin{cases} V_p(t_0) \neq 0 \\ V_p(t_0) = V_{p+1}(t_0) = \dots = V_{q-1}(t_0) \end{cases}$ dim 1, dim 1

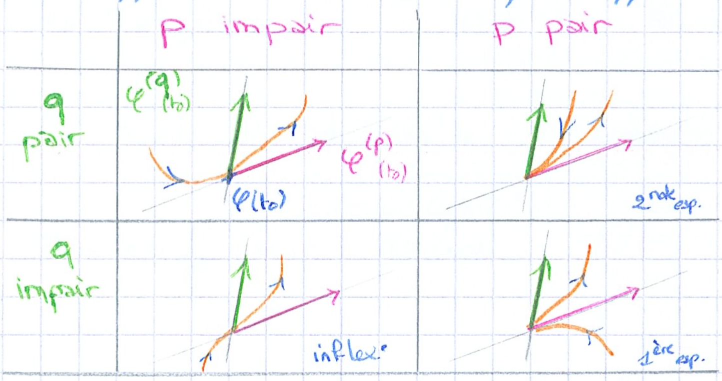
$V_q(t_0) \neq V_p(t_0)$ dim 2

$(\varphi^{(p)}(t_0), \varphi^{(q)}(t_0))$ base de E_2, $(m(t_0), \varphi^{(p)}(t_0), \varphi^{(q)}(t_0))$ repère de $\mathcal{E}_2$

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\varphi^{(p)}(t_0) + \underbrace{\frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!} + \dots + \frac{(t-t_0)^{q-1}}{(q-1)!}\varphi^{(q-1)}(t_0)}_{\text{colinéaire à } \varphi^{(p)}(t_0)} + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\varphi^{(q)}(t_0) + o(t-t_0)^q$$

ds le repère $(m(t_0), \varphi^{(p)}(t_0), \varphi^{(q)}(t_0))$, les coord. de $m(t) = \varphi(t)$ sont : $\begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o(t-t_0)^p \\ \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o(t-t_0)^q \end{pmatrix}$

posit° du support de la courbe par rapport à sa tangente :



$\varphi^{(q)}(t_0)$ tourné vers la concavité

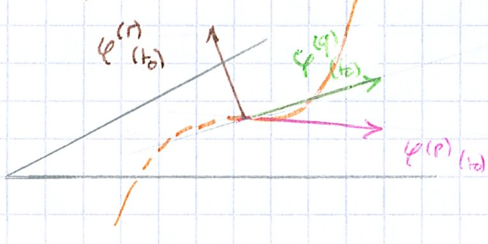
$n = 3$ $\begin{cases} \vdots \\ V_q(t_0) = V_{q+1}(t_0) = \dots = V_{r-1}(t_0) \\ V_r(t_0) \neq V_q(t_0) \end{cases}$ dim 3

coord : $\begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o((t-t_0)^p) \\ \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o((t-t_0)^q) \\ \frac{(t-t_0)^r}{r!} + o((t-t_0)^r) \end{pmatrix}$

tangente dirigée par $\varphi^{(p)}(t_0)$

plan osculateur : $(\varphi^{(p)}(t_0), \varphi^{(q)}(t_0))$

r pair : la courbe ne traverse pas le plan osculateur



p, r impair

q pair

II. Plan d'étude d'une courbe plane

1. courbe cartésienne

$\varphi, \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \binom{x(t)}{y(t)} \end{array} \right.$

* domaine de déf, classe
* parité, périodicité, antipériodicité $\to$ conséq. graphiques, domaine d'étude
* variations, limites, branches infinies, pts statio.
* pts remarquables, concavité
* support

2. courbe en polaires

cf 1. $\rho : \left| \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \rho(\theta) \end{array} \right.$

dir° asymptotique : $\theta \to \theta_0$ 1er cas : $\theta_0 \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$: chgt de repère

$\lim_{\theta_0} \sin(\theta - \theta_0)\rho(\theta)$

$2^{ème}$ cas : $\theta_0 \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$: coord. cartés. $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$\vec{Om} = \rho(\theta)\vec{u_\theta}$ $\quad \frac{dm}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{u_\theta} + \rho(\theta)\vec{v_\theta}$

III Courbe plane définie par une équation

U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \begin{vmatrix} U \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{vmatrix}$

on suppose $0 \in f(U)$, on pose $\Gamma = f^{-1}(0)$ $\quad \Gamma$: partie non vide de U d'équat° $f(x,y) = 0$

ex : $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2+y^2-1 \end{vmatrix}$ $\quad \Gamma$: cercle de $\begin{vmatrix} \text{centre } 0 \\ \text{rayon } 1 \end{vmatrix}$

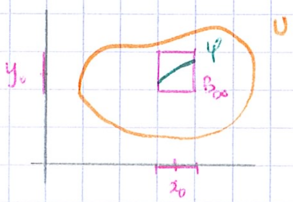
$m \in \Gamma$ est régulier $\Leftrightarrow df_m \neq 0$
$\Leftrightarrow Jac\, f_m \neq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(m) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y}(m) \neq 0\right)$

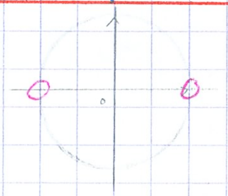
Th des fonctions implicites

U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^k(U, \mathbb{R})$
$m_0 = (x_0, y_0) \in U$ / $f(m_0) = 0$, $\quad \Gamma = f^{-1}(0)$ $\quad$ si $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, on prend $\frac{\partial f}{\partial x}$
on suppose $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

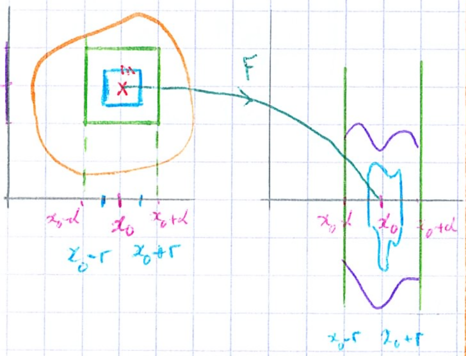
alors $\exists \begin{cases} r > 0 \\ \varphi :]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R} \text{ de classe } C^k \end{cases}$ / $\forall (x,y) \in U \cap B_\infty((x_0,y_0), r)$, $(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

autrement dit
localement, Γ est la courbe représentative d'une fct° de classe C^k





$f(x,y) = x^2+y^2-1$
$(1,0) \in \Gamma$ mais $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$ (pente ∞)
$1^2 + 0^2 - 1 = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$



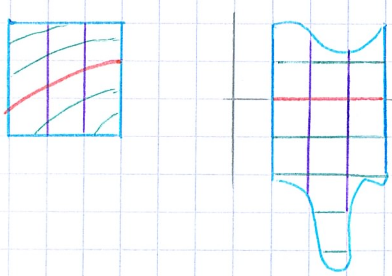
$F : \begin{vmatrix} U \to \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{x}{f(x,y)} \end{vmatrix} \in C^k$, $k \geq 1$ $\quad Jac\, F(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

$jac\, F(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

th d'invers° locale :
$\exists \alpha > 0$ / $\begin{cases} B_\infty((x_0,y_0),\alpha) \subset U \\ F\ C^k \text{ difféo de } B_\infty((x_0,y_0),\alpha) \text{ sur } F(B_\infty((x_0,y_0),\alpha)) \end{cases}$

$F(B_\infty((x_0,y_0),\alpha))$ $\begin{cases} \text{est un ouvert} \\ \text{contient } (x_0, 0) \end{cases}$

$\exists r > 0, r < \alpha$ / $B_\infty((x_0,0),r) \subset B_\infty((x_0,y_0),\alpha)$
F réalise un C^k difféo de $B_\infty((x_0,y_0),r)$ sur $F(B_\infty((x_0,y_0),r))$
$F : \begin{vmatrix} B_\infty((x_0,y_0),r) \to F(B_\infty((x_0,y_0),r)) \\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{x}{f(x,y)} \end{vmatrix}$



bijecto réciproque : $G : \begin{vmatrix} F(B_\infty((x_0,y_0),r)) \to B_\infty((x_0,y_0),r') \\ \binom{x'}{y'} \mapsto \binom{x'}{g(x',y')} \end{vmatrix}$

avec $g : F(B_\infty((x_0,y_0),r)) \to \mathbb{R}$ de classe C^k

$\forall (x,y) \in B_\infty((x_0,y_0),r)$, $(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - r < x < x_0 + r \\ y_0 - r < y < y_0 + r \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - r < x < x_0 + r \\ F(x,y) = (x,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - r < x < x_0 + r \\ (x,y) = G(x,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - r < x < x_0 + r \\ y = g(x,0) \end{cases}$

on pose $\varphi : \begin{vmatrix}]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x,0) \end{vmatrix}$ alors φ est de classe C^k

et $\Gamma \cap B_\infty((x_0,y_0),r) = \{(x, \varphi(x)) / x \in]x_0 - r, x_0 + r[\}$

rem : * $\forall x \in]x_0-r, x_0+r[$, $F(x, f(x,\varphi(x))) = (x,0)$ $\quad f(x,\varphi(x))=0$

donc $\dfrac{d}{dx}\big(f(x,\varphi(x))\big) = 0$

$$\psi : \left| \begin{array}{l}]x_0-r, x_0+r[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto (x, \varphi(x)) \end{array}\right. \qquad f : \left| \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{array}\right.$$

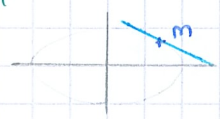
$$(f\circ\psi)'(x) = d(f\circ\psi)_x(1) = df_{\psi(x)} \circ d\psi_x(1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ \varphi'(x)\end{pmatrix}(1)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\,\varphi'(x) = 0$ d'où $\boxed{\varphi'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}}$

ex. Γ ellipse d'équat° : $\dfrac{x^2}{4}+y^2 = 1$, $\quad m\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \in \Gamma$

équat° de la tangente à Γ en m $\qquad f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{x^2}{4}+y^2-1 \end{array}\right.$



$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \neq 0$

Th, $\exists r>0$, $\exists \varphi : \left| \begin{array}{l}]1-r, 1+r[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi(x) \end{array}\right.$

$\Gamma \cap B_\infty\left(\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), r\right) = \mathcal{E}_\varphi$ $\qquad \varphi'(1) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{3}}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{1-x}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} - y = 0$$

* on munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}\end{pmatrix}$ dirige la tangente à Γ en m, donc $\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ aussi

donc $\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ dirige la normale. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0)$ dirige la normale
valable en chaque pt régulier (où $\overrightarrow{\text{grad}} \neq \vec{0}$)

IV Propriétés métriques

1. rectification d'une courbe paramétrée

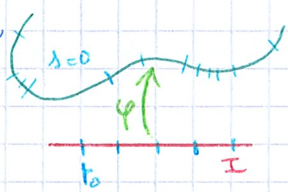
(I,φ) courbe param. de classe C^k, $k\geq 1$ sans pt stationnaire : $\forall t\in I$, $\varphi'(t)\neq 0$

$$s : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \underbrace{\|\varphi'(u)\|}_{C^{k-1}}\,du \end{array}\right.$$

alors
① s est de classe C^k sur I
② $s(t_0) = 0$
③ $s(b) - s(a) = \int_a^b \|\varphi'(u)\|\,du$
④ $s'(t) = \|\varphi'(t)\| > 0$
⑤ s C^k difféo de I sur $s(I) = J$
s chgt de var C^k admissible
s abscisse curviligne

longueur algébrique du support de l'arc entre les pts de param. a et b

si t représente le tps, le mobile va $\oplus$ ou $\ominus$ vite



rem : on peut $\begin{cases} \text{changer } t_0 \\ \text{le sens de parcours : } s(t) = -\displaystyle\int_{t_0}^{t}\|\varphi'(u)\|\,du \end{cases}$

Calcul : $n=2$: $\varphi : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix} \end{array}\right.$

cartésiennes. $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t)\end{pmatrix}$ $\qquad \|\varphi'(t)\| = \left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{1/2}$

$\hat{m}$ sens de parcours : $\frac{ds}{dt} = \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)$ $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ (2 sens)

polaires. $\vec{Om} = \rho(\theta)\vec{u_\theta}$ $\frac{d\vec{m}}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{u_\theta} + \rho(\theta)\vec{v_\theta}$ $\left\|\frac{d\vec{m}}{d\theta}\right\|^2 = \rho'(\theta)^2 + \rho^2$

$\frac{ds}{dt} = \frac{dm}{dt} = \frac{dm}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow ds = \frac{dm}{d\theta}\,d\theta$ $(ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho\,d\theta)^2$

ex: * $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \binom{t}{t^2} \end{array}\right.$ $x : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow t \end{array}\right.$ $y : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^2 \end{array}\right.$

$dx = dt$ $dy = 2t\,dt$ $(ds)^2 = (dt)^2 + 4t^2(dt)^2 = (dt)^2[1+4t^2]$

on pose : $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+4t^2}$ (choix du sens de parcours)

$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+4u^2}\,du$

* cardioïde

$\begin{cases} \rho = 1 + \cos\theta \\ d\rho = -\sin\theta\,d\theta \end{cases}$ $ds = (-\sin\theta\,d\theta)^2 + ((1+\cos\theta)d\theta)^2 = (2+2\cos\theta)(d\theta)^2 = 4\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$

$I =]-\pi, \pi[$ (pour ne pas avoir de pt statio) $ds = 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$

2. repère de Frenet _ courbure

(I, φ) courbe param. C^k ss pt stationnaire, s abscisse curvi.

$\forall t \in I$ $\varphi(t) = m(t) = s(t)$

$\frac{d\vec{m}}{ds} = \underbrace{\frac{d\vec{m}}{dt}}_{\varphi'(t)}\frac{dt}{ds}$ $\left\|\frac{d\vec{m}}{ds}\right\| = \|\varphi'(t)\|\left|\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|\left|\frac{dt}{ds}\right| = 1$

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{m}}{ds}$: vecteur unitaire tangent orienté (fct° aussi bien de t que de s)

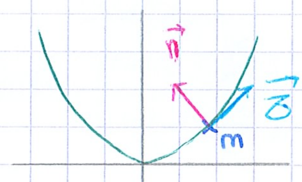
$\vec{n}$: vecteur unitaire / $(\vec{\tau}, \vec{n})$ Bon directe

$(m, \vec{\tau}, \vec{n})$: repère de Frenet

* $\varphi(t) = \binom{t}{t^2}$ $ds = \sqrt{1+4t^2}\,dt$ $\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j}$

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{m}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i} + \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}$

$\vec{n} = \frac{-2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}$

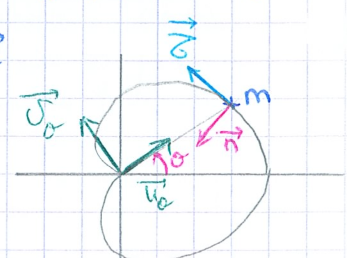


* cardioïde

$\vec{Om} = \rho(\theta)\vec{u_\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$ $\frac{d\vec{m}}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{u_\theta} + \rho(\theta)\vec{v_\theta} = -\sin\theta\,\vec{u_\theta} + (1+\cos\theta)\vec{v_\theta}$

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{m}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \frac{-\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}}\vec{u_\theta} + \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}\vec{v_\theta} = -\sin\frac{\theta}{2}\vec{u_\theta} + \cos\frac{\theta}{2}\vec{v_\theta}$

$\vec{n} = -\cos\frac{\theta}{2}\vec{u_\theta} - \sin\frac{\theta}{2}\vec{v_\theta}$



$\hat{m}$ hyp, $k \geq 2$

$\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ sont de classe C^{k-1}

$\vec{\tau}.\vec{\tau} = 1$

$2\vec{\tau}.\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$ $\exists c \in \mathbb{R} \,/\, \frac{d\vec{\tau}}{ds} = c\vec{n}$ c: courbure de la courbe param. en m

orthog. à τ donc $/\!/ \vec{n}$

1ère formule de Frenet

$\vec{n}.\vec{n} = 1$

$2\vec{n}.\frac{d\vec{n}}{ds} = 0$ $\frac{d\vec{n}}{ds} \in \mathrm{Vect}(\vec{\tau})$

$\vec{n}.\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds}\vec{\tau} + \vec{n}\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$ $\frac{d\vec{n}}{ds}.\vec{\tau} = -c$ $\frac{d\vec{n}}{ds} = -c\vec{\tau}$ 2nde formule de Frenet

Pp) c est une fct° de classe C^{k-2} de t ou de s

3. interprétation géométrique

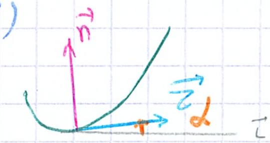
$\left| \begin{array}{l} I \longrightarrow E_2 \\ t \longmapsto \vec{\tau} \end{array}\right.$ de classe C^k, $\|\vec{\tau}\| = 1$

th du relèvem^t : $\exists\, \alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{k-1} / $\forall t \in I$, $\vec{\tau} = \cos\alpha\, \vec{\imath} + \sin\alpha\, \vec{\jmath}$

α fct de t ou de s

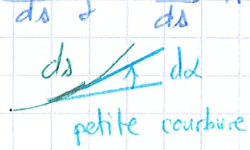
α est une mesure de $(\vec{\imath}, \vec{\tau})$

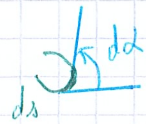
$$\vec{n} = \overbrace{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}^{-\sin\alpha} \vec{\imath} + \overbrace{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}^{\cos\alpha} \vec{\jmath}$$



$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\sin\alpha \frac{d\alpha}{ds} \vec{\imath} + \cos\alpha \frac{d\alpha}{ds} \vec{\jmath} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{n}$$

d'où $\boxed{c = \dfrac{d\alpha}{ds}}$





ex : * $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$ $\quad \vec{\tau} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}}_{\cos\alpha} \vec{\imath} + \underbrace{\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}}_{\sin\alpha} \vec{\jmath}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \tan\alpha = 2t \\ (1+\tan^2\alpha)\, d\alpha = 2dt \end{array} \right.$

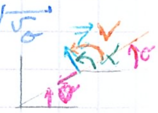
$$c = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{2}{1+\tan^2\alpha} \frac{dt}{ds} = \frac{2}{1+4t^2} \frac{dt}{ds} = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

courbure = inverse d'une longueur

cardioïde * $\vec{\tau} = -\sin\frac{\theta}{2} \vec{u_\theta} + \cos\frac{\theta}{2} \vec{v_\theta} = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u_\theta} + \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \vec{v_\theta} = \cos V \vec{u_\theta} + \sin V \vec{v_\theta}$

$V = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$



$$c = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\frac{3}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{3}{4\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\alpha = (\vec{\imath}, \vec{\tau}) = (\vec{\imath}, \vec{u_\theta}) + (\vec{u_\theta}, \vec{\tau}) = \theta + V$$

calcul de la courbure : 3ème méth. : méth. cinématique

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{m}}{dt}$ $\quad \vec{\gamma} = \dfrac{d^2\vec{m}}{dt^2}$ $\quad \vec{\tau} = \dfrac{1}{V} \vec{v}$ avec $V = \|\vec{v}\|$ $\quad \vec{\tau} = \dfrac{d\vec{m}}{ds} = \underbrace{\dfrac{d\vec{m}}{dt}}_{\vec{v}} \dfrac{dt}{ds} \Rightarrow \dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{V}$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dt}{ds}\left(-\frac{1}{V^2} \frac{dV}{dt} \vec{v} + \frac{1}{V} \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = -\frac{1}{V^3} \frac{dV}{dt} \vec{v} + \frac{1}{V^2} \vec{\gamma}$$

$$c = \vec{n} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \cancel{-\frac{dV}{dt} \frac{1}{V^3} \vec{v} \cdot \vec{n}}_{\,0 \; \vec{v} \perp \vec{n}} + \frac{1}{V^2} \vec{\gamma} \cdot \vec{n} = \frac{1}{V^2} \vec{\gamma} \cdot \vec{n}$$

compo normale de l'accélérat°

4ème méth : courbe représentative

$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \\ x \in I \\ f \in C^k(I),\ k \geq 2 \end{array} \right.$ $\quad \varphi : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} dx^2 = dx^2 \\ dy^2 = f'(x)^2 dx^2 \end{array} \right.$

$ds^2 = [1 + f'(x)^2]\, dx^2$

$\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}$

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{ds} \vec{\imath} + \frac{dy}{ds} \vec{\jmath} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \vec{\imath} + \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \vec{\jmath}$$

$\tan\alpha = f'(x)$ $\quad (1+\tan^2\alpha)\, d\alpha = f''(x)\, dx$ $\quad \dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{f''(x)}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{f''(x)}{1+f'(x)^2}$

$$c = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{d\alpha}{dx} = \boxed{\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}}$$

ex : $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x+x^2} \end{array} \right.$ courbure au pt de param 0, pt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(x) = 1 + (x+x^2) + \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o(x^2) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} f'(0) = 1 \\ f''(0) = 3 \end{array} \right.$ $\quad c = \dfrac{3}{2^{3/2}}$

- si $c \neq 0$, $R = \dfrac{1}{c}$: rayon de courbure

Ω défini par $\vec{m\Omega} = R\vec{n}$ $\quad \Omega$: centre de courbure

cercle (Ω, R) : cercle osculateur